Photo de couverture : Vers la définition de l'intégrale double... (Liège, décembre 1998) — Photo P. Dupont

Mathématique
et
Pédagogie

Sommaire

Articles

Rubriques

N° 157 **Mai–Juin 2006**

NOTE

- Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse :
  Pascal Dupont, Rue du Stampia 77, B - 1390 Grez-Doiceau.
  Courrier électronique : `pascal.dupont@ulg.ac.be`
- Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique *stricto sensu*, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques, &c.
- Les auteurs sont responsables des idées qu'ils expriment. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.
- Les auteurs sont invités à envoyer leurs articles encodés sur un CD-rom ou par courrier électronique. L'usage de LaTeX est vivement recommandé ; d'autres traitements de texte ne devraient être utilisés que pour des textes ne comportant pas de formules ; le format « texte seul » est finalement encore préférable. À défaut, les textes seront dactylographiés ; dans ce cas, les illustrations seront des documents de bonne qualité (photographies contrastées, figures dessinées en noir et avec précision) prêts à être scannés. *Les textes devant être réencodés risquent de voir leur délai de parution allongé de manière appréciable.*
- Dans tous les cas où l'article en contient, les figures seront annexées dans des fichiers séparés. Leur qualité est extrêmement importante ; en particulier, des documents au format JPEG ne peuvent pas avoir été trop comprimés.
- L'auteur mentionnera dans l'article ses prénom, nom et adresse (personnelle ou professionnelle) ainsi que l'institution où il travaille et, éventuellement, une liste de mots clés (10 maximum).
- La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous.
  Pour les livres :
  Dieudonné J., *Foundations of Modern Analysis*, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pp.
  Pour les articles :
  Gribaumont A., Les structures de programmation, *Mathématique et Pédagogie*, **36** (1982), 53–56.
- Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée ; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour corriger cette épreuve et la renvoyer à la rédaction.
- MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

Éditeur responsable : Pascal Dupont, Rue du Stampia 77, 1390 Grez-Doiceau.

Publié avec l'appui de l'Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Service général du Pilotage du système éducatif.

Éditorial

GÉRALD TROESSAERT

Comme Pascal Dupont l'a très bien écrit dans son éditorial (*Mathématique & Pédagogie* **156**), beaucoup de nos nouveaux collègues n'ont pas une formation initiale en mathématique ; le profil de l'enseignant en mathématique évolue. Une société comme la nôtre doit être attentive à cette évolution, s'y adapter et apporter son aide à ces nouveaux collègues qui sont parfois désemparés face à certaines notions ou exigences du programme.

Vous les professeurs chevronnés, vous pouvez participer à cette aide en prenant votre meilleure plume et en partageant votre expérience de l'enseignement. Les colonnes de nos revues *Math-Jeunes* et *Mathématique & Pédagogie* vous sont ouvertes.

Peut-être certains d'entre vous pensent-ils qu'après de nombreuses années de « bons et loyaux services », ces revues ne sont plus adaptées aux attentes de nos membres ? Les ravages du temps imposent-ils un « lifting » ?

Une réflexion approfondie concernant la politique éditoriale de la société va être menée l'année prochaine. Dans ce cadre, nous aimerions connaître votre avis. Vous êtes invités à nous communiquer vos idées et réflexions sur nos publications. Ce sujet sera abordé aussi durant l'assemblée générale d'août prochain.

Ainsi de nombreuses idées s'entrechoquent : *Math-Jeunes*, boudé par nos étudiants, ne pourrait-il pas moyennant quelques petits aménagements devenir un auxiliaire précieux pour le professeur ? Dans quelle mesure les professeurs lisent-ils *Mathématique & Pédagogie* ? L'utilisent-ils dans la préparation ou la conception de leurs leçons ? Le niveau des articles est-il adapté ? Peut-on envisager des collaborations avec nos amis français, suisses ou luxembourgeois ? Quelle place peut-on accorder à l'enseignement primaire ?...

De nombreuses questions se posent, nous comptons sur votre aide pour y répondre.

Les publications de l'**A**ssociation des **P**rofesseurs de **M**athématiques de l'**E**nseignement **P**ublic (français) peuvent être obtenues par l'intermédiaire de la SBPMef : commandez-les à notre secrétariat

— Les brochures signalées par ∗ sont de publication récente.

— Le prix « *adhérent* » concerne l'APMEP **et la SBPMef**.

Nº	**TITRES DES BROCHURES** Prix, à droite, sans port. Port en plus : Cf. bas du tableau	Prix (€) public	 **adh**
∗ 168	*La place des maths vivantes dans l'éducation secondaire*, 336 pages. Des ateliers, des conférences, …	13	**9**
	◇ **FIN ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE OU COLLÈGE**		
∗ 169	*JEUX 7.* 172 pages. Des aides pédagogiques par jeu	14	**10**
144	*JEUX 6.* Même principe.	12	**8**
•	*JEUX 7 ; 6 ; 5 (nº 119), les trois ensemble*	30	**18**
	◇ **COLLÈGE**		
∗ 166	*MATH À CRÉDIT* : Publicités et pourcentages, …	10	**6**
∗ 165	*LA RÈGLE* (calcul algébrique) *DANS TOUS SES ÉTATS*	10	**6**
	◇ **COLLÈGE OU LYCÉE**		
151	*Les narrations de recherche*	13	**9**
∗ 253	*PANORAMATH 4.* Rallyes et autres compétitions…	10	**6**
•	*Ce Panoramath et les trois antérieurs, ensemble* :	38	**23**
	◇ **LYCÉES**		
∗ 171	*Olympiades académiques de Première 2005*	13	**9**
•	*Ce nº et ceux de 2004 ; 2003 ; 2002 ; 2001 ensemble*		**34**
∗ 156	*Les statistiques au lycée et un peu au-delà …*	13	**9**
150 154	*Pour un enseignement problématisé des mathématiques au lycée.* Deux tomes. 392 pages	21	**15**
	◇ **CONCOURS D'ENSEIGNEMENT MATHS** Agrégations, Capes et CAPLP —**externes & internes, sujets & corrigés**— par année. Les nºs de 2005, 2004, 2003, 2002, 2001, 2000, 1999 et 1998, chacun à 8 € en moyenne, *ENSEMBLE* :		**30**

DEMANDEZ à l'APMEP, 26 Rue Duméril, F – 75013 Paris, mèl : `apmep@apmep.asso.fr`, sa plaquette VISAGES, gratuite et franco de port, qui décrit les quelque 170 brochures proposées par l'APMEP.

PORT : Les frais de port depuis la France sont très élevés. Consultez l'APMEP pour les connaitre. Si vous n'êtes pas pressé, profitez des accords entre l'APMEP et la SBPMef pour commander via le secrétariat de celle-ci.

Correction d'erreurs et compression

INGRID DAUBECHIES
Princeton University

1. Comment se fait-il qu'un CD griffé puisse encore être joué sans problème ?

Sur un ordinateur ou sur un CD, l'information est enregistrée sous forme de zéros et de uns (voir figure 1). Si un CD est endommagé ou si la mémoire d'un ordinateur est atteinte par un rayonnement cosmique, ou s'il y a un disfonctionnement, alors des zéros peuvent être lus comme des uns, ou vice--versa. Comment pouvons-nous nous protéger de ceci ? Nous souhaitons

– Détecter des erreurs
– Corriger des erreurs

Commençons simplement. Imaginons que le signal soit

$$1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \dots$$

Après un événement qui altère les données il devient

$$1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad \underset{\equiv}{\underline{1}} \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \dots$$

Il est impossible de détecter l'erreur.

Adresse de l'auteur : Princeton University, Department of Mathematics and Program in Applied and Computational Mathematics, Fine Hall, Washington Road, Princeton, NJ 08544-1000, États-Unis d'Amérique
Ce texte a fait l'objet d'une conférence d'Ingrid Daubechies, organisée par l'UREM ULB le 5 mai 2006. Sa traduction de l'anglais est dûe à Charlotte Bouckaert, UREM ULB. Nous remercions également Philippe Cara pour sa contribution (description du « jeu divinatoire » et revision du texte).
Contact électronique : `charlotte.bouckaert@scarlet.be`

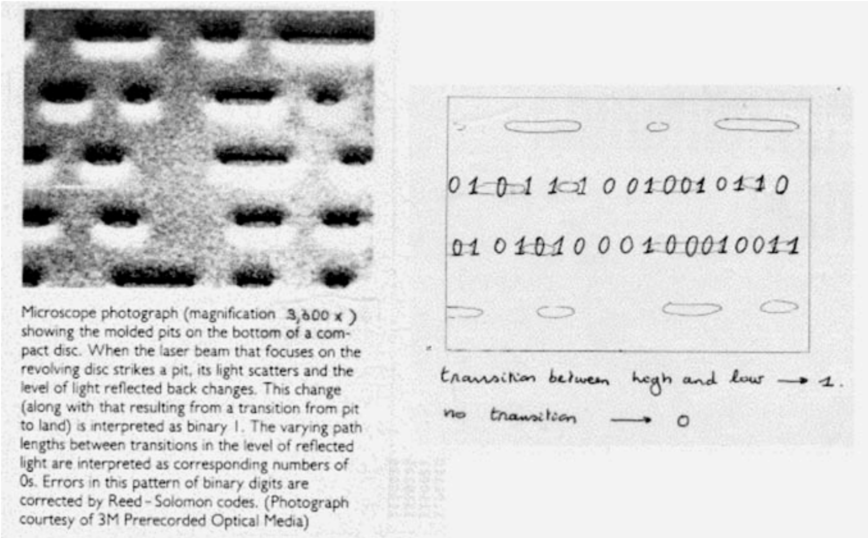


FIG. 1 – Comment les signaux sont enregistrés sur un CD

Si, au lieu d'enregistrer la suite d'origine, nous doublons chaque bit, alors nous enregistrons

$$11 \quad 00 \quad 11 \quad 11 \quad 00 \quad 11 \quad 00 \quad 00 \quad 11 \quad 11 \quad 00 \quad \ldots$$

Après altération, certains bits ont « basculé » :

$$11 \quad 0\underline{\underline{\underline{1}}} \quad 11 \quad 11 \quad 00 \quad 11 \quad 00 \quad 00 \quad 1\underline{\underline{\underline{0}}} \quad 11 \quad 00 \quad \ldots$$

Maintenant nous pouvons voir que des erreurs ont été commises. La chaîne devrait être formée de paires de 00 ou 11 (les deux *mots de code* autorisés), mais il y a d'autres paires qui se sont immiscées, indiquant par là que des erreurs ont été commises ; mais nous n'avons aucun moyen de corriger ces erreurs : la paire 01 peut aussi bien provenir de 00 dans laquelle le deuxième 0 a été basculé en 1 que de 11 dont le premier 1 a été basculé en 0.

Si nous répétons chaque chiffre, non pas une fois mais deux, alors on obtient

$$111 \quad 000 \quad 111 \quad 111 \quad 000 \quad 111 \quad 000 \quad 000 \quad 111 \quad 111 \quad 000 \quad \ldots$$

Après altération, la chaîne pourrait ressembler à

$$111 \quad \underline{\underline{1}}00 \quad 111 \quad 111 \quad 000 \quad 1\underline{\underline{0}}1 \quad 000 \quad 000 \quad 111 \quad \underline{\underline{0}}11 \quad 000 \quad \ldots$$

Maintenant voyons non seulement où les erreurs se sont produites mais nous pouvons les corriger.

- 100 est plus proche de 000 (1 bascule) que de 111 (2 bascules) ; ceci signifie qu'à moins d'avoir beaucoup de malchance 100 doit provenir de 000
- 101 doit provenir de 111
- 011 doit provenir de 111

Ainsi, en utilisant trois fois plus de mémoire, nous sommes capables de corriger les erreurs occasionnelles de bascule. Mais ceci demande une augmentation énorme de la capacité de mémoire. Serions-nous capables de concevoir une correction d'erreurs avec un schéma différent qui consommerait moins de mémoire ?

Nous pouvons, par exemple, remplacer chaque deux bits par une chaîne ou un mot de code, selon la règle suivante :

$$\begin{array}{lcl} 00 & \longrightarrow & 00001 \\ 01 & \longrightarrow & 01010 \\ 10 & \longrightarrow & 10100 \\ 11 & \longrightarrow & 11111. \end{array}$$

Le message d'origine

$$1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \ldots$$

devient

$$10100 \quad 11111 \quad 01010 \quad 00001 \quad 11111 \quad \ldots$$

Sommes-nous capables de corriger dans ce cas-ci ?

Pour nous assurer que nous sommes toujours capables de corriger les erreurs simples (un seul bit basculé) dans un mot de code, nous pouvons procéder de la manière suivante : dresser la liste des mots de code non altérés, pour chaque mot de code dresser la liste des altérations possibles lors de la bascule d'un seul bit dans le mot de code. Nous obtenons alors la table 1, où aucune chaîne de 5 bits ne se présente deux fois. Cela signifie que l'on peut retrouver le mot de code d'origine à partir de toute altération de 1 bit. Ce schéma est donc un code correcteur qui multiplie la mémoire nécessaire par un facteur 2,5, au lieu du facteur trois que nous

TAB. 1 – Table des erreurs sur 1 bit

Mot de code non codé	00001	01010	10100	11111
Altérations possibles sur 1 bit	10001	11010	00100	01111
	01001	00010	11100	10111
	00101	01110	10000	11011
	00011	01000	10110	11101
	00000	01011	10101	11110

avions précédemment et que nous sommes toujours capables de corriger les erreurs de bascule sur un seul bit. (Notons que nous devons supposer que les erreurs ne se produisent pas de manière trop rapprochée. Dans notre premier schéma, nous pouvions corriger les erreurs, pour autant qu'il y ait au plus une erreur dans chaque mot de code de 3 bits consécutifs. Dans le schéma que nous discutons maintenant, nous pouvons corriger les erreurs pour autant qu'il y ait au plus une erreur dans chaque mot de code de 5 bits consécutifs. De tels schémas ne sont utilisés que quand les erreurs se produisent avec une fréquence bien inférieure à celle-ci, comme dans le cas des perturbations de la mémoire d'un PC par les rayonnements cosmiques et donc ce n'est pas tellement important).

Nous pouvons aussi regarder le code correcteur que nous venons de construire de la manière suivante : deux mots de codes quelconques diffèrent au moins en trois positions.

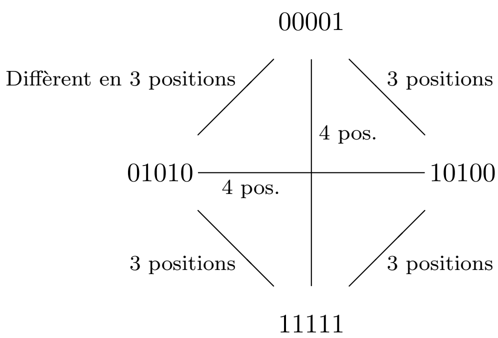


FIG. 2 – Les mots de code diffèrent en trois positions au moins

Comme les altérations des mots de code diffèrent de celui-ci en une seule position, cela signifie que les altérations de deux mots de code différents doivent être différentes, comme nous allons le montrer dans la démonstration suivante.

Les chaînes de 5 bits **mot-de-code1** et **altération1** ont au moins quatre bits identiques. Voir par exemple la figure 3.

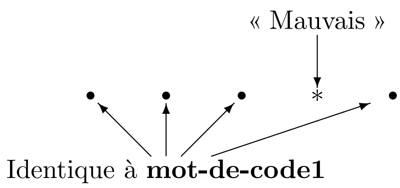


Fig. 3 – Un mot de code et une altération de celui-ci diffèrent d'une seule position (1)

Les chaînes de 5 bits **mot-de-code2** et **altération2** ont au moins quatre bits identiques. Voir par exemple la figure 4.

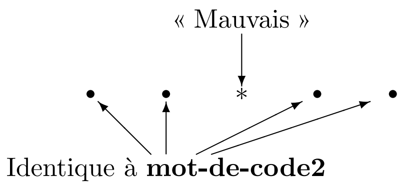


Fig. 4 – Un mot de code et une altération de celui-ci diffèrent d'une seule position (2)

Si deux altérations sont identiques, alors tous leurs bits sont identiques. Il y a donc trois bits identiques aux mêmes positions entre les chaînes mot--de-code1 et mot-de-code2 (dans l'exemple ci-dessus, les positions 1, 2 et 5). Il n'est donc pas possible que mot-de-code1 soit différent de mot-de-code2 puisque deux mots de code diffèrent en au moins trois positions.

Cependant, on n'utiliserait pas un tel code dans la pratique, parce qu'il gaspille de la place. Que voulons-nous dire par là ? Considérons la liste totale de tous les mots de code et de leurs altérations par bascule de un seul bit. Dans notre cas, cette liste comporte 24 entrées : il y a quatre mots de code de

5 bits et 5 altérations par mot de code, ce qui nous amène à $4 \times (1+5) = 24$. D'autre part, il y a $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ chaînes de 5 bits possibles. Notre liste de 24 mots de code et altérations n'utilise pas toutes les chaînes possibles. On pourrait utiliser les huit chaînes restantes pour les erreurs de bascule de 2 bits sur certains mots de code (par exemple, 00110 est une altération de 01010 par une bascule de 2 bits), mais ceci ne nous aide pas, puisque le code ne pourrait pas corriger toutes les erreurs de bascule de 2 bits (par exemple 11110 pourrait être une altération de 01010 par une bascule de 2 bits, mais aussi une altération de 11111 par une bascule de 1 bit).

Voyons maintenant si le code qui triple chaque bit gaspille de la place. L'encodage consiste en la correspondance

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow 000 \\ 1 &\longrightarrow 111. \end{aligned}$$

Dans ce cas, voici la liste des mots de code et de leurs altérations :

Tab. 2 – Table des erreurs sur 1 bit

Mot de code non codé	000	111
Altérations possibles sur 1 bit	001	110
	010	101
	100	011

Cette liste comporte huit entrées et elle épuise **toutes** les chaînes possibles de trois bits (le nombre total de possibilités est de $2^3 = 8$). Un code pour lequel la liste des mots de code et de leurs altérations utilise tout l'espace disponible est appelé un code « parfait ». L'exemple du code avec des mots de code de 5 bits dont nous avons discuté précédemment n'est pas un code parfait. Les codes parfaits ont une jolie interprétation géométrique. Considérons les mots de code à trois bits et leurs altérations et identifions chacun d'eux à un sommet d'un cube à trois dimensions (voir la figure 5).

Les deux mots de code sont les sommets 000 et 111 et leurs altérations reliées au mot de code forment une sorte de tripode (voir la figure 6). Ces deux tripodes se correspondent et recouvrent tous les sommets du cube.

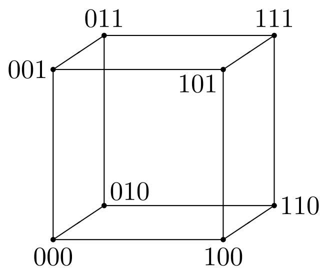


FIG. 5 – Les mots de code sur le cube

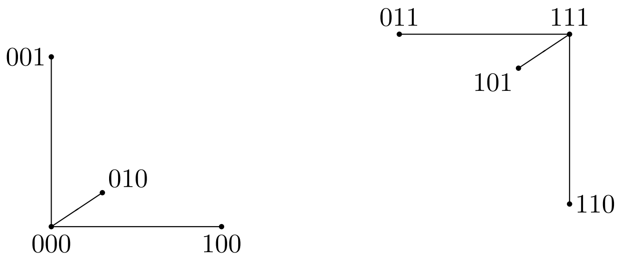


FIG. 6 – Les deux tripodes se correspondent

Pour le code à cinq bits que nous avons examiné, la représentation géométrique équivalente serait un cube à 5 dimensions (que nous ne pouvons pas dessiner). Chaque mot de code est au centre d'une étoile à 5 branches, mais les quatre étoiles ne recouvrent pas tous les sommets du cube. Nous ne pouvons pas dessiner ceci, mais nous pouvons donner la liste de tous les sommets et identifier les « étoiles à 5 branches » dans la table ci-dessous. Nous écrivons toutes les chaînes de 5 bits possibles en 6 colonnes, selon le nombre de 1 qu'elles comportent (première colonne : pas de 1, deuxième colonne : un seul 1, troisième colonne : deux 1, etc.). Nous entourons chaque mot de code avec un cadre différent (ovale, double ovale, rectangle en trait plein, rectangle en pointillés) et nous relions chaque mot de code à ses altérations dues aux erreurs de bascule de 1 bit. Nous encadrons les altérations avec un cadre de même type que celui du mot de code. Clairement, les étoiles à cinq branches ne se recouvrent pas, mais elles ne couvrent pas toute la table (voir figure 7).

Il y a huit groupes de cinq chiffres, c'est-à-dire huit sommets du cube à cinq dimensions qui ne sont pas couverts !

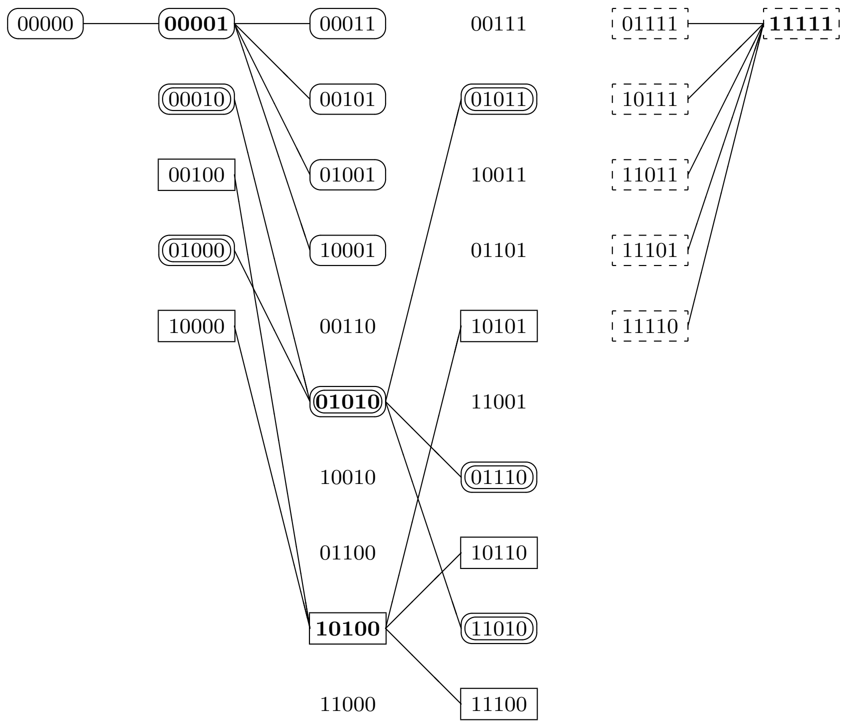


Fig. 7 – Les mots de code reliés à leurs altérations

Le code de Hamming est un code qui améliore cette situation. Ici la correspondance remplace des chaînes de quatre bits par des mots de code de sept bits.

Message		Mot de code
0000	$\longrightarrow$	0000000
0001	$\longrightarrow$	0001011
0010	$\longrightarrow$	0010111
0100	$\longrightarrow$	0100101
1000	$\longrightarrow$	1000110
1100	$\longrightarrow$	1100011
1010	$\longrightarrow$	1010001
1001	$\longrightarrow$	1001101
0110	$\longrightarrow$	0110010
0101	$\longrightarrow$	0101110
0011	$\longrightarrow$	0011100
1110	$\longrightarrow$	1110100
1101	$\longrightarrow$	1101000
1011	$\longrightarrow$	1011010
0111	$\longrightarrow$	0111001
1111	$\longrightarrow$	1111111

(Nous utilisons la même convention que dans « For All Practical Purposes » et dans la vidéo projetée en classe ([1]), où la règle pour construire des mots de code est expliquée à l'aide de diagrammes de Venn.)

À nouveau, tous les mots de code diffèrent en au moins trois positions et ce code permet de corriger les erreurs de bascule de un bit. Ce code « vit » maintenant en dimension sept et chaque étoile dont le centre est un mot de code, relié à ses sept altérations de un bit, comporte huit éléments. Nous avons 16 mots de code en tout et les étoiles occupent $16 \times 8 = 128$ sommets du cube de dimension sept. Ce cube a exactement 2^7 sommets. Les étoiles occupent tous les sommets du cube et le code de Hamming est donc un code **parfait**.

Il a d'autres jolies propriétés.

Dans le code de Hamming, il y a un moyen simple de calculer la correspondance entre une chaîne de quatre bits et le mot de code de sept bits. (Nous pourrions, bien entendu, regarder dans une table, mais c'est beaucoup plus simple si nous ne procédons pas de cette manière. Pour 16 mots

([1]) Voir le texte correspondant dans *MathAlive* de code, c'est encore faisable, mais pour des codes plus grands comme les codes de Reed-Solomon, qui ont 256 mots de code ou plus, ...)

Voici comment on calcule les mots de code de 7 bits correspondants aux chaînes de quatre bits $b_1b_2b_3b_4$:

$$b_1b_2b_3b_4 \longrightarrow b_1b_2b_3b_4(b_1 \oplus b_2 \oplus b_3)(b_1 \oplus b_3 \oplus b_4)(b_2 \oplus b_3 \oplus b_4)$$

(le symbole $\oplus$ indique l'addition de parité : $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$, $0 \oplus 1 = = 1 \oplus 0 = 1$). Ceci rend le code de Hamming linéaire : on obtient les mots de code à partir des données non codées grâce à un calcul linéaire simple. Cela signifie que pour chaque mot de code

$$b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5 \quad b_6 \quad b_7$$

les trois contraintes suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} b_1 \oplus b_2 \oplus b_3 \oplus b_5 &= 0 \\ b_1 \oplus b_3 \oplus b_4 \oplus b_6 &= 0 \\ b_2 \oplus b_3 \oplus b_4 \oplus b_7 &= 0. \end{aligned}$$

Ceci nous conduit à un algorithme de décodage très simple. Imaginons que

$$\tilde{b_1} \quad \tilde{b_2} \quad \tilde{b_3} \quad \tilde{b_4} \quad \tilde{b_5} \quad \tilde{b_6} \quad \tilde{b_7}$$

soit un mot qui aurait pu être altéré. Nous pouvons alors calculer les trois « contrôles de parité » :

$$\begin{aligned} p_1 &= \tilde{b_1} \oplus \tilde{b_2} \oplus \tilde{b_3} \oplus \tilde{b_5} \\ p_2 &= \tilde{b_1} \oplus \tilde{b_3} \oplus \tilde{b_4} \oplus \tilde{b_6} \\ p_3 &= \tilde{b_2} \oplus \tilde{b_3} \oplus \tilde{b_4} \oplus \tilde{b_7} \end{aligned}$$

Suivant les valeurs obtenues pour p_1, p_2, p_3, nous allons procéder différemment :

1. Si $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, alors la chaîne $\tilde{b_1}\tilde{b_2}\tilde{b_3}\tilde{b_4}\tilde{b_5}\tilde{b_6}\tilde{b_7}$ est correcte et l'on obtient la chaîne d'origine en laissant tomber $\tilde{b_5}\tilde{b_6}\tilde{b_7}$.
2. Si l'un des p_j est égal à 1, et que les deux autres sont égaux à 0, alors on cherche le $\tilde{b_l}$ qui intervient dans p_j et pas dans les deux autres et on le bascule de manière à obtenir le mot de code correct.

Exemple : $p_2 = 1$ et $p_1 = p_3 = 0$. Le seul $\tilde{b}$ qui intervienne dans p_2 et pas dans p_1 et p_3 est $\tilde{b_6}$. Donc, il faut basculer $\tilde{b_6}$ pour obtenir le mot de code correct. Ensuite, il suffit de laisser tomber $\tilde{b_5}\tilde{b_6}\tilde{b_7}$ pour retrouver la chaîne de quatre bits. (En réalité, on peut directement laisser tomber $\tilde{b_5}\tilde{b_6}\tilde{b_7}$, parce que le bit basculé est toujours $\tilde{b_5}$ ou $\tilde{b_6}$ ou $\tilde{b_7}$ qu'on devra de toute manière laisser tomber.)

3. Si un seul des p_j est égal à 0 et que les deux autres sont égaux à 1, alors on cherche le bit $\tilde{b}$ qui intervient dans les deux bits de parité incorrects et pas dans celui qui est correct, et on bascule ce bit.
   Exemple : $p_1 = p_2 = 1$ et $p_3 = 0$. Le seul $\tilde{b}$ commun à p_1 et p_2 et qui n'intervienne pas dans p_3 est $\tilde{b_1}$. On bascule donc $\tilde{b_1}$ pour obtenir le mot de code correct.
4. Si $p_1 = p_2 = p_3 = 1$, alors on bascule $\tilde{b_3}$.

Donc, corriger des erreurs est très simple.

Notons que dans ce code de Hamming, une chaîne de quatre bits est encodée par un mot de code de 7 bits. Ce code multiplie la quantité de mémoire nécessaire par $\frac{7}{4} = 1{,}75$. Dans l'exemple précédent, qui accolait aussi trois bits aux chaînes à encoder, et qui transformait les chaînes de 2 bits en chaînes de 5 bits, le facteur de multiplication de la mémoire était de 2,5. C'est vraiment un code qui gaspille.

Que se passerait-il si on accolait quatre bits ? Pouvons-nous construire un code parfait ? Quelle taille aurait-il ? Il y a en effet des codes de Hamming « plus grands », qui sont encore parfaits et accolent quatre bits pour faire les mots de codes, ou cinq bits (avec un code encore plus grand), etc. Nous n'en discuterons pas ici en détail. Mais nous pouvons facilement calculer combien de bits il y aura dans les mots de code et dans les chaînes non codées. Examinons le cas où nous accolons quatre bits à une chaîne non codée pour la transformer en mots de code. Imaginons que nous commencions par des chaînes de n bits. Il y a 2^n chaînes possibles et donc il nous faut 2^n mots de code. Les mots de code ont une longueur de $(n+4)$ bits (puisque nous accolons 4 bits) et ils « vivent » donc dans un espace dans lequel il y a 2^{n+4} chaînes possibles. Chaque mot de code est relié à ses altérations de un bit. L'ensemble forme une « étoile » qui comporte $1 + (n+4) = n+5$ éléments. Pour rendre le code parfait il faut que

$$\begin{array}{ccccc} (n+5) & \times & 2^n & = & 2^{n+4} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{taille de} & & \text{nombre de} & & \text{nombre total de chaînes} \\ \text{chaque étoile} & & \text{mots de code} & & \text{de longueur}(n+4) \end{array}$$

ou $(n+5) = 2^4$. Ceci est vérifié pour $n = 2^4 - 5 = 16 - 5 = 11$. Nous avons alors un code parfait qui remplace des chaînes de 11 bits par des mots de code de 15 bits et la quantité de mémoire nécessaire est multipliée par $\frac{15}{11} \approx 1{,}4$. Encore mieux ! Bien sûr, nous ne pouvons nous permettre qu'une seule erreur tous les 15 bits au lieu d'une tous les 7 bits comme précédemment.

À nouveau un joli code linéaire qui peut être facilement décodé. C'est le code de Hamming 11–15. On peut construire toute une hiérarchie de codes de Hamming de cette manière. Ils sont beaucoup utilisés pour protéger les données des ordinateurs.

Bien entendu, on peut aussi construire des codes qui peuvent corriger **deux** erreurs sur un mot de code. Dans ce cas, deux mots de code quelconques doivent être différents en **cinq** positions.

Les codes utilisés sur les CD

Beaucoup de codes correcteurs d'erreurs ont été développés après le travail de Hamming. Environ dix ans après, Irving Reed et Gus Solomon ont développé ce qui est maintenant connu comme les codes de Reed-Solomon, utilisés pour coder des CD et dans la transmission d'information venant de l'espace (comme les images de Voyager, par exemple).

L'essentiel dans les codes de Reed-Solomon, c'est l'usage d'un autre **alphabet**.

Dans les codes de Hamming, nous travaillons uniquement avec les symboles 0 et 1. Nous aurions pu tout aussi bien les écrire comme a et b, et dans ce cas une chaîne à encoder pourrait être :

$$abbababaabaabbbaabaababbbbab\ldots$$

Changeons maintenant de point de vue, et cessons de considérer les a et b pris isolément comme les briques avec lesquelles on construit une chaîne. Choisissons plutôt les quatre paires aa, ab, ba, bb. La chaîne devient

$$ab \quad ba \quad ba \quad ba \quad ab \quad aa \quad bb \quad ba \quad ab \quad aa \quad ba \quad bb \quad bb \quad ab\ldots$$

Nous choisissons maintenant de travailler avec un plus grand alphabet, en écrivant pour chaque paire A au lieu de aa, B au lieu de ab, C au lieu de ba et D au lieu de bb. La chaîne devient alors :

$$B \quad C \quad C \quad C \quad B \quad A \quad D \quad D \quad C \quad B \quad A \quad C \quad D \quad D \quad B\ldots$$

Si on prend des blocs de lettres plus longs (que deux caractères), on agrandit encore l'alphabet.

Ce qui rend le code de Hamming particulièrement élégant, c'est qu'on peut facilement calculer les mots de code à partir des chaînes non codées, grâce à des additions simples en utilisant l'opération d'« addition de parité », plus communément appelée le « ou exclusif » ou le « xor ». Pour que ces nouveaux codes soient faciles à utiliser, on emploie une opération analogue au xor pour calculer les mots de codes et la correction d'erreurs (au lieu de devoir regarder dans une gigantesque table). Nous travaillons dans une collection finie de symboles dans laquelle certaines opérations spéciales sont définies. Les mathématiciens appellent ceci un **corps fini**. (Nous avons déjà rencontré des exemples de corps finis, quand nous avons considéré l'arithmétique modulaire ([2]) — quand on travaille avec les nombres « modulo 7 », on a un alphabet de lettres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, et nous savons comment donner un sens aux opérations d'addition et de multiplication sur cet alphabet.)

En pratique, les codes de Reed-Solomon utilisent des corps finis de 256 éléments. C'est comme s'ils avaient un « alphabet » de 256 « lettres ».

Un code RS qui corrige **une** lettre incorrecte est équivalent à un code binaire qui corrige **huit** erreurs de bascule de bits, car on peut imaginer chaque lettre de l'alphabet de 256 lettres comme une chaîne de 8 bits. (Nous devons nuancer cette affirmation : dans la représentation binaire des mots de code RS, huit erreurs consécutives ne se produisent pas nécessairement sur les huit bits correspondant à *une* lettre du code RS. Elles pourraient correspondre à deux lettres adjacentes du code RS et chevaucher leurs deux représentations en 8 bits. Plus précisément, $8N$ erreurs binaires consécutives peuvent correspondre à $N + 1$ lettres consécutives incorrectes du code RS.)

Pour encoder le son sur un CD audio, on utilise plusieurs stratégies.

1. Le code RS utilisé permet de corriger jusqu'à 40 lettres consécutives erronées du code RS.

2. De plus, l'information est dispersée par entrecroisement. Supposons que la chaîne des mots codés soit

$$c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7c_8c_9c_{10}c_{11}c_{12}c_{13}c_{14}c_{15}c_{16}c_{17}c_{18}c_{19}\dots$$

([2]) Voir le texte correspondant dans *Math Alive*

Au lieu de les écrire dans l'ordre original, on entrecroise les mots de la manière suivante :

$$c_1c_{11}c_2c_{12}c_3c_{13}c_4c_{14}c_5c_{15}c_6c_{16}c_7c_{17}c_8c_{18}c_9c_{19}c_{10}\cdots$$

Si, dans le nouveau code, deux lettres consécutives sont mal lues, cela représente en réalité deux erreurs séparées par dix symboles dans la suite d'origine ! De même, quatre erreurs consécutives correspondent à deux blocs de deux erreurs consécutives dans la suite d'origine, séparés par 10 symboles consécutifs. Si l'on entrecroise encore plus, on peut réduire d'autant plus la longueur des blocs erronés.

Pour les applications CD, le facteur d'entrecroisement est de 5, et l'information est fortement dispersée. Il en découle que si vous faites N erreurs consécutives sur la représentation entrecroisée, en réalité vous avez fait des groupes d'erreurs de longueur $N/5$ séparés l'un de l'autre par 5 symboles dans la représentation d'origine.

3. Enfin, chaque lettre de l'alphabet RS n'est pas encodée sur 8 bits (ce qui correspond à 256 possibilités), mais sur 10 bits avec un petit code correcteur d'erreurs (avec un schéma différent) inséré à ce niveau individuel.

La rayure que nous avons faite en classe sur le CD mesurait environ 0,25 mm de large. Comme 0,01 mm correspond à 8 bits, nous avons détruit environ 200 bits consécutifs. En développant le code 8–10 « extérieur », cela signifie que nous avons détruit $160 = 8/10 \times 200$ bits dans le langage RS, ou 20 mots RS (puisque chaque mot RS occupe 8 bits). À cause de l'entrecroisement, ceci correspond à 5 groupes distants de 5 lettres et formés de 4 lettres RS consécutives. Ceci n'est rien pour le code correcteur RS qui a été conçu pour corriger des erreurs bien plus longues que celle-ci !

2. Détecter les erreurs dans les codes-barre, les numéros de ticket d'avion, et encore d'autres choses

Dans les applications que nous avons discutées jusqu'à présent (mémoire d'ordinateur, CD, transmission d'images depuis l'espace), nous nous occupions de messages extrêmement longs et nous voulions non seulement détecter des erreurs mais les corriger.

Voici maintenant un ensemble tout à fait différent d'applications, pour lesquelles on veut lire un numéro relativement court (mettons dix chiffres) et détecter s'il est correct ou non — en général, on ne se soucie pas de le corriger automatiquement. Si l'on détecte une erreur, on demande juste une confirmation (numéro de carte de crédit pour les commandes par téléphone) ou l'on a recours à une procédure manuelle basée sur d'autres informations (taper le code UPC à une caisse enregistreuse au supermarché, corriger le code postal ZIP basé sur l'adresse).

Pour beaucoup de ces applications, la capacité de détection de certaines erreurs est incluse dans le numéro lui-même. Examinons quelques-uns de ces schémas ainsi que leurs mérites respectifs.

2.1. Les Traveler's Checks

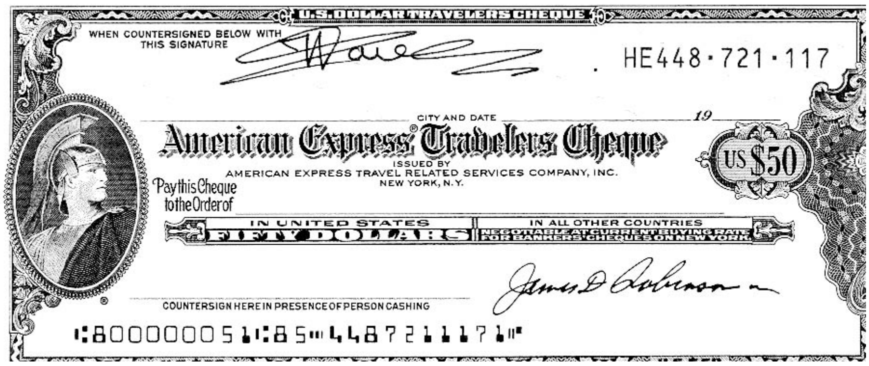


FIG. 8 – Les Traveler's Check d'American Express

Le numéro du chèque (voir figure 8) que l'on voit dans le coin supérieur droit 448721117 est repris au bas du chèque avec un numéro ID 4487211171 :

4487211171
↑
ce chiffre supplémentaire est un chiffre de contrôle

Quelle est la relation du chiffre de contrôle avec les autres chiffres ? Faites la somme de tous les autres chiffres et prenez le reste de la division de cette somme par 9 :

$$4 + 4 + 8 + 7 + 2 + 1 + 1 + 1 + 7 = 35 \equiv 8 \pmod 9.$$

Calculez ensuite $9 - 8 = 1$ (1 est le chiffre de contrôle). Ou, formulé autrement :

$$4 + 4 + 8 + 7 + 2 + 1 + 1 + 1 + 7 + 1 \equiv 0 \pmod 9.$$

La somme de tous les chiffres + chiffre de contrôle = multiple de 9.

Le chiffre de contrôle peut prendre les valeurs 0, 1, 2, ..., 8. Quelles erreurs pouvons-nous détecter ?
- Substitution de 0 par 9 et vice-versa, dans d'autres chiffres que le chiffre de contrôle : **NON**.
- Autres substitutions d'un seul chiffre par un autre : **OUI**.
- Inversion (c'est-à-dire, ...53... au lieu de ...35...) : **NON**.

La même méthode est utilisée pour les chèques de la US Postal Service.

2.2. Les tickets d'avion

Examinons maintenant le ticket d'avion (voir figure 9).

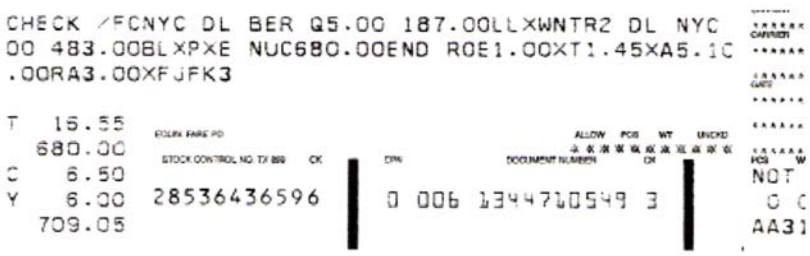


FIG. 9 – Ticket d'avion

N° de contrôle de stock Tx 889 CK
2853643659 6
↑
Le chiffre de contrôle est le reste de la division par 7 du nombre de dix chiffres

Le chiffre de contrôle peut prendre les valeurs 0, 1, ..., 6. Quelles erreurs peut-il détecter ?

- Les substitutions de 0 par 7 (et vice-versa), de 1 par 8 (et vice-versa), de 2 par 9 (et vice-versa) ne sont pas détectables sauf dans le chiffre de contrôle.
- Les autres substitutions sont détectables.
- Et les inversions ? Échangeons les 6[e] et 7[e] chiffres de notre exemple :

$$\begin{aligned}\text{correct :}\ & \dots 43 \dots C\\ \text{incorrect :}\ & \dots 34 \dots C\end{aligned}$$

  Le chiffre de contrôle permet-il de détecter cette erreur ? En d'autres termes, le chiffre de contrôle du deuxième nombre est-il égal à C ? Le premier nombre (sans le chiffre de contrôle) = (multiple de 7) + C. Le deuxième nombre (sans le chiffre de contrôle) = (premier nombre) − 9000 = (multiple de 7)+$C-1$ (parce que le reste de la division de 9000 par 7 est égal à 1 — ce nombre 9000 est la différence 43 ??? − 34 ???). Ceci signifie que le chiffre de contrôle doit être différent de C. Donc l'erreur est détectée. Cependant, toutes les inversions ne peuvent pas être détectées ; par exemple, si nous échangeons un 1 en 3[e] position et un 8 en 4[e] position :

$$\begin{aligned}\text{correct :}\ & \dots 18 \dots C\\ \text{incorrect :}\ & \dots 81 \dots C\end{aligned}$$

  Le premier nombre (sans le chiffre de contrôle) = (multiple de 7) + C. Le deuxième nombre (sans le chiffre de contrôle) = (premier nombre)+ + 63 000 000 = (multiple de 7) + C. Cette inversion n'est pas détectée, parce qu'elle n'affecte pas le reste de la division par 7 et le chiffre de contrôle reste le même.

Ce système est utilisé par FedEx, UPS, AVIS et les agences de location de voitures.

2.3. Le système bancaire américain

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 6 & 0 & 9\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & \text{chiffre de contrôle}\end{array}$$

Calculons

$$\begin{aligned} & 7a_1 + 3a_2 + 9a_3 + 7a_4 + 3a_5 + 9a_6 + 7a_7 + 3a_8\\ = \ & \ 0 + \ 6 + \ 9 + 14 + \ 0 + 18 + 42 + \ 0 \ = 89 \equiv 9 \pmod{10}.\end{aligned}$$

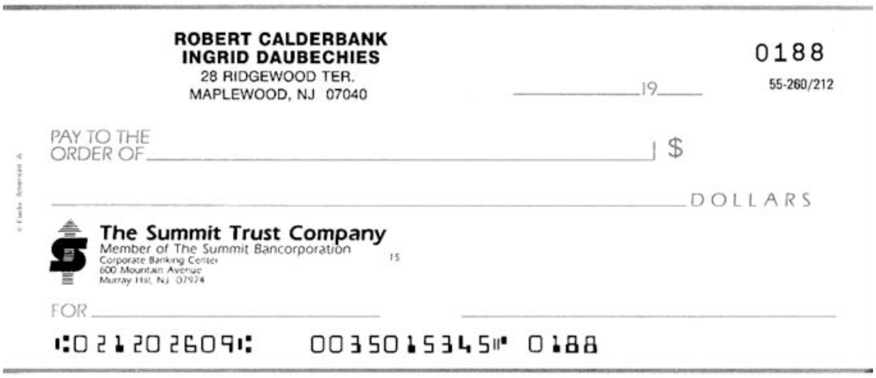


FIG. 10 – Chèque bancaire

Le chiffre de contrôle est donc 9.

Quelles erreurs peut-on détecter ?
– Erreurs d'un seul chiffre dans le chiffre de contrôle : toujours détectées.
– Erreurs d'un seul chiffre ailleurs ?
En première position :

$$\begin{array}{rccccccccc} \text{correct :} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & C \\ \text{incorrect :} & a_1' & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & C \end{array}$$

Alors $7a_1 + 3a_2 + 9a_3 + 7a_4 + 3a_5 + 9a_6 + 7a_7 + 3a_8 = (\text{multiple de } 10) + C$; $7a_1' + 3a_2 + 9a_3 + 7a_4 + 3a_5 + 9a_6 + 7a_7 + 3a_8 = (\text{multiple de } 10) + C + 7(a_1' - a_1)$. L'erreur passera inaperçue uniquement si $7(a_1' - a_1)$ est un multiple de 10. Mais $a_1' - a_1$ peut prendre les valeurs de -9 à 9 (à l'exception de 0, puisque $a_1' \neq a_1$, il y a eu une erreur). Quand on multiplie ces valeurs par 7, on obtient les nombres

$$-63, -56, -49, -42, -35, -28, -21, -14, -7, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63$$

Il n'y a pas un seul multiple de 10 ! Toutes les erreurs en première position sont détectées. Le même argument s'applique pour la quatrième ou la septième position.

Qu'en est-il des erreurs en deuxième position ?

$$\begin{array}{rccccccccc} \text{correct :} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & C \\ \text{incorrect :} & a_1 & a_2' & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & C \end{array}$$

$7a_1 + 3a_2 + 9a_3 + 7a_4 + 3a_5 + 9a_6 + 7a_7 + 3a_8 =$ (multiple de 10) $+ C$;
$7a_1 + 3a_2' + 9a_3 + 7a_4 + 3a_5 + 9a_6 + 7a_7 + 3a_8 =$ (multiple de 10) $+ C +$ $+ 3(a_2' - a_2)$. À nouveau, $a_2' - a_2$ peut prendre les valeurs de -9 à 9 (à l'exception de 0, puisque $a_2' \neq a_2$, il y a eu une erreur) et multiplier par 3 donne une collection de toutes les valeurs possibles de $3(a_2' - a_2)$, dont aucune n'est un multiple de 10. Toutes les erreurs en deuxième (cinquième et huitième) position sont détectées.

Le même argument vaut pour les erreurs en troisième et sixième positions. Cette fois, on travaille avec $9(a_3' - a_3)$. Multiplier $a_3' - a_3$ par 9 avec $a_3' - a_3 \neq 0$ et compris entre -9 et 9, ne donne jamais un multiple de 10. Toutes les erreurs en troisième et sixième position seront détectées.

Et les erreurs d'inversion ? Par exemple :

$$\begin{array}{rccccccccc} \text{correct :} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & C \\ \text{incorrect :} & a_2 & a_1 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & C \end{array}$$

$7a_1 + 3a_2 + 9a_3 + 7a_4 + 3a_5 + 9a_6 + 7a_7 + 3a_8 =$ (multiple de 10) $+ C$;
$7a_2 + 3a_1 + 9a_3 + 7a_4 + 3a_5 + 9a_6 + 7a_7 + 3a_8 =$ (multiple de 10) $+ C +$ $+4(a_2 - a_1)$. Cette erreur **ne sera pas détectée** si $4(a_2 - a_1)$ est un multiple de 10. C'est le cas pour $a_2 - a_1 = 5$ ou -5. Ce sont les deux seuls cas. Exemples :

$$a_1 = 2 \quad a_2 = 7$$

ou

$$a_1 = 9 \quad a_2 = 4.$$

Et les erreurs d'inversion des autres chiffres consécutifs ?

$$\ldots a_2 a_3 \ldots\ldots$$

$$\ldots a_3 a_2 \ldots\ldots$$

n'est pas détectable si

$$3a_2 + 9a_3 - 3a_3 - 9a_2 = 6(a_3 - a_2)$$

est un multiple de 10. À nouveau, quand $a_3 - a_2 = 5$ ou -5.

L'inversion des troisième et quatrième chiffres

$$\ldots a_3 a_4 \ldots\ldots$$

$$\ldots a_4 a_3 \ldots\ldots$$

sera indétectable si

$$9a_3 + 7a_4 - 9a_4 - 7a_3 = 2(a_3 - a_2)$$

est un multiple de 10. À nouveau, lorsque $a_3 - a_4 = 5$ ou -5.

$$\left.\begin{array}{l} 7-3=4 \\ 3-9=-6 \\ 9-7=2 \end{array}\right\} \text{ ont le facteur 2 commun avec 10, base de l'arithmétique modulaire.}$$

$\uparrow$
Différence entre les poids consécutifs

Remarque : nous pouvons analyser le schéma du ticket d'avion de la même manière. Après tout diviser 6 483 839 228 par 7 revient à diviser

$$6 \times 1\,000\,000\,000 + 4 \times 100\,000\,000 + 8 \times 10\,000\,000 + 3 \times 1\,000\,000$$
$$+8 \times 100\,000 + 3 \times 10\,000 + 9 \times 1000 + 3 \times 100 + 2 \times 10 + 8$$

par 7. Puisque

$$\begin{array}{rcl} 10 & = & \text{multiple de } 7 + \underline{3} \\ 100 & = & \text{multiple de } 7 + \underline{2} \\ 1000 & = & \text{multiple de } 7 + \underline{6} \\ 10\,000 & = & \text{multiple de } 7 + \underline{4} \\ 100\,000 & = & \text{multiple de } 7 + \underline{5} \\ 1\,000\,000 & = & \text{multiple de } 7 + \underline{1} \\ 10\,000\,000 & = & \text{multiple de } 7 + \underline{3} \\ 100\,000\,000 & = & \text{multiple de } 7 + \underline{2} \\ 1\,000\,000\,000 & = & \text{multiple de } 7 + \underline{6} \end{array}$$

Cela signifie que nous aurions pu regarder le reste modulo 7 comme la combinaison

$$6 \times \underline{6} + 4 \times \underline{2} + 8 \times \underline{3} + 3 \times \underline{1} + 8 \times \underline{5} + 3 \times \underline{4} + 9 \times \underline{6} + 3 \times \underline{2} + 2 \times \underline{3} + 8 \times \underline{1}$$

Plus généralement, si le nombre est

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10},$$

alors le chiffre de contrôle modulo 7 est égal à la combinaison

$$6a_1 + 2a_2 + 3a_3 + a_4 + 5a_5 + 4a_6 + 6a_7 + 2a_8 + 3a_9 + a_{10}.$$

Procédons maintenant de la même manière pour voir si un chiffre erroné en sixième position, par exemple, est détectable.

$$\begin{array}{c} \ldots\ldots a_6 \ldots \\ \ldots\ldots a'_6 \ldots \end{array}$$

donne le même chiffre de contrôle si $4(a'_6 - a_6)$ est un multiple de 7. Ici, 4 n'a pas de facteur commun avec 7, ce qui nous arrange, mais $a'_6 - a_6$ peut prendre les valeurs de -9 à 9 (à l'exception de 0) et donc $a'_6 - a_6 = 7$ ou -7 sont des valeurs possibles... L'erreur est indétectable si nous substituons 0 pour 7 (et vice-versa), 1 pour 8 (et vice-versa), 2 pour 9 (et vice-versa).

2.4. Le système UPC

(Les codes-barres sur les produits alimentaires) Notre étude du code barres UPC comporte deux parties :
- La lecture du code
- Le chiffre de contrôle

Le code barres est une manière d'imprimer une représentation binaire des nombres grâce à des lignes épaisses ou minces et à des espaces étroits ou larges. Dans cette représentation, chaque chiffre décimal est encodé par 7 chiffres binaires. Voici comment nous devons lire le code barres :
- Fine ligne noire = 1
- Ligne noire épaisse = 11
- Ligne noire plus épaisse = 111
- Ligne noire très épaisse = 1111
- Espace étroit =0
- Espace large = 00
- Espace plus large =000
- Espace très large = 0000

0 48500 00139

Fig. 11 – Code UPC

Décodons l'exemple de la figure 11. Le code pour lire ceci en chiffres déci-

	Côté gauche		Côté droit	
||	0001101 0100011 0110111 0110001 0001101 0001101	||	1110010 1110010 1100110 1000010 1110100 1011100	||
↑		↑		↑
Séparateur		Séparateur		Séparateur

FIG. 12 – Lecture du code UPC

maux est le suivant :

	gauche	droite
0	0001101	1110010
1	0011001	1100110
2	0010011	1101100
3	0111101	1000010
4	0100011	1011100
5	0110001	1001110
6	0101111	1010000
7	0111011	1000100
8	0110111	1001000
9	0001011	1110100

(Ceci n'est pas le codage binaire des chiffres décimaux. Les groupes de zéros et de uns sont choisis de manière à donner au code des propriétés très spéciales. Voir plus loin.)

Dans l'exemple ci-dessus, nous avons 0 48500 00139 4. Le nombre encodé dans le code barres UPC comporte $6+6$ chiffres ou plutôt

1	+	5	+	5	+	1	chiffres.
↑		↑		↑		↑	
identifie le genre de produit		code du fabricant		code du produit		chiffre de contrôle	

Le chiffre de contrôle n'est pas toujours imprimé en chiffres décimaux, mais il est toujours présent dans le code barres.

Remarque :

- À gauche, chaque groupe de 7 zéros et uns comporte toujours un nombre **impair** de uns. À droite, chaque groupe de 7 zéros et uns comporte toujours un nombre **pair** de uns. La lecture automatique peut décider quand elle lit les choses à l'envers !
- À gauche : début = 0, fin = 1, pour tous les groupes. À droite : début = 1, fin = 0, pour tous les groupes (de manière à séparer les choses joliment).

Le chiffre de contrôle
Prenons les 11 premiers chiffres $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}$ et calculons

$$3a_1 + a_2 + 3a_3 + a_4 + 3a_5 + a_6 + 3a_7 + a_8 + 3a_9 + a_{10} + 3a_{11} \equiv A \pmod{10}\ ;$$

alors le chiffre de contrôle C ou a_{12} est $a_{12} = C = 10 - A \pmod{10}$. Dans notre exemple,

$$3a_1 + a_2 + 3a_3 + a_4 + 3a_5 + a_6 + 3a_7 + a_8 + 3a_9 + a_{10} + 3a_{11} = \\ = 4 + 24 + 5 + 3 + 3 + 27 = 66,$$

donc $A = 6$ et $a_{12} = C = 4$.

2.5. L'ISBN (International Standard Book Number)

L'ISBN est le plus intelligent de ces codes de détection d'erreurs. Il détecte toutes les erreurs simples et toutes les inversions.

Tout numéro ISBN a la forme suivante :

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9\underset{\substack{\uparrow \\ C}}{a_{10}}$$

Comment peut-on trouver C à partir de $a_1 \dots a_9$? On calcule

$$10a_1 + 9a_2 + 8a_3 + 7a_4 + 6a_5 + 5a_6 + 4a_7 + 3a_8 + 2a_9 \equiv A \pmod{11}\ ;$$

alors $a_{10} = C = 11 - A \pmod{11}$.

Exemple : 0-7167-2378-6

$$10 \times 0 + 9 \times 7 + 8 \times 1 + 7 \times 6 + 6 \times 7 + 5 \times 2 + 4 \times 3 + 3 \times 7 + 2 \times 8 = 214\ ;$$

$A = 5$, $a_{10} = 6$: OK !

Comme 11 est premier et que tous les poids (10, 9, 8, …, 2) sont donc premiers avec 11, ceci détecte toutes les erreurs simples.

Et la détection des transpositions ? La différence de deux poids consécutifs est toujours égale à 1. Ne pas détecter une transposition entre les n^{e} et $(n+1)^{\text{e}}$ positions demande que $a_n - a_{n+1}$ soit un multiple de 11, ce qui est impossible. Donc toutes les transpositions sont détectées.

Seul inconvénient : parfois $a_{10} = 10$; dans ce cas, on le remplace par « X ».
Exemple : 0-273-00218-X.

2.6. Un autre code barres : le code postal ZIP aux USA

Il s'agit du code qu'on trouve sur beaucoup d'enveloppes de mailing (coupons réponse, par exemple voir figure 13). Chaque nombre ZIP+4 est représenté par $1 + 10 \times 5 + 1 = 52$ barres longues et courtes au bas de la lettre. (Voir par exemple la figure 13.)

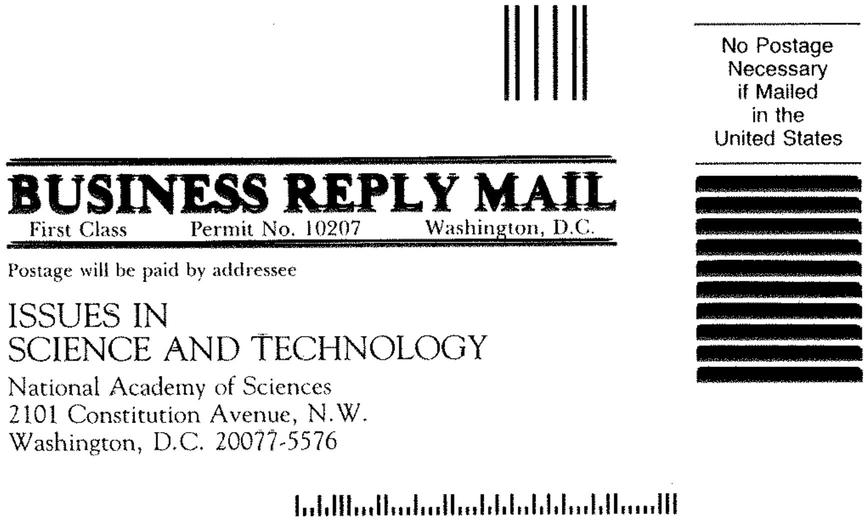


FIG. 13 – Code ZIP

Le dictionnaire pour lire ce code est le suivant :
- Les longues barres du début et de la fin sont juste des barres de garde.
- Chaque groupe de cinq barres encode un chiffre selon la correspondance suivante :

Le nombre ci-dessus est donc 2007755761. Il correspond au code ZIP+4 20077-5576. Le chiffre 1 à la fin est le chiffre de contrôle. Comment le construit-on ?

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{chiffre de contrôle}}}{a_{10}}$$

La somme $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$ doit être un multiple de 10.

Decimal Digit	Bar Code	Binary Code
1		00011
2		00101
3		00110
4		01001
5		01010
6		01100
7		10001
8		10010
9		10100
0		11000

The Postnet bar code

FIG. 14 – Code ZIP

Dans l'exemple :

$$\underbrace{2+7+7+5+5+7+6+6}_{\text{total=39}}+1 \longrightarrow 40 \quad \text{OK!}$$

De plus, nous pouvons aussi corriger certaines erreurs ! Chaque groupe de cinq barres doit comporter **exactement** deux barres longues et trois courtes. Une erreur de lecture se produit quand une barre courte est prise pour une longue et vice-versa. Nous savons donc non seulement qu'il y a une erreur, mais nous savons aussi **où** elle s'est produite ! (Nous avons un test de parité pour chaque groupe de cinq barres représentant un chiffre. Rappelez--vous les tests de parité des codes précédents !) Nous pouvons utiliser le chiffre de contrôle pour corriger l'erreur. (Voir par exemple la figure 15.)

FIG. 15 – Code ZIP

Ici, un groupe de cinq barres est formé de quatre barres courtes et d'une longue. Nous pouvons lire les autres chiffres et nous obtenons

2007?5671

On peut facilement retrouver le chiffre ? :

$$\underbrace{2+0+0+7+5+7+6+1}_{\text{total}=33}+?$$

Ce total doit être divisible par 10. Donc ? = 7.

Des codes barres plus récents utilisent 12 chiffres :

$$\underbrace{\text{ZIP}+4}_{\text{total}=9}+\text{ les deux derniers chiffres de l'adresse}+\text{chiffre de contrôle.}$$

À nouveau la somme de tous les chiffres doit être divisible par 10. Un exemple est illustré par la figure 16.

FIG. 16 – Code ZIP

Annexe : Le jeu de Hamming ([3])

Beaucoup de jeux consistent à deviner un nombre secret auquel pense une personne.

D'une façon ou d'une autre, on pose des questions à la personne dont les réponses permettent de déterminer le nombre secret. S'il s'agit par exemple d'un nombre de 1 à $16 = 2^4$, la notation binaire permet de facilement déterminer le nombre secret à l'aide de questions du genre « Le nombre secret est-il pair ? », « Si l'on soustrait un du nombre, devient-il divisible par 4 ? », ...

Cette technique permet, en quatre questions bien choisies, de déterminer les quatre bits du nombre secret.

Bien sûr, on doit être certain que les réponses soient bien correctes. Si la personne se trompe ou ment, le nombre ne sera pas deviné. Le jeu que nous allons décrire est basé sur le code correcteur de Hamming et nous permet

([3]) Nous remercions Philippe Cara, qui a rédigé cette partie en complément du texte d'Ingrid Daubechies.

de deviner le nombre secret en sept questions, même si une des réponses est fausse.

Instructions
À la fin de ce texte vous trouverez 14 rectangles groupés en 7 paires. Chaque paire (= 2 rectangles l'un à côté de l'autre) représente les faces avant et arrière d'une carte. Photocopiez la page de rectangles (en agrandissant peut--être un peu), découpez les rectangles et collez-les dos à dos par paires afin de vous confectionner un jeu de 7 cartes. Vous êtes maintenant prêts pour le jeu.

Comment jouer ?
Demandez à quelqu'un de penser à un nombre de 1 à 16. Vous allez maintenant lui montrer, une par une, les sept cartes. Pour chaque carte la question est la même : « Est-ce que le nombre secret figure sur la face de la carte que je vous montre ? ». La réponse ne peut être que « oui » ou « non » mais vous pouvez dire à votre adversaire qu'il a le droit de mentir une fois (et pas plus) s'il le souhaite. Si la réponse est négative vous retournez la carte et la déposez sur la table avant de passer à la carte suivante. En cas de réponse positive il n'est pas nécessaire de retourner la carte. À la fin, vous avez sept cartes sur table et le nombre secret apparaît sur la face supérieure d'au moins six de ces cartes. Vous êtes maintenant en mesure de déterminer le nombre secret, même si votre adversaire vous a menti une fois. Veillez bien à ne plus retourner les cartes dans ce qui suit !

Comment retrouver le nombre secret ?

1. Orientez les cartes sur la table de façon à ce que les nombres soient tous bien lisibles (pas de carte « la tête en bas »). Faites un petit paquet en mettant les cartes les unes sur les autres (en faisant attention de ne pas les retourner !).
2. Décalez maintenant un peu les cartes de manière à révéler le bord supérieur de chacune d'elles (Fig. 17).
3. Les bords supérieurs montrent de petits rectangles noirs ou blancs. Ils apparaissent en trois groupes : à gauche, à droite et au milieu. Dans ces trois groupes le nombre de rectangles noirs devrait être pair. Si ceci est correct, votre opposant ne vous a pas menti. Dans le cas contraire, vous devez localiser les groupes pour lesquels le nombre de rectangles noirs est impair. Il y a exactement une carte qui n'a de rectangles que dans ces groupes (il y a trois cartes avec un rectangle, trois avec deux rectangles et une seule avec trois rectangles). C'est celle-ci qu'il faut retourner ! Maintenant tout est correct car l'autre côté de la carte a les

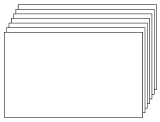


Fig. 17 – Premier décalage

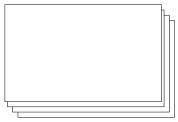


Fig. 18 – Second décalage

rectangles à la même place mais dans la couleur opposée. Le mensonge est maintenant corrigé.

4. Il faut maintenant mettre trois cartes de côté pour ne continuer qu'avec celles qui ont des cercles noirs sur le coin inférieur gauche. Faites bien attention à ne plus retourner les cartes ! Superposez-les dans l'ordre donné par les cercles : celle avec un cercle au-dessus, puis celle avec deux cercles, etc.
5. Décalez à nouveau ces quatre cartes, mais de façon à révéler, cette fois-ci, les bords inférieurs (Fig. 18).
6. Vous verrez apparaître de petits rectangles blancs et noirs. Ils déterminent le nombre secret en écriture binaire ! Sur la figure 19, vous voyez par exemple `noir-blanc-noir-noir` qui correspond à 1011. Donc le nombre secret est « onze ». Attention : il faut interpréter 0000 comme « seize » et pas comme « zéro ».

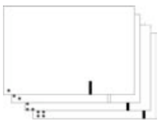


Fig. 19 – Lecture du résultat

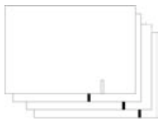


Fig. 20 – Autre lecture possible

Comment ça marche ?

Réfléchissez-y vous-mêmes... Ce jeu est basé sur le code 7–4 de Hamming. C'est un code correcteur qui permet de corriger une erreur (ou un mensonge) sur 7 bits et donne la possibilité de transmettre un message de 4 bits sans que l'erreur ait une influence. Les quatre cartes avec les cercles donnent le message qui est ici le nombre secret. Comment quatre cartes peuvent-elles donner le nombre secret en écriture binaire ? Regardez bien les nombres qui figurent sur les deux faces de ces cartes... Les autres cartes donnent les bits supplémentaires qui permettent la correction d'un mensonge.

Une fois que vous aurez bien compris le jeu, vous pourrez peut-être aussi imaginer une version utilisant le code 15–11 de Hamming qui ajoute 4 bits à un nombre secret de 11 bits pour protéger l'information secrète contre un mensonge.

Les codes de Hamming sont utilisés dans tout ordinateur, pour corriger les erreurs qui proviennent de bascules accidentelles dans la mémoire RAM, suite au rayonnement cosmique par exemple. Sans ces codes votre ordinateur ne fonctionnerait même pas une semaine avant de perdre complètement la mémoire. . .

Remarques :
Vous pourriez aussi ne pas tenir compte de l'ordre donné par les cercles dans le point 4 ci-dessus. Les petits rectangles sont décalés de manière à ce que si la lecture du point 6 est faite « de gauche à droite » on trouve aussi le bon résultat. La figure 20 montre par exemple (lu de gauche à droite) `noir-blanc-noir-noir`, donc « onze ».

Les rectangles sur le bord supérieur des cartes donnent aussi un code binaire qui numérote les cartes de 1 à 7. Si dans le point 3 ci-dessus vous notez un « 1 » pour les groupes dans lequels le nombre de rectangles noirs est impair et « 0 » pour les autres, vous obtenez, en binaire, le numéro de la carte à retourner.

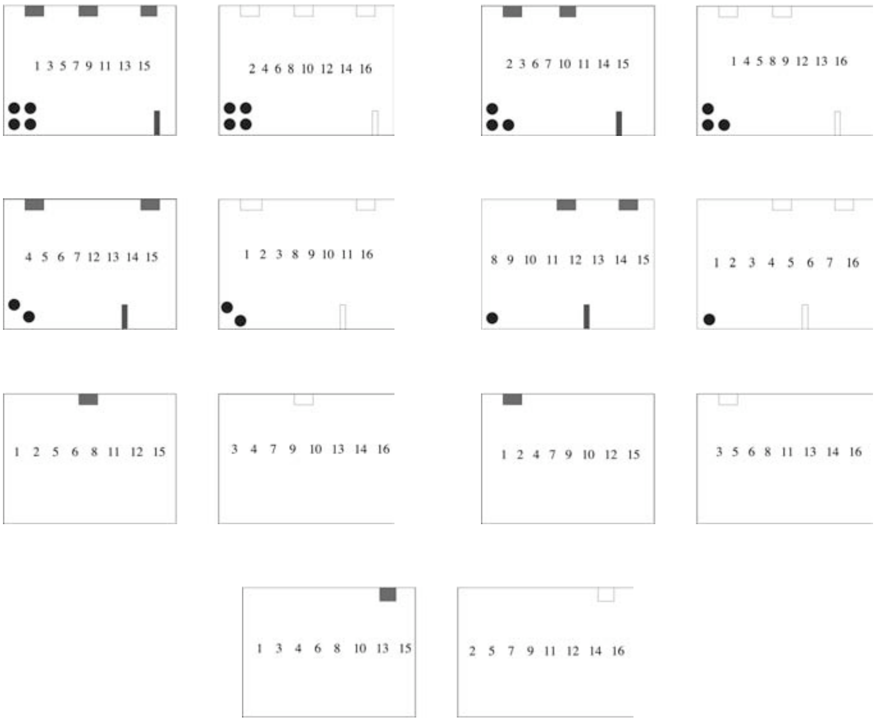


Fig. 21 – Les sept paires de cartes

Quelques raisons didactiques d'une analyse des procédures d'élèves par l'enseignant

CHANTAL TIÈCHE CHRISTINAT, MICHÈLE VERNEX
IRDP, Neuchâtel & École du Bosson, Genève (Suisse)

Introduction

L'école actuelle fait le pari d'un enseignement fondé sur la résolution de problèmes afin non seulement de vérifier la transférabilité des savoirs et savoirs-faire construits et transmis par l'enseignant, mais également afin de construire de nouvelles connaissances et de nouveaux savoirs. Si la résolution de problèmes n'est pas récente dans l'histoire de l'enseignement, son rôle s'est modifié et sa présence est notoire dès les premiers degrés de l'école élémentaire. Les auteurs d'ERMEL ([6], [7] et [8]), mais également Sacré et Stegen ([13]), ainsi que les différents auteurs des moyens romands d'enseignement des mathématiques (1997, 1998, 1999, 2000), pour n'en citer que quelques-uns, ont lié les apprentissages des élèves à la résolution de situations-problèmes ou de problèmes ouverts. Les caractéristiques de ces derniers vont ainsi être la mesure de l'engagement cognitif de l'élève et des savoirs et connaissances visés par leur résolution. Conçue comme clé pour l'apprentissage, la résolution de problèmes s'insère dans une situation didactique et s'ancre dans un contrat qui lie l'enseignant et l'élève. Du côté de l'enseignant, ce contrat essentiel prend entre autres caractéristiques, celles de ne pas laisser l'élève aller à l'échec, voire au non-engagement dans

Adresses des auteurs : Chantal Tièche Christinat, Chemin de la Mine 16, CH - 1163 Étoy ; courriel : `chantal.tieche@edu-vd.ch`. Michèle Vernex, Chemin du Pré de Lug 8, CH - 1258 Perly-Certoux ; `michele.vernex@bluewin.ch`.

la résolution, d'orienter la résolution vers le savoir visé afin d'assurer une convergence entre l'objectif visé par la tâche et la résolution effective. À cette fin, le maître accorde aux procédures des élèves une attention particulière et oriente ses gestes professionnels en fonction de leur spécificité. La progression de l'étude ainsi que l'avancée du temps didactique font ainsi l'objet d'une préoccupation constante de l'enseignant et constitue le noyau de l'observation que nous présentons ci-dessous.

À partir des différentes démarches de résolutions adoptées par les élèves dans des problèmes extraits du Rallye Mathématique Transalpin et de la description de l'ajustement de l'enseignant à celles-ci, nous dégageons quelques pistes de réflexion quant à la nécessité d'analyser les procédures et aux conditions favorables qu'une telle analyse suppose. Deux leçons de mathématique menées avec des élèves des 5e et 6e degrés primaires ([1]) ont fait l'objet d'une observation directe au moyen d'un journal de bord, d'une discussion et d'une analyse *a posteriori* concertée entre enseignante et chercheure portant sur les séquences didactiques effectives.

1. Objectifs et finalités des deux séquences

Chaque séquence proposée comporte une situation problème particulière qui relève du domaine numérique. Le premier problème, *L'Énigme de Merlin l'Enchanteur* porte sur la décomposition du nombre, tandis que le second *L'Album de photos* est un problème multiplicatif (voir [12]). Toutefois, les objets mathématiques que les problèmes abordent ne constituent pas l'unique critère de choix, même si leur diversité apparaît comme un atout pour l'enseignante. Les deux situations sont clairement sélectionnées en fonction du potentiel d'apprentissage et de construction de connaissances nouvelles que leur confère l'enseignante, de la nécessaire mobilisation de connaissances anciennes et de leur insertion dans un problème nouveau, sans que ce dernier puisse être vu comme problème de réinvestissement. En particulier, la confrontation des diverses procédures de résolution et des résultats qui constituent la modalité de travail choisie pour toutes les activités semble être favorisée par le contenu des situations-problèmes proposées. En effet, ces deux séquences didactiques ont pour but premier de confronter les élèves à une situation problème, de leur faire trouver une so-

([1]) Les 5e et 6e degrés primaires à Genève se composent d'une cohorte d'élèves âgés de 10 à 12 ans.

lution et d'exiger l'écriture d'une réponse avec justification de la pertinence du résultat trouvé.

Durant cet enseignement, l'enseignante adopte une même ligne pédagogique. Tous les problèmes sont proposés à des groupes de deux ou trois élèves afin de favoriser la prise en charge du problème et stimuler les échanges. La composition du groupe est faite de façon à avantager la discussion d'égal à égal et d'éviter l'emprise de l'élève réputé « bon en math ». Après constitution de groupes homogènes, les élèves reçoivent la consigne, puis durant les dix premières minutes l'enseignante n'intervient pas afin de laisser les élèves entrer dans le problème et esquisser un début de résolution.

2. L'Énigme de Merlin l'Enchanteur

L'Énigme de Merlin l'Enchanteur RMT© (Cat. 4, 5, 6)

Merlin l'enchanteur désire mettre à l'épreuve les compétences mathématiques du petit Semola, le futur roi Arthur. Il lui propose l'énigme suivante :
Le serrurier de notre village a trois fils. Lorsqu'on additionne les trois âges de ces fils on obtient 13*, mais lorsqu'on les multiplie, on obtient* 36*. Le plus âgé des fils aide déjà son père à l'atelier. Quel est l'âge de chacun des fils du serrurier ?*
Après avoir bien réfléchi, Semola donne sa réponse. Merlin l'enchanteur est très satisfait. Semola a vraiment la bonne solution !
Résolvez vous aussi l'énigme de Merlin et justifiez votre raisonnement.

2.1. Analyse *a priori* et buts de l'enseignante

Cette activité proposée à des élèves de 6 P est choisie pour sa « facilité » de résolution. La décomposition de deux nombres, le premier en une somme de facteurs, le second en un produit de facteurs est un thème bien étudié dans les programmes de 5 P et 6 P de Suisse Romande ([2] et [3]). Plus précisément le problème nécessite la prise en compte de deux contraintes : la somme de trois nombres valant 13 et le produit de ces trois nombres valant 36. Des essais successifs et aléatoires tenant compte d'une ou des deux contraintes peuvent permettre aux élèves de venir à bout de cette tâche. De fait, l'intérêt du problème se situe sur d'autres aspects que les aspects proprement numériques et opératoires. En effet, cette activité permet également d'engendrer une rupture du contrat didactique habituel de la classe. En effet, les élèves ont pour habitude d'une part de prendre en compte essentiellement les aspects numériques des problèmes, sans accorder une signification contextuelle aux solutions numériques trouvées et d'autre part, de trouver une seule et unique solution. Or l'*Énigme de Merlin l'Enchanteur* offre l'avantage d'avoir deux solutions numériquement possibles, solutions que les élèves sont supposés pouvoir trouver, mais dont une seule est correcte. Confronter les deux solutions trouvées pourrait ainsi permettre à l'enseignante de travailler le sens des réponses et la prise en compte de tous les indices pertinents donnés dans le texte du problème. De plus, cette tâche légitime également l'expérimentation d'une première systématique de recherche, sans pour autant perdre les élèves dans de trop nombreuses possibilités.

2.2. Reflets du travail didactique

L'observation du travail en classe pointe parmi d'autres événements plus spécifiques au groupe, deux événements critiques majeurs qui ont orienté l'action de l'enseignante. L'absence, voire la difficulté récurrente de justifier la solution obtenue est très rapidement relevée. En effet, dans tous les groupes, l'enseignante est intervenue systématiquement afin de souligner la nécessité incontournable de la justification pour s'assurer de l'obtention d'un résultat correct. Un examen des procédures des élèves montre que seule une partie de la tâche (soit la décomposition de 13 en une somme de nombres, soit celle de 36 en un produit de facteurs) est prise en compte. Agissant de la sorte, les élèves ne peuvent aboutir à une solution satisfaisante. Par ailleurs, la difficulté d'écrire une réponse identifiable par l'enseignante constitue, elle aussi, un élément-phare qui oriente le travail didactique en classe. Hormis ces deux exigences - produire une justification et écrire une réponse - qui constituent deux aspects du travail didactique général adressé indifféremment à tous les groupes d'élèves, l'enseignante opère des gestes didactiques spécifiques aux procédures de résolution adoptées par les différents groupes, et dont nous décrivons ci-dessous brièvement la teneur.

1. Le groupe Diane et Cléa a résolu l'*Énigme de Merlin l'Enchanteur* par tâtonnement, procédant d'abord par décomposition additive du nombre 13 puis multipliant les nombres obtenus afin d'atteindre 36. Toutefois, les liens entre la décomposition du nombre 13 et la multipli-

cation des nombres ainsi obtenus ne sont pas explicités, ce qui conduit l'enseignante à exiger la poursuite de leur travail.

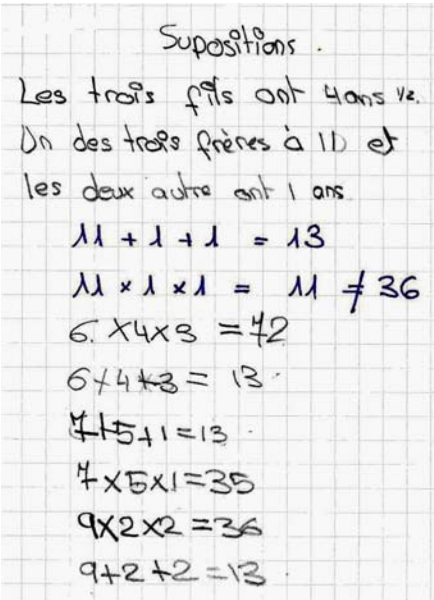
2. Le groupe de Loïc, Yann, Christophe P. a obtenu au moyen de la décomposition additive l'équation $13 = 11+1+1$ et ont cessé là toute réflexion. La prise en compte d'une seule contrainte et la satisfaction des élèves incite l'enseignante à leur demander ce qu'ils devraient faire encore et à noter sur leur feuille l'opération de multiplication qu'ils pressentaient : $11 \times 1 \times 1 = 11$. La lecture de cette équation a permis aux élèves d'établir que leur résultat ne donnait pas la réponse escomptée 36. Ce constat fut suffisant pour les relancer et terminer le problème.

3. Le groupe de Daniel et Christophe O. a également procédé par tâtonnement. Les élèves n'ont tenu compte que d'une partie de la consigne et, sans écrire d'opérations, ont fourni une première réponse « 11 1 1 ». Comme pour le groupe 1, l'enseignante synthétise sur leur feuille ce que les élèves ont fait, à savoir : $11 + 1 + 1 = 13$, puis leur demande de relire la consigne pour qu'ils examinent plus minutieusement les instructions et les données à considérer. (Fig. 1.)

   La relecture de la donnée du problème donne lieu à l'écriture sous dictée à l'enseignante de l'équation suivante : $11 \times 1 \times 1 = 11 \neq 36$. Cette écriture incite les élèves à reprendre le problème, et à trouver une solution. L'ultime intervention de la maîtresse porte sur l'obtention d'une réponse écrite au problème. (Fig. 2.)

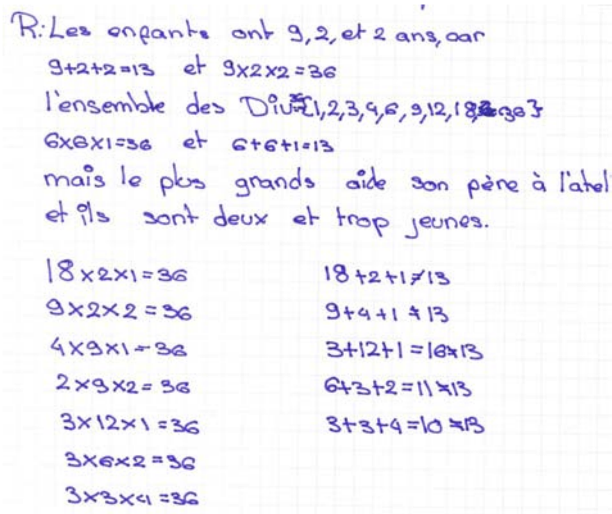
4. Le groupe de Marine, Sarah et Audrey a utilisé des procédures qui tiennent compte des deux parties de la consigne. À partir des trois âges possibles, à savoir 11, 1, 1, les élèves se sont assurées que la somme des trois nombres est égal à treize puis ont continué de la manière suivante : 1) Elles multiplient de la somme des trois âges (13) par 3, et obtiennent ainsi le nombre 39. 2) Puisque le résultat n'est pas égal au résultat attendu (36), les élèves reprennent chaque âge trouvé (11, 1, 1) et multiplient le premier par 3, le deuxième par 2 et le troisième par 1, ce qui leur permet d'obtenir 36.

   Pour ce groupe, l'utilisation de chaque nombre de la consigne est nécessaire à la résolution du problème posé. Cette attitude consistant à utiliser les nombres présents pour obtenir le nombre 36 en tenant compte de l'ensemble des données numériques pourrait évoquer les procédures du désormais fameux « problème du capitaine » ([11]). L'intervention de l'enseignante, qui souligne les parties correctes et erronées de leur raisonnement, porte sur une demande d'explicitation



Supositions .
Les trois fils ont 4ans ½.
Un des trois frères à 11 et
les deux autre ont 1 ans
$11 + 1 + 1 = 13$
$11 \times 1 \times 1 = 11 \neq 36$
$6 \times 4 \times 3 = 72$
$6+4+3 = 13$
$7+5+1=13$
$7 \times 5 \times 1=35$
$9 \times 2 \times 2=36$
$9+2+2=13$

FIG. 1 – Procédures de résolution du groupe 3.



R: Les enfants ont 9, 2, et 2 ans, car
9+2+2=13 et 9x2x2=36
l'ensemble des Div={1,2,3,4,6,9,12,18,36}
6x6x1=36 et 6+6+1=13
mais le plus grands aide son père à l'atel
et ils sont deux et trop jeunes.

18x2x1=36 18+2+1≠13
9x2x2=36 9+4+1≠13
4x9x1=36 3+12+1=16≠13
2x9x2=36 6+3+2=11≠13
3x12x1=36 3+3+4=10≠13
3x6x2=36
3x3x4=36

FIG. 2 – Justifications du groupe 3.

de ce qu'elles avaient fait. La poursuite de leurs recherches aboutit à l'obtention d'une solution unique remplissant les deux conditions. De plus, afin de satisfaire le contrat didactique, les élèves écrivent une explication sur le mode narratif que l'enseignante refuse en exigeant une réponse plus concise et plus appropriée à la situation mathématique.

5. Le groupe de Stéphane et Stéphanie a procédé lui aussi par tâtonnement et par décomposition additive du nombre 13. La multiplicité des réponses obtenues a incité l'enseignante à demander aux élèves d'enlever les impossibilités dues à la deuxième contrainte et d'écrire une réponse définitive.

6. Seul le groupe composé de Mathias et Thierry, a « pragmatisé » la situation en utilisant des nombres réels dont la somme vaut 13 et qui seraient ainsi de l'ordre du vraisemblable. Ils tiennent compte dans leurs essais successifs de la première contrainte, puis de la seconde, sans toutefois obtenir de solution. (Fig. 3.)

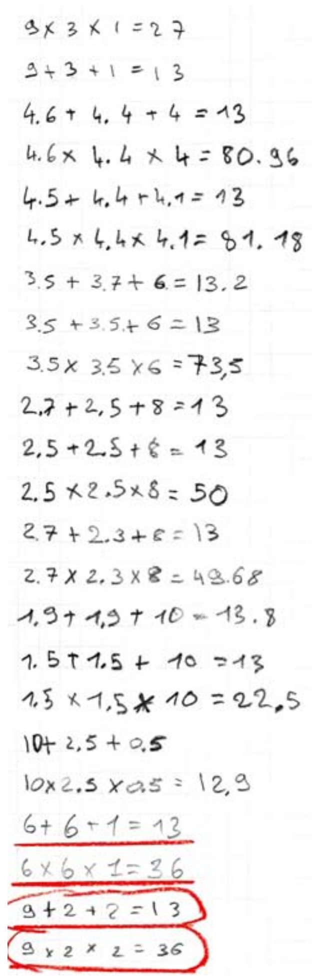


FIG. 3 – Procédures de résolution du groupe 6.

2.3. Discussion

La phase de confrontation entre les diverses solutions trouvées par les élèves permet de discuter de la pertinence des solutions et d'expliquer les procédures. Afin de susciter dans chaque groupe un débat et une argumentation portant sur la pertinence des solutions trouvées, l'enseignante procède en appariant par deux les groupes ayant des solutions différentes. La phase de formulation devait aboutir au choix de la meilleure solution et à l'écriture de la réponse sous une forme adéquate. Cette dernière exigence s'avère plus difficile que prévue. Les élèves n'arrivant pas à donner une réponse écrite canonique, la maîtresse effectue cette étape collectivement et chaque groupe recopie ensuite ce qui a été décidé en commun et noté au tableau noir.

L'analyse *a posteriori* montre que plusieurs groupes ont effectivement procédé par une décomposition numérique du nombre 13, mais que plusieurs d'entre eux n'ont pas su prendre en compte la deuxième contrainte et que la justification mathématique d'une solution n'a pas encore de forme définitive et conventionnelle. Or nous tenons à souligner que l'enseignante est contrainte d'analyser les procédures en temps réel et non pas a posteriori. Les décisions doivent être dès lors prises rapidement et l'analyse est menée parfois sommairement. Aux dires même de l'enseignante, la finesse du repérage est fonction de la qualité de l'analyse a priori de la tâche. En fonction de l'avancée du temps didactique, l'enseignante est intervenue en soulignant de manière récurrente cinq aspects didactiquement sensibles et cruciaux pour l'enseignement des mathématiques :

1. L'écriture mathématique de la procédure (exemple : $11 + 1 + 1 = 13$) ;
2. Une exigence de relecture de la donnée du problème et de réexamen du travail déjà effectué ;
3. Un pointage de la double contrainte par l'enseignante lui-même ;
4. Une explicitation et une justification des procédures ;
5. L'exigence d'une écriture canonique de la réponse.

3. L'Album de photos

Cette deuxième activité a été proposée aux mêmes élèves de 6 P peu de temps après l'*Énigme de Merlin l'Enchanteur*. L'enseignante a pour objectif une nouvelle fois un rappel de la variété des résolutions possibles, l'exigence de la validation des réponses obtenues et de l'écriture d'une réponse. Elle compte ainsi par le biais d'un tel problème obtenir une variété de procédures qui lui permettront d'étayer son enseignement précédent.

L'Album de photos RMT© (Cat. 5, 6)

Élise a placé dans un album les photos prise durant ses vacances. Il y a 80 *photos. Et Élise les a disposées sur* 29 *pages ; dans certaines pages, elle a mis* 4 *photos et dans d'autres* 2 *photos.*
Combien y a-t-il de pages avec 4 *photos et combien avec* 2 *photos dans l'album d'Élise ? Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.*

3.1. Analyse *a priori* et buts de l'enseignante

Le problème met en scène une situation de partage inégal. Le domaine numérique n'est pas particulièrement étendu, puisqu'il est inférieur à 100 et de ce fait ne constitue pas un obstacle à la résolution. Les procédures attendues par l'enseignante sont les suivantes :

– Dessin des 29 pages et « remplissage » par les photos ;
– Essais successifs d'opération du type $(2\times A)+(4\times B) = 80$ avec $A+B = = 29$. Par contre, la division euclidienne que les élèves commencent à aborder dans leur parcours mathématique, n'est pas attendue comme procédure de résolution.

3.2. Reflets du travail didactique

Deux groupes ont utilisé des procédures assurant une résolution correcte du problème.

1. Le groupe de Stéphane et Mathias a utilisé la procédure optimale, par essais successifs en multipliant des nombres par 2 et par 4 puis en les additionnant afin d'obtenir 80. La solution rapidement trouvée est validée par l'enseignante qui oriente les deux élèves sur un nouveau problème. (Fig. 4.)
2. Diane, Marine et Audrey ont procédé par additions successives de 4 et de 2 en essayant de s'approcher de 80. Puis par tâtonnements successifs, elles ont retranché 4 et 2 afin d'atteindre 80 photos en 29 pages. Elles ont donné dans leur réponse une explication sous forme

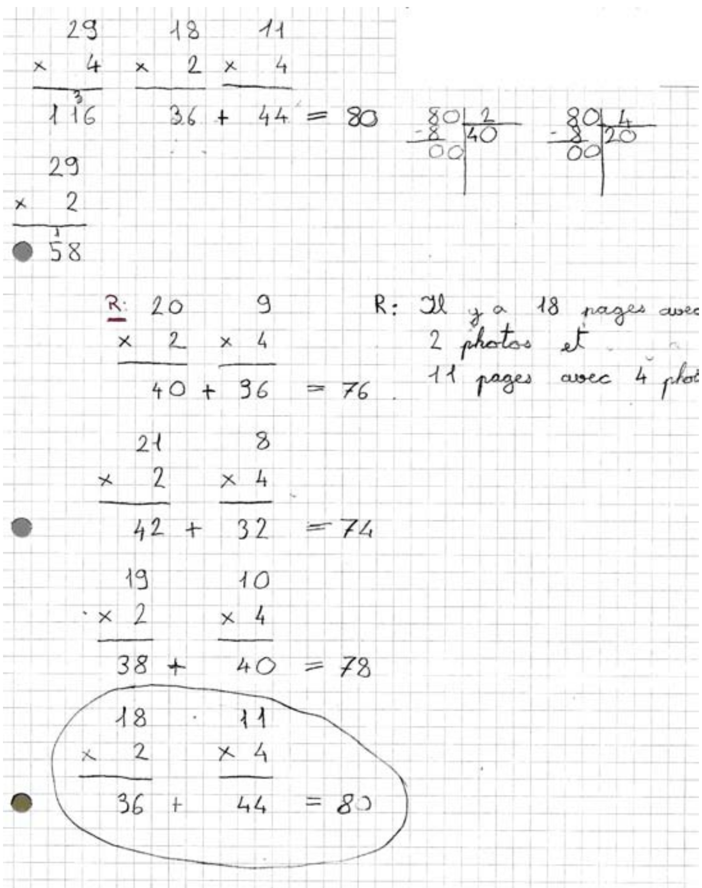


FIG. 4 – Procédures de résolution du groupe 1.

de multiplication :

$$\begin{array}{rcr} 18 & \times 2 = & 36 \\ +\,11 & \times 4 = & +\,44 \\ \hline 29 & & 80 \end{array}$$

Les autres groupes ont rencontré des difficultés diverses :

3. Sarah et Cléa ont dans un premier temps effectué des opérations composées aléatoirement des nombres proposés dans la consigne. Ainsi par exemple, elles notent que la moitié de 29 est 14.
4. Thierry et Stéphanie ont débuté leur résolution en essayant d'effectuer des opérations avec les nombres proposés dans l'énoncé, mais sans aboutir à une solution acceptable pour eux :

$$\begin{array}{lll} 4 \times 20 = 80 & 2 \times 40 = 80 & 80 : 20 = 4 \\ 2 \times 40 = 80 & 80 : 40 = 2 & 80 : 2 = 40 \\ 4 \times 20 = 80 & & \end{array}$$

Dans le groupe 3, mais aussi partiellement dans le groupe 4, les procédures utilisées pourraient relever d'un effet de contrat : les élèves appliquent une règle classique qui stipule d'une part que les nombres proposés dans l'énoncé du problème doivent être utilisés et la généralisent à l'ensemble des nombres contenus dans le problème. D'autre part, ils appliquent le principe que la réponse est le résultat de la combinaison des nombres donnés à l'aide d'opérations diverses.

5. Daniel et Christophe O. n'ont pas pris en compte la consigne telle qu'elle était donnée. Ces deux élèves ont compris qu'il fallait trouver le nombre de pages de 4 photos ou de 2 photos que l'on pourrait remplir avec 80 photos. Cette erreur de compréhension les conduits à donner comme première réponse :
   – *Photos de* 2*, elle pourra mettre* 40 *photos de* 2
   – *Photo de* 4 *: elle pourra mettre* 20 *photos de* 4
   Constatant leur erreur, l'enseignante propose une première relance qui les renvoie à une nouvelle lecture de la donnée et à sa reformulation ([2]). Dans la seconde relance, basée fortement sur l'ostention, l'enseignante écrit « 40 pages », signalant de la sorte que le résultat 40 correspond à des pages et non pas à des photos. Elle termine son

([2]) On pourrait supposer que les élèves recourent à la division euclidienne et que l'enseignante n'ayant pas considéré celle-ci comme un mode de résolution possible n'a su y prêter attention.

intervention en soulignant d'un trait de crayon « 29 pages » pour attirer l'attention des élèves sur le fait que 29 pages de l'album avaient été remplies.

Face à l'impasse dans laquelle se situent plusieurs groupes, et dont ils ne parviennent pas à sortir, une mise en commun est proposée à tous les groupes sauf au groupe de Stéphane et Mathias. En effet, l'enseignante ne souhaite pas que les groupes utilisent la procédure académique sans comprendre ce qu'ils font. Elle invite dès lors les élèves à rappeler le problème à résoudre, puis à exposer leurs procédures de résolutions qu'elle note succinctement au tableau noir.

Les propositions de résolution énoncées par les élèves relèvent de trois procédures :

– Diane, Marine et Audrey du groupe 2 proposent de noter un certain nombre de fois 4 et 2 puis de les additionner et d'essayer d'obtenir 80 photos sur 29 pages.
– Sarah et Cléa (groupe 3) suggèrent d'utiliser le dessin avec la représentation des photos.
– Les deux derniers groupes (4 et 5) expliquent qu'ils ont effectué des opérations qui toutefois ne les ont pas conduits à des solutions valides.

Face à ces différentes propositions et à la richesse des pistes proposées, l'enseignante souligne le fait que plusieurs manières permettent de trouver la solution et que par conséquent la proposition d'utiliser les représentations iconiques est également « autorisée », ainsi que toutes les autres manières notées au tableau noir. Les élèves sont alors conviés à terminer le travail en tenant compte des remarques et suggestions faites lors de la mise en commun.

Cette fin de travail ne pose aucun problème à Diane, Marine et Audrey (groupe 2) ni à Sarah et Cléa (groupe 3). Ces deux dernières poursuivent pendant un moment leur tentative de résolution numérique, mais au vu de leur impossibilité d'obtenir une réponse satisfaisante, elles optent pour la résolution par dessin. (Fig. 5.)

Elles représentent les 29 pages ; placent deux points représentant deux photos par page ; puis complètent pour obtenir les 80 photos totales. La justification de leur réponse prend la forme des deux opérations suivantes :

11 *de* 4 *et* 18 *de* 2

$11+18=29$ *car* $11\times4=44$ *et* $2\times18=26$ *en tout* $44+36=80$.

Par contre, pour les groupes 4 et 5, les difficultés restent bien présentes, nécessitant de nombreuses relances de l'enseignante tout au long de la recherche sous forme de questions et de notations que les élèves ont dictées

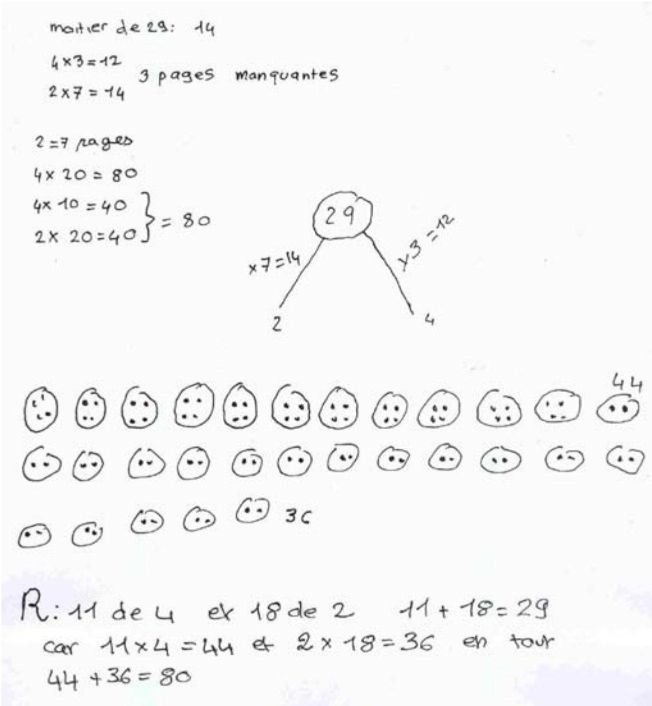


FIG. 5 – Procédures de résolution du groupe 3.

à l'adulte. Thierry et Stéphanie commencent par dessiner 29 photos qui à leur avis constitueraient le tout. Face à cette mauvaise compréhension de la consigne, une nouvelle lecture de la consigne exigée par l'enseignante leur permet d'extraire deux données fondamentales : 29 pages et 80 photos. (Fig. 6.)

Sur incitation de l'enseignante, les deux élèves dessinent les doubles pages d'un livre et inscrivent dans chaque page un nombre représentant les photographies. L'enseignante a ensuite noté elle-même la synthèse sous forme d'opérations $19 \times 4 = 76$ et $9 \times 2 = 18$ donc 94 photos. Le résultat incorrect nécessite de reprendre la résolution, ce que les élèves tentent à l'aide des équations proposées précédemment, en variant les multiplicandes. Toutefois des essais successifs infructueux les incitent à reprendre une représentation par dessin.

Dans le groupe 4, le scénario est quasi identique. Toutefois l'enseignante, forte des expériences précédentes et des procédures observées dans les autres groupes, leur suggère d'utiliser le dessin en plaçant d'abord 2 photos. Cette suggestion permet de trouver un premier résultat partiel (58 photos) qu'ils complètent pour arriver à 80 en tout. Néanmoins, c'est l'enseignante qui a dû effectuer le regroupement du nombre de pages ayant deux et quatre photos. De plus, ce groupe n'a pas donné de réponse claire au problème.

3.3. Discussion

Le rôle de l'observation des procédures est dans cette deuxième séquence bien visible. En effet, au vu des procédures variées des élèves et de l'impasse dans laquelle ils se situent presque tous, l'enseignante intervient en proposant une mise à l'écart d'un groupe et à un échange des procédures de résolution utilisées. Ce moment qui apparaît plus tôt que prévu dans la préparation de la leçon est supposé permettre aux élèves d'utiliser des procédures de plus bas niveau que les procédures opératoires. Toutefois, bien que les élèves paraissent sortir de l'impasse et trouver un mode de résolution fructueux, l'enseignante se trouve confrontée à des difficultés identiques à celles rencontrées dans *L'Énigme de Merlin l'Enchanteur*. Deux groupes ne parviennent pas à prendre en charge le problème sans son aide, la validation du résultat n'est guère spontanée et l'écriture d'une réponse identifiable reste l'apanage de quelques élèves seulement.

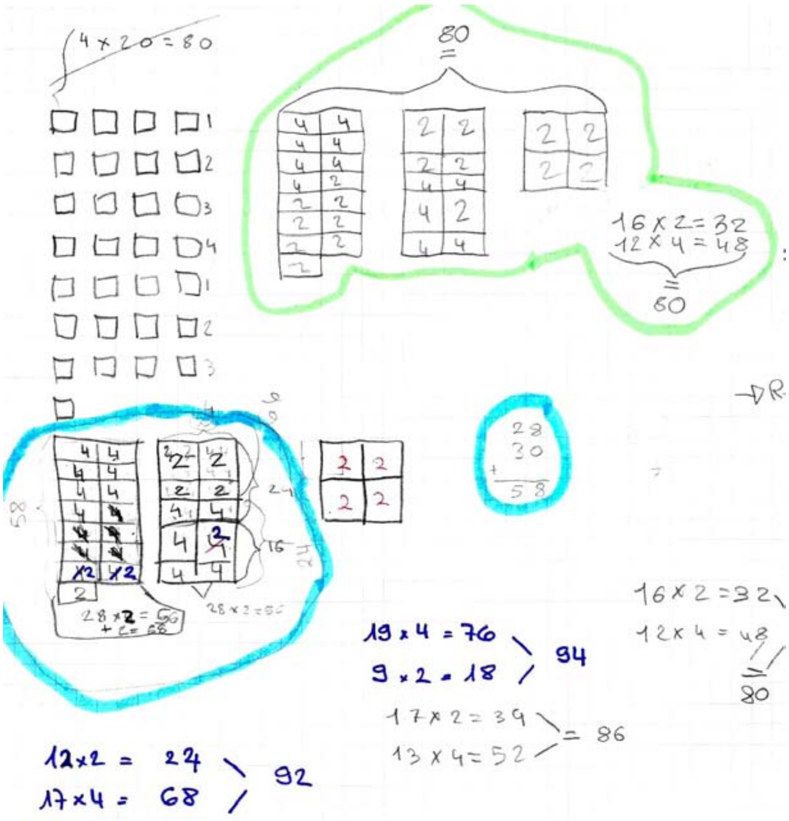


FIG. 6 – Procédures de résolution du groupe 4.

4. Conclusion

Les gestes de l'enseignante poursuivent ainsi dans les deux séquences des objectifs communs. Rendre les élèves autonomes dans la prise en charge d'un problème incluant la justification de la résolution, les obliger à l'écriture de la réponse qui relève d'un deuxième traitement des opérations effectuées et leur faire admettre que plusieurs modes de résolution peuvent aboutir à une solution correcte sont autant de points qui sont travaillés au moyen de ces deux situations. Les deux séquences didactiques montrent que l'écriture des procédures auxquels les élèves ont dû se soumettre permettent à l'enseignante d'orienter son enseignement et de différencier les gestes didactiques propres à la relance. Toutefois, leur utilité ne se restreint pas uniquement à la qualité de la relance, mais permet également de concevoir la phase de formulation afin de permettre une prise en charge par les élèves eux-mêmes des différents aspects pointés lors des relances. Il semblerait dès lors que les procédures des élèves, leur anticipation ainsi que leur repérage s'avèrent être des outils indispensables à l'enseignement des mathématiques.

Par ailleurs, et malgré des objectifs similaires, les deux problèmes ne produisent pas le même effet. Dans *L'Album de photos*, la diversité des procédures est clairement remarquable et l'enseignante conduit ses élèves à investir un autre champ de connaissance afin de résoudre le problème. Ainsi en proposant une résolution iconique, adoptée par un groupe d'élèves, l'enseignante tente d'une part de contourner la difficulté opératoire, et d'autre part cherche à donner du sens aux opérations nécessaires. Cet aiguillage sur la diversité des résolutions pour trouver un résultat correct est prioritaire dans cette tâche, alors que dans *L'Énigme de Merlin l'Enchanteur* les autres aspects relevés semblent d'égale importance. Cependant nous constatons également que la focalisation sur l'un ou l'autre aspect en jeu est fortement liée à l'analyse a priori de la tâche, analyse qui permet d'anticiper la situation didactique. Si les relances faites aux groupes séparément semblent effectivement tenir compte des procédures réelles des élèves, la diversité et la finesse de certaines échappent à l'enseignante qui n'en a pas besoin pour faire avancer son projet didactique.

En dernier lieu, nous soulignerons également l'importance de la tâche. Les deux problèmes, qui pourraient être définis comme des problèmes ouverts au sens décrits par Arsac, Germain et Mante ([1]) offrent un large éventail de procédures de résolutions. Mener un enseignement qui s'appuie sur les procédures des élèves et sur leur diversité ne peut s'entendre qu'en choisissant des problèmes qui génère cette diversité.

Bibliographie

[1] Arsac, G., Germain, G. & Mante, M., [1991], *Problème ouvert et situation-problème*, Villeurbanne : IREM, Lyon.

[2] Chastellain, M. & Jaquet, F., [2001], *Mathématiques. Cinquième année*, Méthodologie-Commentaires, Neuchâtel : Corome.

[3] Chastellain, M. & Jaquet, F., [2001], *Mathématiques. Sixième année*, Méthodologie-Commentaires, Neuchâtel : Corome.

[4] Danalet, C., Dumas, J.-P., Studer, C. & Villars-Kneubühler, F., [1998], *Mathématiques. Troisième année primaire*, Livre du maître, Neuchâtel : Corome.

[5] Danalet, C., Dumas, J.-P., Studer, C. & Villars-Kneubühler, F., [1999], *Mathématiques. Quatrième année primaire*, Livre du maître, Neuchâtel : Corome.

[6] ERMEL, [1990], *Apprentissages numériques, cycle des apprentissages. Grande Seciton de maternelle*, Paris : Hatier.

[7] ERMEL, [1991], *Apprentissages numériques. Cours préparatoire*, Paris : Hatier.

[8] ERMEL, [1993], *Apprentissages numériques et résolution de problèmes. Cours élémentaire (première année)*, Paris : Hatier.

[9] Ging, E., Sauthier, M.-H. & Stierli, E., [1997], *Mathématiques. 2e année primaire*, Livre du maître, Neuchâtel : Corome.

[10] Ging, E., Sauthier, M.-H. & Stierli, E., [1996], *Mathématiques. 1e année primaire*, Livre du maître, Neuchâtel : Corome.

[11] IREM de Grenoble, [1980], Quel est l'âge du capitaine ?, *Bulletin de l'APMEP*, n° 323.

[12] Jaquet, F., [2003], Solutions, commentaires et résultats des problèmes de l'épreuve II du 11e RMT, *Math-École*, n° 207, pp. 44–56.

[13] Sacré, A. & Stegen, P., [2000], *Savoir dénombrer et savoir calculer au cycle 5/8*, Bruxelles : Labor.

Une nouvelle formule combinatoire ?

RICHARD CHOULET
Lycée Fresnel, Caen

1. Le point de départ de cette étude

Me demandant ce qu'il adviendrait des nombres du triangle de Pascal si l'on partait de 1 et -1 au lieu de 1 et 1 (le départ a donc lieu sur la deuxième ligne du classique tableau), je me suis aperçu qu'en laissant de côté les coefficients négatifs ou nuls et en présentant horizontalement les diagonales « descendantes » obtenues, je générais des nombres, forcément combinaisons linéaires de coefficients du binôme, dont la diagonale principale était constituée des fameux nombres de Catalan $\dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Détaillons la démarche. On part du tableau illimité dont voici le début (Tab. 1). On ne s'occupe ensuite que des entiers strictement positifs que

1	-1	0	0	0	0	0
1	0	-1	0	0	0	0
1	1	-1	-1	0	0	0
1	2	0	-2	-1	0	0
1	3	2	-2	-3	-1	0
1	4	5	0	-5	-4	-1
1	5	9	5	-5	-9	-5

Tab. 1 –

l'on lit en diagonale de haut en bas pour former le nouveau tableau qui commence ainsi (Tab. 2). C'est lui qui nous intéresse.

Adresse de l'auteur : 27, rue du 4 Août, F-14210 Avenay (France) ; courriel : richardchoulet@wanadoo.fr.

1				
1	1			
1	2	2		
1	3	5	5	
1	4	9	14	14

TAB. 2 –

Signalons que les nombres du tableau 2 ainsi que les nombres de Catalan qui y apparaissent peuvent intervenir dans la résolution du problème suivant :

> **On range les nombres 1, 2, 3, ..., $2n$ dans une matrice à 2 lignes et n colonnes, de sorte que chaque ligne et chaque colonne soit strictement croissante. Combien peut-on construire de telles matrices ?**

Un mot en entraînant un autre, le déroulement de la pelote qui passait par des égalités de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ m'a conduit à la formule dont il est question. Dans un souci de clarté, j'ai remanié toute l'approche de cette formule.

2. Analyse d'un tableau « à la Pascal »

Observons le tableau (infini) suivant (v. Tab. 3) dont la construction est familière, puisque c'est ainsi qu'est généré le triangle de Pascal, et calculons explicitement le terme général de la suite double obtenue.

Plus généralement intéressons-nous à un tableau, fini ou non, dont les éléments notés génériquement $F_{m,n}$ (c'est l'élément de ligne numéro m et de colonne numéro n) satisfont la récurrence : $F_{m,n} = F_{m-1,n} + F_{m-1,n-1}$ pour tous m et n ($m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$) ; « pour démarrer », $F_{m,0} = 1$ pour tout m et les éléments $F_{0,n}$ sont tous donnés.

Nous désignons par Θ_m la fonction génératrice ordinaire (f.g.o.) associée à la ligne numéro m, c'est-à-dire :

$$\Theta_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{m,n} z^n.$$

m \ n	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2	2
3	1	3	4	4	4	4	4	4
4	1	4	7	8	8	8	8	8
5	1	5	11	15	16	16	16	16
6	1	6	16	26	31	32	32	32
7	1	7	22	42	57	63	64	64

TAB. 3 –

La relation de récurrence générique : $F_{m,n} = F_{m-1,n} + F_{m-1,n-1}$ se répercute sur deux f.g.o. consécutives puisque :

$$\Theta_{m+1}(z) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(F_{m,n} + F_{m,n-1}\big) z^n = \Theta_m(z) + z\Theta_m(z) = (1+z)\Theta_m(z).$$

Il en résulte que pour $m \geqslant 1$ on a :

$$\Theta_m(z) = (1+z)^m \Theta_0(z) = (1+z)^{m-1}\Theta_1(z).$$

Donnons quelques exemples numériques :

- Avec $F_{0,0} = 1$ et $F_{0,n} = 0$ pour $n > 0$, on a $\Theta_0(z) = 1$, ce qui donne le classique $\Theta_m(z) = (1+z)^m$.
- Avec $F_{0,1} = 1$, $F_{1,1} = -1$ et $F_{m,1} = 0$ pour tout $m > 0$: $\Theta_m(z) = $ $= (1+z)^{m-1}(1-z)$ (ici on ne considère pas de $F_{0,0}$).
- Avec le cas qui nous occupe, celui du tableau 3, $\Theta_0(z) = \dfrac{1}{1-z^2}$, ce qui fournit :

$$\Theta_m(z) = \frac{(1+z)^{m-1}}{1-z}.$$

Dans ce qui suit, $F_{m,n}$ désignera donc l'élément générique du tableau 3.

3. Calcul explicite du terme général

Démontrons que, toujours dans le tableau 3, on a pour tous m et n :

$$F_{m,n} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{m}{n-2k}, \tag{1}$$

où, comme d'habitude, $\lfloor n/2 \rfloor$ désigne la partie entière de $n/2$. Rappelons la convention usuelle : $\binom{n}{p} = 0$ pour $n < p$ ou $p < 0$ ou $n < 0$.

Le plus simple est de calculer la f.g.o. φ_m par

$$\varphi_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{m}{n-2k} z^n,$$

en remarquant que, sur les séries formelles, les échanges de sommes ne posent pas de problème.

On a donc, en distinguant dans le première somme, les n pairs, pour lesquels on pose $n = 2p$ et les n impairs, pour lesquels on pose $n = 2p+1$:

$$\begin{aligned}
\varphi_m(z) &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{p} \binom{m}{2p-2k} z^{2p} + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{p} \binom{m}{2p+1-2k} z^{2p+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p \geqslant k} \binom{m}{2(p-k)} z^{2p} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p \geqslant k} \binom{m}{2(p-k)+1} z^{2p+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l \geqslant 0} \binom{m}{2l} z^{2k+2l} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l \geqslant 0} \binom{m}{2l+1} z^{2k+2l+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k} (1+z)^m \\
&= \frac{(1+z)^m}{1-z^2} \\
&= \Theta_m(z).
\end{aligned}$$

4. Un cas particulier

Avant de poursuivre sur un autre aspect de cette formule, appliquons-la dans le cas particulier où m et n satisfont $1 \leqslant m \leqslant n+1$, pour obtenir ce qui apparait bien sur le tableau 3 :

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{m}{n-2k} = 2^{m-1}. \qquad (2)$$

Nous avions obtenu : $F_{m,n} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{m}{n-2k}$ et nous démontrons par récurrence que : pour tout $n \geqslant m-1$, $F_{m,n} = 2^{m-1}$. Notons $\mathcal{Q}_m$ cet énoncé. $\mathcal{Q}_1$ est vrai car pour tout n entier : $F_{1,n} = 1 = 2^0$.

Supposons que pour un certain m quelconque, $\mathcal{Q}_m$ soit vrai. Pour tout $n \geqslant m$ on a : $F_{m+1,n} = F_{m,n} + F_{m,n-1} = 2^{m-1} + 2^{m-1} = 2^m$; $\mathcal{Q}_{m+1}$ est vrai, d'où le résultat annoncé.

5. Autre expression du terme général

Le deuxième point que nous voulons établir est que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n+k+x-1}{n-k} \binom{m+2k+x-2}{k} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{m}{n-2k}. \qquad (3)$$

pour tous entiers m et n, et tout complexe x.

Autrement dit la fonction $f_{(m;n)}$ définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$f_{(m;n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n+k+x-1}{n-k} \binom{m+2k+x-2}{k},$$

est constante pour tous m et n de $\mathbb{N}$.

Remarque : Il est amusant de constater que $f_{(n;4)}(2)$ est le nombre maximal de régions intérieures à un disque, délimitées par tous les segments obtenus avec n points du cercle frontière.

Avec la f.g.o. de $f_{(m;n)}(x)$ nous avons les calculs formels :

$$\begin{aligned}
\Psi_{m,x}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n+k+x-1}{n-k}\binom{m+2k+x-2}{k}z^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{m+2k+x-2}{k}z^k\sum_{n=k}^{\infty}(-1)^{n-k}\binom{n+k+x-1}{n-k}z^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{m+2k+x-2}{k}z^k\sum_{M\geqslant 0}(-1)^M\binom{M+2k+x-1}{M}z^M \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{m+2k+x-2}{k}z^k(1+z)^{-x-2k} \\
&= (1+z)^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m+2k+x-2}{k}\left(\frac{z}{(1+z)^2}\right)^k.
\end{aligned}$$

Or, $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m+2k+x-2}{k}Z^k = \frac{2^{m+x-2}\left(1+\sqrt{1-4Z}\right)^{-m-x+2}}{\sqrt{1-4Z}}$; donc,

$$\begin{aligned}
\Psi_{m,x}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{m+2k+x-2}{k}z^k(1+z)^{-x-2k} \\
&= (1+z)^{-x}\frac{(1+z)^{x+m-1}}{1-z} = \Theta_m(z).
\end{aligned}$$

6. Est-ce une nouvelle formule ?

À la limite peu importe ; il y en a tellement qu'une (éventuellement) de plus ne changera pas la face du monde. Ce qui me paraît intéressant c'est la démarche de l'activité mathématique de recherche, d'élaboration d'hypothèses et d'utilisation d'outils performants.

Mes bibles en la matière étant l'*Analyse Combinatoire* de Louis Comtet et *Combinatorials Identities* de John Riordan (voir la Bibliographie), je n'y ai pas trouvé cette formule mais il est vrai que je ne lis pas très assidûment les bibles !

Pour tout $n \geqslant 0$ et tout $m \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n+k-1}{n-k} \binom{m+2k-2}{k} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n+k-1}{n-k} \binom{m+2k-2}{k-1} = 2^{m-1}. \tag{4}$$

Raccrochons les wagons provenant de (2) et (3) dans le cas $1 \leqslant m \leqslant n+1$ pour obtenir :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n+k+x-1}{n-k} \binom{m+2k+x-2}{k} = 2^{m-1}. \tag{5}$$

Dans (5) on pose $N = n + i$ ce qui donne :

$$\sum_{k=0}^{N-i} (-1)^{N-i-k} \binom{N-i+k+x-1}{N-i-k} \binom{m+2k+x-2}{k} = 2^{m-1},$$

où $1 \leqslant m \leqslant N - i + 1$ c'est-à-dire $1 + i \leqslant m + i \leqslant N + 1$ ($i \in \mathbb{N}$). En posant aussi $l = k + i$ on obtient :

$$\sum_{k=i}^{N} (-1)^{N-l} \binom{N-2i+k+x-1}{N-l} \binom{m+2k-2i+x-2}{l-i} = 2^{m-1},$$

et en remplaçant x par $x - 2i$:

$$\sum_{k=i}^{N} (-1)^{N-l} \binom{N+k+x-1}{N-l} \binom{m+2k+x-2}{l-i} = 2^{m-1},$$

ainsi $x = 0$, $i = 0$ puis $i = 1$, en revenant à n au lieu de N, donnent :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n+k-1}{n-k} \binom{m+2k-2}{k} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n+k-1}{n-k} \binom{m+2k-2}{k-1} = 2^{m-1}.$$

7. Une conséquence du résultat

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout complexe x :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+k-1}{n-k} \left[\binom{x+2k-2}{k} - \binom{x+2k-2}{k-1} \right] = \binom{x-1}{n}. \qquad (6)$$

En effet il suffit de démontrer que les fonctions polynômes de même degré, qui ont les mêmes coefficients de x^n ont les mêmes zéros $1, 2, \ldots, n$ c'est-à-dire pour tout m, $1 \leqslant m \leqslant n$:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+k-1}{n-k} \left[\binom{m+2k-2}{k} - \binom{m+2k-2}{k-1} \right] = 0,$$

ce qui constitue le résultat de notre propos.

Remerciements

À mon collègue Jean Paul Petit, enseignant en classe de MPSI au lycée Malherbe de Caen, qui avait démontré « ma » conjecture (formule (4)) avant que j'en trouve une autre preuve par les fonctions génératrices ; je lui ai repris sans vergogne, avec son accord, *of course*, la fin du paragraphe 6, à partir de « Dans (5), on pose ».

Bibliographie

Cette bibliographie relativement maigrelette montre qu'en fait le matériel de base pour faire des mathématiques peut être assez réduit.

[1] Comtet L., *Analyse Combinatoire*, t. 1 & 2, Paris, PUF, 1970, 186 & 157 pp.

[2] Riordan J., *Combinatorial Identities*, New York, Londres, Sydney, John Wiley and Sons, 1965, 253 pp.

Cabri-Géomètre et l'inversion

JEAN-PAUL HOUBEN
Université Catholique de Louvain

La plupart des transformations vues dans le secondaire sont des transformations affines et conformes. Il est parfois utile de présenter aux élèves une transformation qui **transforme** vraiment la figure initiale. On peut penser à la symétrie oblique, à une affinité (non conformes) et peut-être à l'inversion (non affine).

C'est cette transformation qui va nous occuper aujourd'hui.

Dans le menu des transformations de Cabri-Géomètre se trouvent la symétrie axiale, la symétrie centrale, la translation, la rotation, l'homothétie et ... l'inversion. L'aide fournie pour cette dernière est :

> *Construit l'image d'un point dans une inversion. On désigne le point puis le cercle.*

Pour comprendre l'outil fourni, il faut partir de la définition de l'inversion.

Étant donné un point fixe P du plan, l'inversion directe (1) fait correspondre à tout point X du plan un point image X' tel que :

1. Les trois points P, X et X' sont alignés.
2. Le produit $|PX|\cdot|PX'| = k$ où k est une constante strictement positive ($k > 0$) (2).

Il est alors immédiat que :

1. Le point P n'a pas d'image et l'inversion est une transformation du plan pointé. Le point P est appelé le pôle de l'inversion.

Adresse de l'auteur : Jean-Paul Houben, Rue de l'Église 78, 1301 Bierges ; courriel : `houbenjp@versateladsl.be`.

(1) C'est la seule fournie par Cabri-Géomètre.

(2) On peut définir une inversion indirecte en prenant le produit des mesures algébriques avec $k < 0$.

2. Si le point X a pour image le point X', alors le point X' a pour image X. D'où le nom d'inversion à cette transformation.
3. Tout point du plan à la distance $\sqrt{k}$ de P est confondu avec son image. L'ensemble de ces points fixes est le cercle d'inversion. C'est de lui dont il est question dans l'aide de Cabri-Géomètre.
4. Les points intérieurs au cercle d'inversion ont une image à l'extérieur et inversement.

Étant donné un point fixe P, l'inversion peut maintenant être définie soit par le produit $k > 0$, soit par le cercle centré en P et de rayon $\sqrt{k}$.

Construction de l'image d'un point

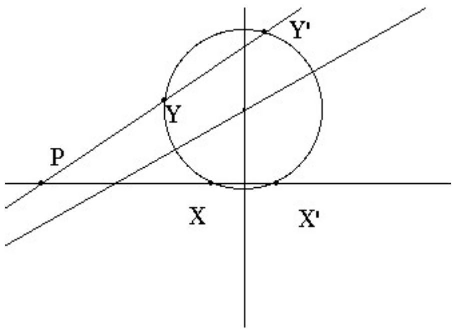
Si nous n'avions pas eu la macro de Cabri-Géomètre pour la construction de l'image d'un point pour une inversion, comment aurions nous fait ?

Soit l'inversion définie par le triplet de points alignés : P, X et X'. Quelle est alors l'image d'un point Y qui n'est pas sur la droite PX ?

Il faut trouver un point Y' qui vérifie la relation :

$$|PX| \cdot |PX'| = |PY| \cdot |PY'| = k$$

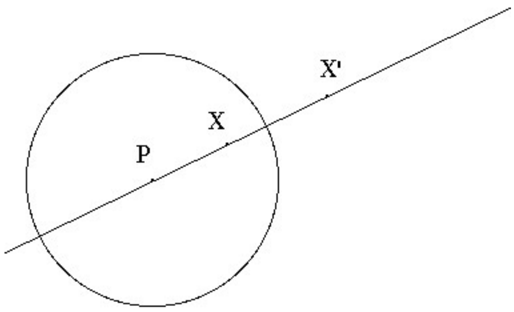
Mais cette égalité exprime la puissance du point P par rapport au cercle passant par les quatre points X, X', Y' et Y. Il suffit donc de construire le cercle passant par X, X' et Y pour trouver le point Y' comme intersection de ce cercle avec la droite PY.



Cabri-Géomètre ne construit que l'image d'un point. Pour avoir l'image d'une droite, d'un cercle ou d'une figure quelconque, il faut placer un point sur cet objet, puis construire son image pour l'inversion et rechercher le lieu de cette image lorsque le point donné parcourt l'objet.

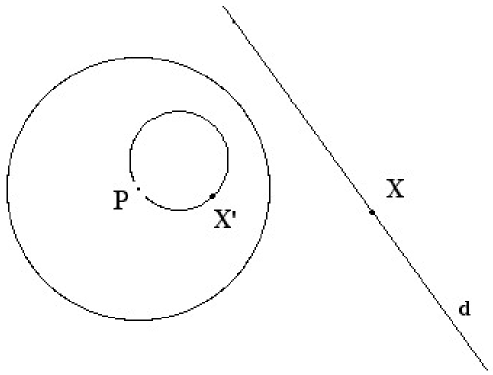
Quelle est l'image d'une droite ?

Il est immédiat que tous les points d'une droite passant par le pôle ont leur image sur cette droite. Une telle droite est sa propre image. Il suffit de déplacer le point X pour voir se déplacer le point X' sur la droite PX.



Traitons, maintenant, le problème pour une droite quelconque. Fixons un point P ([3]), pôle de l'inversion, et le centre d'un cercle de rayon quelconque ([4]). Par un point A quelconque traçons une droite d ([5]). Plus tard, nous pourrons faire tourner cette droite autour du point A. Plaçons sur cette droite d un point$X$ ([6]). Demandons l'image du point X pour l'inversion déterminée par le cercle ([7]). Nommons X' le point trouvé. Enfin, terminons en demandant le lieu du point X' lorsque X parcourt la droite ([8]) ... surprise, nous obtenons un cercle :

([3]) **Points** / *Point*
([4]) **Courbe**/ *Cercle*
([5]) **Ligne**/ *Droite*
([6]) **Points**/ *Point sur objet*
([7]) **Transformations**/ *Inversion*
([8]) **Constructions**/ *Lieu*



Nous devons maintenant démontrer que l'image d'une droite ne passant pas par le pôle est un cercle. Utilisons les propriétes de l'inversion pour cette démonstration.

Traçons dans notre figure la droite PX et la perpendiculaire à la droite d, issue de P. Cette perpendiculaire rencontre la droite en Y et le lieu en Y' ([9]), image de Y pour l'inversion. Nous avons alors, par la définition de l'inversion :

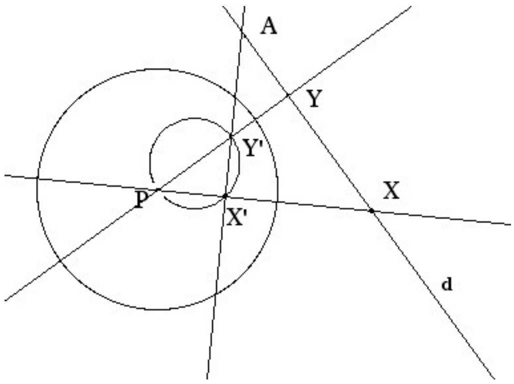
$$|PX| \cdot |PX'| = |PY| \cdot |PY'| = k$$

et donc :

$$\frac{|PX|}{|PY|} = \frac{|PY'|}{|PX'|},$$

ce qui nous donne la similitude des triangles PXY et $PY'X'$. Remarquez en passant l'**inversion** des lettres. Comme l'angle en Y est droit, il en est de même pour l'angle en X' ([10]) et X' décrit un cercle de diamètre PY'. Son centre est donc au milieu de PY'

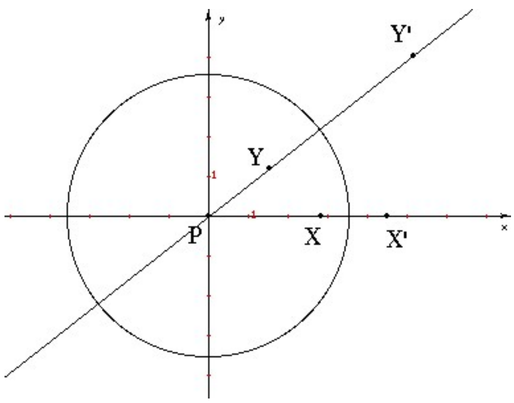
([9]) Le point d'intersection avec un lieu ne peut être trouvé avec Cabri-Géomètre. Le point Y' de la figure a été fixé exactement en utilisant le résultat qu'on va découvrir
([10]) Y' a été construit comme intersection de la perpendiculaire menée de X' à PX' avec la droite PY.



Formules de la transformation

La transformation n'est pas une transformation affine puisqu'une droite est transformée en un cercle. On peut se poser la question : quelles sont les formules de la transformation ?

Soit un système d'axes centré au pôle de l'inversion. L'inversion est déterminée par le cercle centré en P. Les points X et Y ont pour images respectives X' et Y'.



Nous avons par définition de l'inversion :

$$|PX| \cdot |PX'| = |PY| \cdot |PY'| = k$$

ce qui donne successivement :

$$\begin{aligned}|PY'| &= \frac{|PX| \cdot |PX'|}{|PY|} \\ &= \frac{k}{|PY|} \\ &= \frac{k \cdot |PY|}{|PY| \cdot |PY|}.\end{aligned}$$

En passant aux coordonnées (x, y) de Y et (x', y') de Y', nous avons :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{kx}{x^2 + y^2} \\ y' = \dfrac{ky}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

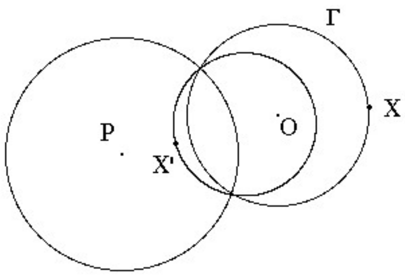
La proportionnalité est donc corrigée par le carré de la distance du point au pôle.

Quelle est l'image d'un cercle ?

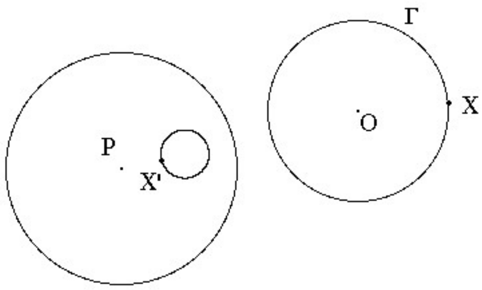
En recherchant l'image d'une droite, nous avons trouvé un cercle passant par P, mais privé de ce point. D'où l'image d'un cercle passant par le pôle est une droite, le pôle n'ayant pas d'image sur la droite ([11]).

Prenons maintenant un cercle quelconque. Utilisons Cabri-Géomètre : traçons le cercle de centre P qui fixe l'inversion, prenons un cercle quelconque Γ et un point X de celui-ci. Déterminons l'image X' de X et terminons par le lieu géométrique de X', pour découvrir :

([11]) Sauf si on y ajoute un point à l'infini



Un cercle ne passant pas par le pôle a pour image un cercle. Nous pouvons nous en rendre compte en changeant le centre O de place.



Démontrons maintenant cette proposition.

Deux cercles sont toujours homothétiques. Mais, dans notre cas, quels en sont le centre et le rapport ? Traçons la droite PX. Elle rencontre le cercle Γ au point Z. Nous avons deux relations :

– La définition de l'inversion : $|PX| \cdot |PX'| = k$;
– La puissance du point P : $|PX| \cdot |PZ| = m$.

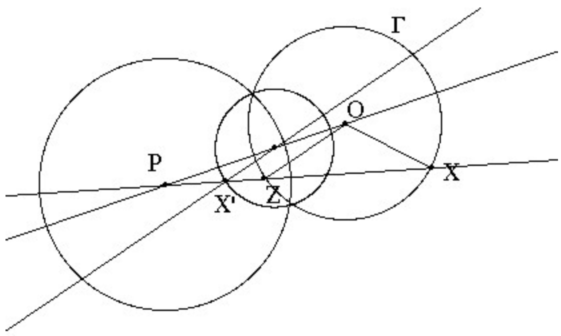
Le rapport de ces deux relations donne :

$$\frac{|PX'|}{|PZ|} = \frac{k}{m}.$$

Le point X' est alors l'image du point Z pour l'homothétie de centre P et de rapport k/m.

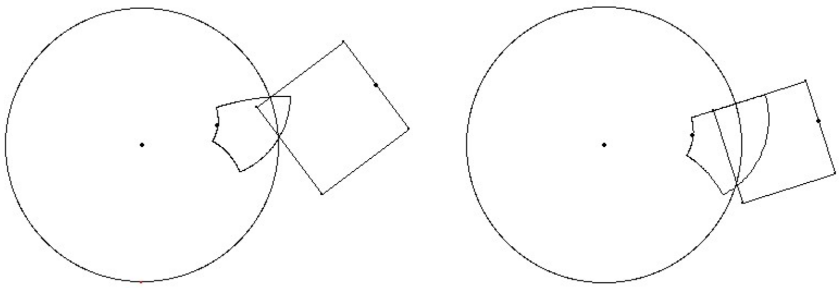
En traçant OZ, nous obtenons le centre du cercle image comme l'intersection de PO avec la parallèle menée par X' à OZ.

Nous pouvons maintenant construire ce cercle image qui devient ainsi un objet utilisable.



Quelle est l'image d'un carré ?

Définissons une inversion par son centre et un cercle. Traçons un carré et plaçons un point quelconque sur son périmètre. En appliquant la même technique que dans les situations précédentes, nous obtenons :



Voilà bien une transformation qui **transforme** : le carré est devenu un quadrilatère curviligne. C'était l'objectif de notre propos.

Souvenirs

Claude Pierroux [1]

À propos de la formule de Stirling

1. Historique

Le 15 novembre 1974, je faisais l'acquisition à Seraing d'une calculatrice COMMODORE modèle SR 36, avec adaptateur 220 V, pour le prix (TVA comprise) de 6745 FB. C'était ma première calculatrice scientifique, non encore programmable, et la dépense représentait 20 % de mon salaire mensuel net de ce mois de novembre en tant que professeur de sciences à l'Institut Provincial d'Enseignement Technique de Seraing. J'étais très fier de mon acquisition et nous nous étions groupés à trois collègues pour obtenir un prix intéressant ! Cette merveilleuse petite machine à affichage par LED (rouges) permettait le calcul des fonctions scientifiques classiques, c'est-à-dire les trois fonctions trigonométriques de base sin, cos, tg ainsi que leurs inverses arcsin, arccos et arctg. Elle donnait aussi bien sûr les fonctions logarithmiques log et ln ainsi que son inverse e^x. On trouvait encore les fonctions $1/x$, $\sqrt{x}$ et y^x. Enfin à côté de la touche « π », il y avait les touches « (» et «) », une touche « EXP » qui permettait d'introduire une puissance de 10, la touche d'unités d'angles (rad/deg) et enfin une touche permettant de permuter les variables x et y ($x \leftrightarrow y$).

Une touche supplémentaire m'aurait rendu de grands services, la fonction $n!$, car à cette époque, j'enseignais les notions d'analyse combinatoire et cette fonction factorielle est très utile dans les calculs de probabilité. C'est alors que je découvris dans un bouquin la fameuse formule de Stirling qui permet de contourner les multiplications successives que nécessite le calcul direct des factorielles :

$$n! \simeq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

[1] Adresse de l'auteur : Cl. Pierroux, Voie de l'Ardenne 89, 4053 Embourg ; courriel : `clpierroux@tiscali.be`

J'étais comblé ! J'allais pouvoir utiliser ma nouvelle calculatrice pour la recherche des combinaisons, arrangements et autres permutations. Et de fait, pour des valeurs suffisamment élevées de n, la formule de Stirling donne des résultats satisfaisants ! Par contre, dès que l'on se rapproche de $n = 1$ à 10, il faut faire des corrections importantes et même un physicien (c'est mon cas) ne peut considérer les écarts entre Stirling et le calcul exact de $n!$ comme négligeable devant les erreurs de mesures. Il fallait donc trouver un moyen de corriger cette formule, et tant qu'à faire, un moyen simple qui réduirait l'erreur pour toutes les valeurs de n.

2. Conception du projet

Dans les colonnes 1 et 2 du tableau de l'Annexe, j'ai calculé les valeurs exactes de $n!$ par multiplications successives puis les valeurs approchées par la formule de Stirling de ces mêmes $n!$ pour toutes les valeurs entières de n allant de $n = 1$ jusqu'à $n = 30$. En face, dans les colonnes 3 et 4, j'ai calculé respectivement les erreurs absolues $\Delta(n!)$ et relatives $\Delta(n!)/n!$, exprimées en %, des valeurs approchées de Stirling. Croyant avoir affaire dans un premier temps à une décroissance de type exponentiel de ces dernières valeurs, je les ai portées en ordonnées dans un diagramme cartésien dont les abscisses correspondantes sont les valeurs de n. La recherche des logarithmes décimaux et népériens de ces erreurs relatives successives ne conduisant pas à des progressions arithmétiques, j'en ai conclu qu'il ne s'agissait pas d'une fonction exponentielle mais plutôt d'une fonction puissance de type hyperbolique, ce dont j'ai eu confirmation en calculant les inverses des erreurs relatives qui forment une progression arithmétique presque parfaite avec pour dixième terme $T_{10} = 1{,}195$ et pour raison $R = 0{,}12$. Donc, $T_1 = 1{,}195 - 9 \times 0{,}12 = 0{,}115$, et la formule du terme général, $T_n = T_1 + (n-1)R$ devenait :

$$(100 \times \Delta(n!)/n!))^{-1} = 0{,}115 + 0{,}12 \times (n-1),$$

ou, en inversant les deux membres,

$$100 \times (\Delta(n!)/n!) = 1/(0{,}115 + 0{,}12 \times (n-1)).$$

Ou encore :

$$\Delta(n!)/n! = 1/(11{,}5 + 12 \times (n-1)).$$

Il suffit alors d'appliquer la relation très utile en physique et en analyse numérique :

$$\text{Valeur exacte} = \text{Valeur approchée} \times (1 + \text{erreur relative})$$

pour aboutir à :

$$\begin{aligned} n! &= (n/e)^n \times \sqrt{2\pi n} \times (1 + \Delta(n!)/n!) \\ &= (n/e)^n \times \sqrt{2\pi n} \times (1 + 1/(11{,}5 + 12(n-1))), \end{aligned}$$

qui peut s'écrire plus simplement sous la formule, baptisée formule de Stirling-Pierroux :

$$n! = (n/e)^n \times \sqrt{2\pi n} \times \frac{24n+1}{24n-1}.$$

On pourra améliorer la réponse en prenant la partie entière du résultat car la méthode simplifiée dépasse toujours le résultat exact par ses décimales non significatives

Une nouvelle étude de la courbe représentant $\Delta(n!)/n!$ en %, réalisée au moyen de ma dernière calculatrice scientifique CASIO CFX-9930 GT, conduit à un ajustement de type puissance, d'équation $y = ax^b$, avec les paramètres $a = 8{,}442\,133\,42$ et $b = -1{,}003\,661\,8$ pour un coefficient de corrélation linéaire presque idéal $r = 0{,}999\,999\,6$.

Dans ce cas on peut écrire $100\Delta(n!)/n! = 8{,}44213342 \times n^{-1{,}0036618}$ ou plus simplement : $\Delta(n!)/n! = 0{,}0844213342 \times n^{-1{,}00336618}$. Soit une nouvelle formule d'approximation :

$$n! = (n/e)^n \times \sqrt{2\pi n} \times \left(1 + 0{,}0844213342 \times n^{-1{,}00336618}\right).$$

Mais il faut bien convenir que la précédente était plus confortable pour un résultat équivalent en précision.

Annexe : Tableau des Calculs

n	$n!$	Stirling	$\Delta(n!)$	$100\dfrac{\Delta(n!)}{n!}$	$\dfrac{n!}{100\Delta(n!)}$
1	1	0,92	0,08	7,786	0,128
2	2	1,92	0,08	4,050	0,247
3	6	5,84	0,16	2,730	0,366
4	24	23,51	0,49	2,058	0,486
5	120	118,02	1,98	1,651	0,606
6	720	710,08	9,92	1,378	0,726
7	5040	4980,40	59,60	1,183	0,846
8	40320	39902,40	417,60	1,036	0,966
9	362880	359536,87	3343,13	0,921	1,085
10	3628800	3598695,62	30104,38	0,830	1,205
11	39916800	39615625,05	301174,95	0,755	1,325
12	479001600	475687486,5	3314113,50	0,692	1,445
13	6227020800	6187239475	39781324,81	0,639	1,565
14	87178291200	86661001741	517289459,4	0,593	1,685
15	$1{,}3077 \times 10^{12}$	$1{,}3004 \times 10^{12}$	7243645801	0,554	1,805
16	$2{,}0923 \times 10^{13}$	$2{,}0814 \times 10^{13}$	$1{,}0868 \times 10^{11}$	0,519	1,925
17	$3{,}5569 \times 10^{14}$	$3{,}5395 \times 10^{14}$	$1{,}7391 \times 10^{12}$	0,489	2,045
18	$6{,}4024 \times 10^{15}$	$6{,}3728 \times 10^{15}$	$2{,}9569 \times 10^{13}$	0,462	2,165
19	$1{,}2165 \times 10^{17}$	$1{,}2111 \times 10^{17}$	$5{,}3231 \times 10^{14}$	0,438	2,285
20	$2{,}4329 \times 10^{18}$	$2{,}4228 \times 10^{18}$	$1{,}0115 \times 10^{16}$	0,416	2,405
21	$5{,}1091 \times 10^{19}$	$5{,}0889 \times 10^{19}$	$2{,}0233 \times 10^{17}$	0,396	2,525
22	$1{,}1240 \times 10^{21}$	$1{,}1198 \times 10^{21}$	$4{,}2492 \times 10^{18}$	0,378	2,645
23	$2{,}5852 \times 10^{22}$	$2{,}5759 \times 10^{22}$	$9{,}3491 \times 10^{19}$	0,362	2,765
24	$6{,}2045 \times 10^{23}$	$6{,}1830 \times 10^{23}$	$2{,}1505 \times 10^{21}$	0,347	2,885
25	$1{,}5511 \times 10^{25}$	$1{,}5460 \times 10^{25}$	$5{,}1615 \times 10^{22}$	0,333	3,005
26	$4{,}0329 \times 10^{26}$	$4{,}0200 \times 10^{26}$	$1{,}2905 \times 10^{24}$	0,320	3,125
27	$1{,}0889 \times 10^{28}$	$1{,}0855 \times 10^{28}$	$3{,}3554 \times 10^{25}$	0,308	3,245
28	$3{,}0489 \times 10^{29}$	$3{,}0398 \times 10^{29}$	$9{,}0602 \times 10^{26}$	0,297	3,365
29	$8{,}8418 \times 10^{30}$	$8{,}8164 \times 10^{30}$	$2{,}5370 \times 10^{28}$	0,287	3,485
30	$2{,}6525 \times 10^{32}$	$2{,}6452 \times 10^{32}$	$7{,}3576 \times 10^{29}$	0,277	3,605

Vos avantages

- Une taille humaine : accès facile aux assistants et aux professeurs.
- Une équipe de chercheurs reconnus internationalement.
- Un accompagnement intégré à l'horaire.
- Un cours de « Mathématique Élémentaire » pour faciliter la transition secondaire-université.
- De nombreux documents en ligne (`http://math.umh.ac.be/an/etudiants.php`).

Stages

Si vous hésitez quant au choix de vos études ou simplement voulez découvrir les mathématiques autrement, nous vous offrons la possibilité d'effectuer un stage au sein de notre institut. Veuillez nous contacter si vous êtes intéressé(e).

Nous contacter

Institut de Mathématique,
Université de Mons-Hainaut
Bâtiment « Le Pentagone »,
Avenue du Champ de Mars 6
B-7000 Mons (Belgique)

- email : `math@umh.ac.be`
- tél/rép : 065 37 34 12
- fax : 065 37 34 59 et 065 37 33 18
- web : `http://math.umh.ac.be/`

ACADÉMIE UNIVERSITAIRE
WALLONIE-BRUXELLES

Mathématique à Mons

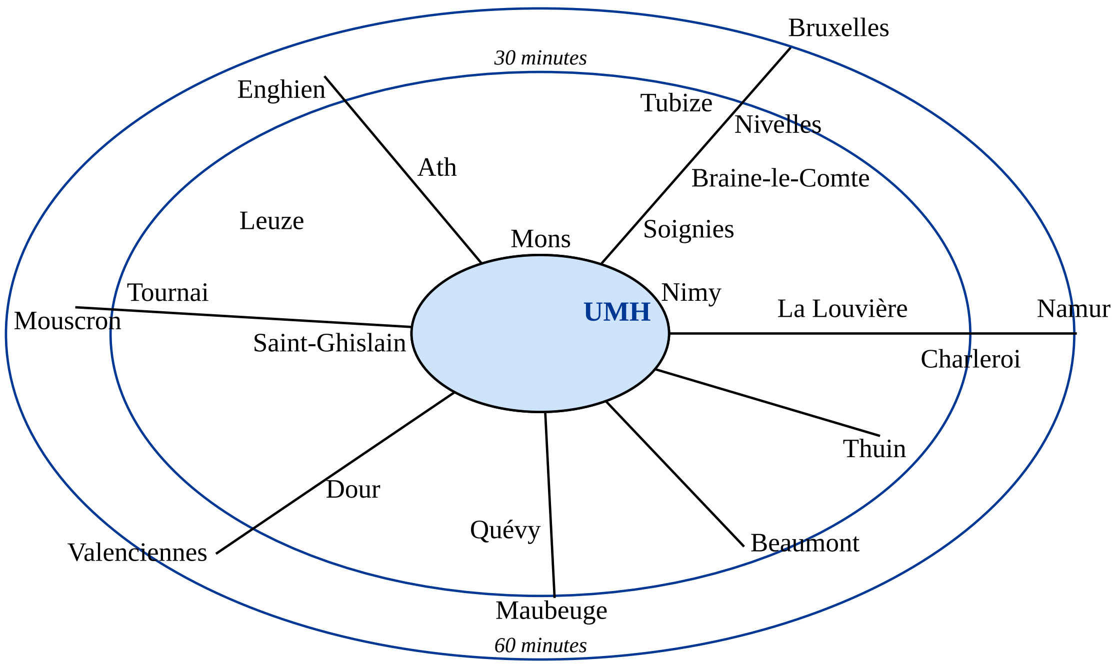
Master

- ***Mathématique finalité métiers de la recherche***
- ***Mathématique finalité métiers de l'informatique***
- ***Mathématique finalité métiers de la finance***
- ***Mathématique finalité métiers de l'enseignement***

Exempt de timbre, art. 198 du code des taxes

L'UMH est proche de chez vous !

L'UMH est proche de chez vous !



Problèmes

Claudine Festraets [1]

Jeu d'échec

Problème n° 316 de Mathématique et Pédagogie n° 153

Sur un échiquier 7×7, on choisit k des centres des 49 cases de telle sorte que 4 des k points choisis ne soient jamais les sommets d'un rectangle de côtés parallèles aux bords de l'échiquier. Quelle est la plus grande valeur de k pour laquelle ceci est possible ?

Solution de J.ANSEEUW de Roeselare

Il y a 7 colonnes, donc le nombre de paires de colonnes est $\binom{7}{2} = 21$.
Soit k_i le nombre de points situés sur la ligne i, le nombre de paires de points situés sur cette ligne est $\binom{k_i}{2} = \dfrac{k_i(k_i-1)}{2}$.

D'après le principe de Dirichlet, nous pouvons affirmer que si $\sum_{i=1}^{7} \binom{k_i}{2} > 21$, alors il y a plus de paires de points sur les lignes que de paires de colonnes, donc au moins une paire de colonnes contient au moins deux paires de points situés sur deux lignes différentes. Ces deux paires de points sont alors les sommets d'un rectangle.

Déterminons pour quelle valeur de $k = \sum_{i=1}^{7} k_i$ on a $\sum_{i=1}^{7} \binom{k_i}{2} > 21$.

$$\sum_{i=1}^{7} \binom{k_i}{2} = \frac{k_1(k_1-1)}{2} + \frac{k_2(k_2-1)}{2} + \cdots + \frac{k_7(k_7-1)}{2} > 21 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{7} k_i^2 - \sum_{i=1}^{7} k_i > 42 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{7} k_i^2 > 42 + k. \qquad (1)$$

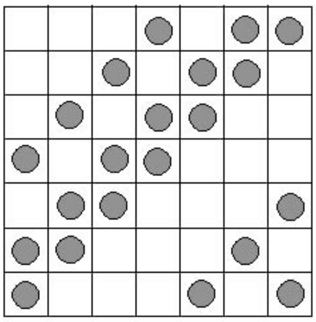
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\sum_{i=1}^{7} k_i^2 \geqslant \dfrac{1}{7}\Big(\sum_{i=1}^{7} k_i\Big)^2 = \dfrac{k^2}{7}$.

Si $\dfrac{k^2}{7} > 42 + k$, l'inégalité (1) est certainement satisfaite.

[1] Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à C. FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles ou à l'adresse e-mail hamoircl@brutele.be

Les solutions de l'équation $k^2 - 7k - 42 = 0$ sont -14 et 21. Donc pour $k > 21$, on a $k^2 - 7k - 42 > 0$ et il existe au moins quatre points sommets d'un carré.
Il suffit ensuite de montrer qu'il existe une disposition de 21 points tels que quatre quelconques d'entre eux eux ne sont jamais les sommets d'un carré.

Bonne solution de P. LE GALL de Metz. J. RASSE de Méan m'a envoyé la très jolie disposition suivante, mais n'a pas démontré que 21 était un maximum.



Système

Problème n° 317 de Mathématique et Pédagogie n° 153

Dans $\mathbb{C}$, résoudre le système

$$\begin{cases} x = y + z \\ x = y^3 = z^3. \end{cases}$$

Solution de P. LE GALL de Metz
On note j le complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
On rappelle que $j^3 = 1$ et que $1 + j + j^2 = 0$.
De plus, dans $\mathbb{C}$, on a l'équivalence : $x^3 = y^3 \Leftrightarrow x = y$ ou $x = jy$ ou $x = j^2y$.
On a donc

$$\begin{cases} x = y + z \\ x = y^3 = z^3 \end{cases}$$

si et seulement si

$$(1) \begin{cases} x = y + z \\ x = y^3 \\ y = z \end{cases} \quad \text{ou} \quad (2) \begin{cases} x = y + z \\ x = y^3 \\ jy = z \end{cases} \quad \text{ou} \quad (3) \begin{cases} x = y + z \\ x = y^3 \\ j^2y = z. \end{cases}$$

Le système (1) conduit à :

$$\begin{cases} x = y^3 \\ y^3 = 2y \\ y = z, \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x = y^3 \\ y(y^2 - 2) = 0 \\ y = z. \end{cases}$$

On obtient les solutions : $(0,0,0)$, $\left(2\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, $\left(-2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$.
Le système (2) conduit à :

$$\begin{cases} x = y^3 \\ y^3 = (1+j)y = -j^2 y \\ jy = z, \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x = y^3 \\ y(y^2 + j^2) = 0 \\ jy = z. \end{cases}$$

On obtient les solutions : $(0,0,0)$, $\left(-i, ij, ij^2\right)$, $\left(i, -ij, -ij^2\right)$.
Le système (3) conduit à :

$$\begin{cases} x = y^3 \\ y^3 = y + j^2 y = -jy \\ j^2 y = z, \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x = y^3 \\ y(y^2 + j) = y(y^2 + j^4) = 0 \\ j^2 y = z. \end{cases}$$

On obtient les solutions : $(0,0,0)$, $\left(-i, ij^2, ij\right)$, $\left(i, -ij^2, -ij\right)$.
Finalement le problème a sept solutions :

$$\Big\{(0,0,0)\,, \left(2\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}\right), \left(2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right), \\ \left(-i, ij, ij^2\right), \left(i, -ij, -ij^2\right), \left(-i, ij^2, ij\right), \left(i, -ij^2, -ij\right)\Big\}.$$

Bonnes solutions de J. ANSEEUW de Roeselare, J. FINOULST de Diepenbeek, J. OOMS de Chimay, J. RASSE de Méan et J.G. SEGERS de Liège.

Base b

Problème n° 318 de Mathématique et Pédagogie n° 153

Soient X et Y deux nombres entiers écrits en base b. Les chiffres de Y sont une permutation de ceux de X. Démontrer que $X - Y$ est divisible par $b - 1$.

Solution de J.G. SEGERS de Liège
Soit a un chiffre du nombre X, donc aussi du nombre Y.

Vu ses positions dans les nombres écrits, la valeur de a est $a \cdot b^x$ dans X et $a \cdot b^y$ dans Y, où x et y sont des exposants entiers.
Dans la différence $X - Y$, on trouve donc le terme $a \cdot b^x - a \cdot b^y$, ce qui donne $a \cdot b^y(b^{x-y} - 1)$ ou $a \cdot b^x(1 - b^{y-x})$ ou 0 selon que $x > y$, $x < y$ ou $x = y$.
Dans tous les cas, ce terme est divisible par $b - 1$. La somme de tous ces termes donne $X - Y$ qui est donc divisible par $b - 1$.

J. ANSEEUW de Roeselare, J.FINOULST de Diepenbeek, P. LE GALL de Metz, J OOMS de Chimay, A. PATERNOTTRE de Boussu et J. RASSE de Méan ont tous envoyé d'excellentes solutions.

* *
*

Les solutions des problèmes que voici doivent me parvenir pour le 1er septembre 2006 au plus tard. Ces solutions peuvent être manuscrites, mais vous pouvez aussi les envoyer à mon adresse e-mail sous la forme d'un fichier LaTeX ou à défaut au format doc ou txt. N'oubliez pas d'indiquer votre nom sur chacune des feuilles.

325. Le juste prix

(Problème inspiré de l'émission du même nom diffusée jadis sur TF1 et proposé par A. LAFORT de Nivelles)
Un candidat doit retrouver le prix d'un objet, nombre entier de quatre chiffres différents. Ces quatre chiffres, ainsi que trois croix, matérialisés sous la forme de jetons sont plongés dans une urne dans laquelle le candidat puise au hasard un jeton à la fois. Le jeu est perdu si les trois croix sont sorties avant les quatre chiffres. Quelle est la probabilité de gagner si

1. le tirage s'effectue sans remise ?
2. à chaque sortie de chiffre, le candidat doit deviner la position du chiffre au sein du nombre ; en cas d'échec, le jeton-chiffre est replacé dans l'urne ;
   – le candidat ne retient pas les positions erronées qu'il a déjà données et risque donc de commettre la même erreur plus tard ?
   – le candidat retient les positions erronées et donc ne commet plus la même erreur ultérieurement ?

326. Rectangles

Un réseau carré a comme sommets les points de coordonnées $(0,0)$, $(0,n)$, (n,n) et $(n,0)$. Dans ce réseau, combien existe-t-il de rectangles non carrés dont les sommets sont de coordonnées entières ?

327. Céviennes

Dans le triangle ABC, les droites AL, BM et CN sont concourantes et les points L, M, N appartiennent respectivement aux segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

1. Déterminer la valeur de $\dfrac{|PL|}{|AL|} + \dfrac{|PM|}{|BM|} + \dfrac{|PN|}{|CN|}$.
2. Déterminer la valeur de $\dfrac{|AP|}{|AL|} + \dfrac{|BP|}{|BM|} + \dfrac{|CP|}{|CM|}$.

Olympiades

Claudine Festraets [1]

Vous trouverez ci-dessous les solutions des trois problèmes proposés le second jour des épreuves des Olympiades Mathématiques Internationales 2005.
Les problèmes 4 et 5 ne sont pas (trop) difficiles, Mais je vous suggère de vous confronter au problème 6 avant d'en lire la solution.

4. On considère la suite a_1, a_2, ... définie par

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \ (n = 1, 2, \dots).$$

Trouver tous les entiers strictement positifs qui sont premiers avec chaque terme de la suite.
Solution
Soit p un nombre premier. On a

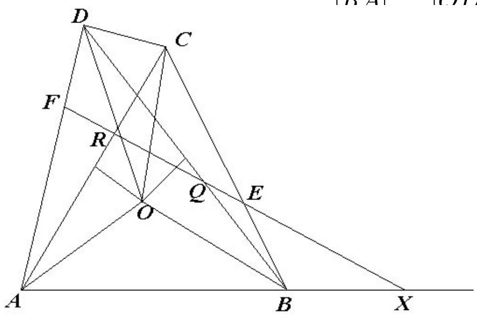
$$\begin{aligned} a_{p-2} &= 2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1 \\ 6a_{p-2} &= 3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6 \\ &\equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned}$$

p est un diviseur de $6a_{p-2}$, donc si p est différent de 2 et de 3, p est un diviseur de a_{p-2}.
Tout nombre premier différent de 2 et de 3 divise au moins un terme de la suite. Seuls 2 et 3 sont premiers avec tous les termes de la suite, car $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n \equiv (-1) \pmod{2} \equiv (-1) \pmod{3}$.

5. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe dont les côtés BC et AD sont égaux et non parallèles. Deux points E et F, respectivement intérieurs aux côtés BC et AD, vérifient $BE = DF$. Les droites AC et BD se coupent en P, les droites BD et EF se coupent en Q, les droites EF et AC se coupent en R. On considère tous les triangles PQR lorsque E et F varient. Montrer que les cercles circonscrits à ces triangles ont un point commun autre que P.

[1] Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à C. FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles ou à l'adresse e-mail hamoircl@brutele.be

Solution
Si AB et CD ne sont pas parallèles, alors EF est sécante à l'une de ces deux droites. Supposons que EF coupe AB en X.
Le théorème de Ménélaüs appliqué aux triangles CAB et DAB donne $\frac{|CR|}{|RA|} \cdot \frac{|AX|}{|XB|} \cdot \frac{|BE|}{|EC|} = -1$, $\frac{|DF|}{|FA|} \cdot \frac{|AX|}{|XB|} \cdot \frac{|BQ|}{|QD|} = -1$, d'où $\frac{|CR|}{|RA|} = \frac{|BQ|}{|QD|}$.
Si FE // AB // CD, alors $ABCD$ est un trapèze isocèle, E est le milieu de $[BC]$, F est le mileu de $[AD]$ et on a aussi $\frac{|CR|}{|RA|} = \frac{|BQ|}{|QD|}$.



Construisons les médiatrices de $[AC]$ et de $[BD]$. Elles se coupent en O.
Les triangles AOD et COE sont isométriques ($|AO| = |OE|$, $|AD| = |CB|$ et $|DO| = |OB|$). D'où $\widehat{AOD} = \widehat{COB}$, $\widehat{AOD} + \widehat{DOC} = \widehat{COB} + \widehat{DOC}$ et de là $\widehat{AOC} = \widehat{BOC}$.
Les triangles isocèles AOC et BOD sont donc semblables.
Puisque $\frac{|CR|}{|RA|} = \frac{|BQ|}{|QD|}$, la similitude qui applique le triangle AOC sur le triangle BOD applique aussi R sur Q. Dès lors $\widehat{ORC} = \widehat{QOB}$.
Dans le quadrilatère $PROQ$, les angles en R et en Q sont supplémentaires, donc ce quadrilatère est inscriptible et le cercle circonscrit au triangle PQR passe par le point fixe O quand E et F varient.

6. Dans un concours mathématique, 6 problèmes ont été proposés aux concurrents. Toute paire de problèmes a été résolue par strictement plus de deux cinquièmes des concurrents. Personne n'a résolu les six problèmes. Montrer qu'au moins deux concurrents ont résolu, chacun, exactement 5 problèmes.

Solution
Soit n le nombre total de concurrents, n_i le nombre de concurrents ayant résolu exactement i problèmes ($n_6 = 0$ car aucun concurrent n'a résolu tous les problèmes) et c_{ij} le nombre de concurrents ayant résolu la paire de

problèmes i, j (les problèmes étant numérotés de 1 à 6).
Il y a $\binom{6}{2} = 15$ paires de problèmes et chaque paire a été résolue par au moins $\frac{2n+1}{5}$ concurrents, donc

$$\Sigma c_{ij} \geqslant 15 \cdot \frac{2n+1}{5} = 6n+3$$

D'autre part, si un concurrent a résolu i problèmes, il a résolu $\binom{i}{2}$ paires de problèmes, d'où

$$\begin{aligned} \Sigma c_{ij} &= n_0 \cdot 0 + n_1 \cdot 0 + n_2 \cdot 1 + n_3 \cdot 3 + n_4 \cdot 6 + n_5 \cdot 10 \\ 6n+3 &\leqslant n_2 + 3n_3 + 6n_4 + 10n_5 \\ 4n_5 &\geqslant 6n_0 + 6n_1 + 5n_2 + 3n_3 + 3 \end{aligned}$$

Supposons que $n_5 = 1$, alors $4 \geqslant 6n_0 + 6n_1 + 5n_2 + 3n_3 + 3$, ou encore $6n_0 + 6n_1 + 5n_2 + 3n_3 \leqslant -1$, ce qui entraîne $n_0 = n_1 = n_2 = n_3 = 0$, $n = n_4 + 1$ et $\Sigma c_{ij} = 6n_4 + 10 = 6n + 4$.
Remarquons qu'il n'y a plus que des concurrents ayant résolu 4 problèmes et le concurrent ayant résolu 5 problèmes.
Il est impossible que $\forall i, j$, $c_{ij} = \frac{2n+1}{5}$, car alors $\Sigma c_{ij} = 2n+3$; les c_{ij} ne peuvent être tous égaux car $6n+4$ n'est pas divisible par 15, donc 14 des c_{ij} sont égaux à $\frac{2n+1}{5}$ et le dernier est égal à $\frac{2n+1}{5} + 1$.
Désignons par G le concurrent ayant résolu 5 problèmes et supposons qu'il n'ait pas résolu le problème 6.
Supposons aussi que le problème 1 n'appartienne pas à la paire (i, j) de problèmes tels que $c_{ij} = \frac{2n+1}{5} + 1$.
Soit $A = c_{16} + c_{26} + c_{36} + c_{46} + c_{56}$ et $B = c_{12} + c_{13} + c_{14} + c_{15} + c_{16}$.

$A = 5 \cdot \frac{2n+1}{5} = 2n+1$ ou $A = 4 \cdot \frac{2n+1}{5} + \frac{2n+1}{5} + 1 = 2n+2$ et $B = 5 \cdot \frac{2n+1}{5} = 2n+1$.
Si un concurrent a résolu le problème 6, il a aussi résolu trois autres problèmes, donc A est un multiple de 3.
Si un concurrent a résolu le problème 1, il s'agit soit de G et il a résolu 4 autres problèmes, soit d'un autre concurrent et celui-ci a résolu trois autres problèmes, donc $B \equiv 1 \pmod 3$.
On a donc $2n+1 \equiv 0 \pmod 3$ ou $2n+2 \equiv 0 \pmod 3$ et $2n+1 \equiv 1 \pmod 3$, ce qui est impossible. Donc le nombre de concurrents ayant résolu 5 problèmes est strictement supérieur à 1.

UN PROJET CAPP 2006 :

La Capp vous propose de plonger dans l'atmosphère unique de Rome, du

lundi 30 octobre au vendredi 3 novembre 2006.

Ce voyage sera piloté par les professeurs A. Beine, Mr et Mme A. Grognard.

AU PROGRAMME:

Rome Antique :

Colisée, Panthéon, Forum, …

Rome Baroque :

Palais, Eglise, Piazze, …

Le Vatican et Michel Ange :

Musée du Vatican, la Sixtine

Rome Moderne :

Fontaine de Trévi, la Dolce Vita,
sur les traces d'une découverte fortuite d'Enrico Fermi

UN PROJET CAPP 2006 :

Le prix de notre voyage, comprenant les vols Gosselies-Rome A/R, le logement et petit-déjeuner à l'hotel Princess **, est de 5oo EURO.**

RESERVEZ DES AUJOURD'HUI
et soyez parmi les 25 professeurs du voyage

En versant un accompte de 100 EUR sur le compte 001-0404693-85 de A. Grognard, 63 av de la citadelle, 5100 Jambes
Tél./Fax : 081/ 30 26 86 – andre.grognard@skynet.be

Pensez à préciser à André vos coordonnées (nom, adresse, tel., e-mail)

Bibliographie

Jacques Bair

Les mathématiques dans le monde scientifique contemporain,
(Rapports sur la science et la technologie, n° 20),
Académie des sciences, Editions Tec & Doc, Paris,
novembre 2005, 329 pp.

Sur l'initiative du Ministère français de l'Éducation nationale, de la Recherche et de la Technologie, l'Académie des Sciences réalise périodiquement différents rapports sur la science et la technologie. Le rapport numéro 20, rédigé en 2005 avec Jean-Christophe Yoccoz comme animateur, est consacré aux *mathématiques dans le monde scientifique contemporain.*

L'objectif de cet ouvrage ne consiste pas à traiter de théories mathématiques pour elles-mêmes, mais bien à montrer comment les mathématiques interagissent de nos jours avec certaines sciences, à savoir la physique (chapitre 1), l'astronomie (chapitre 2), la chimie (chapitre 3), l'informatique (chapitre 8), l'économie (chapitre 9) et les sciences de la vie avec la biologie (chapitres 4, 5 et 6), les sciences médicales (chapitres 4 et 5), l'écologie (chapitre 6), les neurosciences (chapitre 7). Une dernière partie est consacrée à donner de nouveaux champs d'action pour les mathématiques dans la société (chapitre 10).

Tous ces chapitres, qui sont rédigés par d'éminents spécialistes dans leur discipline, se réfèrent le plus souvent à des recherches de pointe effectuées récemment sur les sujets traités.

Il est évidemment impossible de résumer fidèlement un travail aussi volumineux et riche. C'est pourquoi, nous allons nous contenter de relever quelques thèmes généraux qui nous semblent importants et qui se retrouvent dans plusieurs chapitres. Bien entendu, cette sélection est subjective et non exhaustive.

Les mathématiques ne fournissent pas seulement des outils aux autres sciences, mais elles en constituent un langage, ainsi que l'affirmait déjà Galilée : *On ne peut comprendre ce livre immense perpétuellement ouvert devant nos yeux, l'Univers, si l'on n'apprend pas d'abord à connaître la langue et les caractères dans lesquels il est écrit : il est écrit en langue mathématique et ses caractères sont des figures géométriques sans l'intermédiaire desquelles il est impossible d'en comprendre un mot* (page 12).

Mais les mathématiques ne se contentent pas de former un langage pour décrire la nature. Elles forment une discipline scientifique à part entière qui se propose de développer des concepts, des résultats, des méthodes et une démarche spécifique. Les théories mathématiques sont souvent construites de manière abstraite, sans chercher à résoudre un problème concret ; il est d'ailleurs surprenant de constater qu'elles sont exploitées dans la pratique avec une « déraisonnable efficacité » comme le soulignait le physicien américain E. Wigner en 1960. Par exemple, la théorie des nombres, qui, pour le mathématicien anglais G. Hardy ne représentait plus guère d'utilité pour le monde réel vers 1940, a permis le développement contemporain de l'internet, des DVD, de la téléphonie mobile, ...

Le développement des mathématiques doit également beaucoup aux autres sciences. D'une part, les mathématiciens sont invités à résoudre, avec des outils qu'ils maîtrisent, des problèmes concrets soulevés par des situations rencontrées dans d'autres disciplines ; d'autre part, ils se voient poser par leurs collègues des questions théoriques qui ne peuvent pas être abordées efficacement par des approches classiques, ce qui nécessite la création de théories mathématiques nouvelles. Les aspects fondamentaux et appliqués de la recherche sont ainsi de plus en plus indissociables et imbriqués.

Les progrès récents et spectaculaires des mathématiques sont notamment dûs à ceux de l'informatique, tant sur le plan théorique qu'au niveau de la puissance de calculs des ordinateurs. Par exemple, la recherche en informatique est à l'origine de la nouvelle théorie de complexité qui, combinée à des résultats de logique tels que le théorème de Gödel, change radicalement la perception que nous avons des mathématiques en montrant notamment que des assertions vraies ne sont pas forcément démontrables. Par ailleurs, la résolution de certains problèmes non linéaires n'est possible que numériquement avec l'aide de puissantes machines.

Cette association judicieuse des mathématiques et de l'informatique a permis la considération, dans de nombreux domaines, de modélisations sans cesse plus fines de systèmes complexes. En guise d'exemples, peu connus mais choisis parmi tant d'autres, signalons les modélisations de la cicatrisation des blessures en médecine, de la perception des images et des phénomènes en neurosciences, d'une gestion des ressources naturelles en écologie, des choix de consammateurs en économie, ...

Ce livre montre, sur différents cas concrets, l'intérêt pratique d'un modèle : principalement, il se prête à des calculs et permet la variation de paramètres.

En résumé, ce rapport donne un excellent aperçu des interactions des mathématiques avec de nombreuses autres sciences ; il donne de la sorte une *meilleure visibilité des mathématiques et en montre l'intérêt pour la compréhension des avancées scientifiques et technologiques* (B. Parzysz, p. 301).

Il se termine par diverses recommandations, dont de nombreuses de nature pédagogique, mettant notamment en évidence la nécessité de faciliter la pratique des mathématiques dans les sciences.

Il va sans dire que pareilles réflexions doivent interpeller tout enseignant des mathématiques ... pour qui la découverte de ce livre, de lecture parfois ardue pour quelqu'un de non initié, sera sans conteste très enrichissante.

J. Bair

Le coin du trésorier

R. Scrève

Tarifs (Janvier 2006)

Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent *Mathématique et Pédagogie*, *SBPM-Infor* et les deux *Math-Jeunes*.

Belgique :
– Cotisation ordinaire : 24 €
– Cotisation multiannuelle (5 ans) : 110 €
– Cotisation familiale (réservée aux couples cohabitant. Les intéressés ne reçoivent qu'un exemplaire des publications, mais sont membres à part entière et participent donc aux élections) : 30 €
– Cotisation réduite (réservée aux étudiants et aux sans-emploi) : 15 €.

Europe : 65 € (non `PRIOR`), 72 € (`PRIOR`)
Autres pays : 70 € (non `PRIOR`), 79 € (`PRIOR`)

Abonnement à *Mathématique et Pédagogie*

Belgique : 30 €.
Europe : 50 € (non `PRIOR`), 54 € (`PRIOR`).
Autres pays : 53 € (non `PRIOR`), 58 € (`PRIOR`).

Anciens numéros :
Avant 2005 : 0,75 €/N° + frais d'expédition.
Année5 : 2,50 €/N° + frais d'expédition.
Frais d'expédition : Belgique : 1,80 €, Europe : 4,50 €, Autres pays : 6 €.

Abonnement à *Math-Jeunes* ou *Math-Jeunes Junior*

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, supérieur et inférieur respectivement, sont idéalement pris de manière groupée par l'intermédiaire d'un professeur.

Abonnements groupés (au moins 5).

• Abonnements groupés à une des revues (3 numéros)	Belgique : 4 €
• Abonnements groupés aux deux revues (6 numéros)	Belgique : 8 €

Abonnements individuels.

• Abonnements à une des revues (3 numéros)

Belgique : 6 €. Europe ([1]) : 18 € (non PRIOR), 20 € (PRIOR).
Autres pays : 19 € (non PRIOR), 22 € (PRIOR).

• Abonnements aux deux revues (6 numéros)

Belgique : 12 €. Europe : 24 € (non PRIOR), 26 € (PRIOR).
Autres pays : 25 € (non PRIOR), 28 € (PRIOR).

Anciens numéros :

Avant 2002–2003 : 0,25 €/N° + frais d'expédition.
Année 2003–2004 : 0,50 €/N° + frais d'expédition.
Frais d'expédition : Belgique : 1,50 €, Europe : 2,50 €, Autres pays : 3 €.

Bulletin de l'APMEP

Les membres de la SBPMef peuvent, par versement à son compte, devenir membres de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (France). Le prix de l'abonnement est de 44 €. Ils recevront le *Bulletin* de l'APMEP, le BGV (*Bulletin à Grande Vitesse*) et *PLOT*.

Les membres de la SBPMef peuvent aussi commander par celle-ci les publications de l'APMEP ; ils bénéficient du prix « adhérents ».

Autres productions (brochures ou CD-Rom)

Les prix indiqués sont les prix des publications ; les frais d'expédition (port et emballage) sont en sus. Les prix réduits sont réservés aux membres de la SBPMef ou de sociétés associées (comme l'APMEP) et aux étudiants. N'hésitez pas à consulter notre secrétariat ou à visiter notre site Internet.

Pour toutes nos publications non périodiques, à partir du dixième exemplaire, toute la commande bénéficie d'une réduction de 10 %.

Modalités de paiements

Pour effectuer une commande, versez le montant indiqué sur un des comptes suivants :

Si vous habitez en Belgique : Compte 000-0728014-29 de SBPMef.

Si vous habitez en France : Compte CCP Lille 10 036 48 S de SBPMef.

Si vous habitez ailleurs : Virement international sur l'un de nos deux comptes avec les références internationales suivantes :

CCP BELGIQUE : IBAN BE26 0000 7280 1429 BIC BPOTBEB1
ou CCP LILLE : IBAN FR68 2004 1010 0510 0364 8S02 683 BIC PSSTFRPPLIL

	Prix plein	Prix réduit	Frais d'expédition
Séries RENOVER			
Série 1 (n° 12)	1 €	/	T1
Série 2 (n° 7 à n° 11 et n° 13)	5 €	/	T2
Série 3 (n° 14)	5 €	/	T2
Les 3 séries	7,50 €	/	T2
Dossiers d'exploration didactique			
Dossier 2 (Autour du PGCD)	1,80 €	1,20 €	T1
Dossier 3 (Isomorphisme et Dimension)	1,80 €	1,20 €	T1
Dossier 7 (Vers les infiniment petits)			
Simone Trompler et Guy Noël	6 €		T1
Dossier 8 (La démonstration en géométrie plane dans les premières années de l'enseignement secondaire)			
Claude Villers et alii	9 €		T3
Dossier 9 (Des démonstrations à la rencontre des compétences à travers de thèmes)			
Claude Villers et alii	9 €		T3
Jacques Bair, Mathématique et Sport	5 €	3,70 €	T1
François Jongmans			
Eugène Catalan, Géomètre sans patrie, ...	12 €	9,50 €	T2
G. Robert, CD-Rom, logiciels mathématiques	5 €	/	T1
Recueils de questions des OMB			
Tome 5	6 €		v. ci-dessous

Frais d'expédition (non *prior*)

	Belgique	Europe	Autres pays
Tarif 1	1,80 €	4,50 €	6 €
Tarif 2	3,50 €	6,50 €	10 €
Tarif 3	5 €		
Tarif 4	7 €		

Pour les expéditions *prior* : consulter le secrétariat.

Pour la définition d'« Europe », voir les tarifs postaux.

Pour tout problème, consulter le secrétariat.