Photo de couverture : *Cylindres paraboliques (Igreja São Francisco de Assis)*, (Belo Horizonte, Brésil, aout 2005) — Photo P. Dupont

Mathématique
et
Pédagogie

Sommaire

Articles

Rubriques

Nº 158 Septembre–Octobre 2006

NOTE

- Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse :
Pascal Dupont, Rue du Stampia 77, B - 1390 Grez-Doiceau.
Courrier électronique : `pascal.dupont@ulg.ac.be`
- Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique *stricto sensu*, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques, &c.
- Les auteurs sont responsables des idées qu'ils expriment. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.
- Les auteurs sont invités à envoyer leurs articles encodés sur un CD-rom ou par courrier électronique. L'usage de LaTeX est vivement recommandé ; d'autres traitements de texte ne devraient être utilisés que pour des textes ne comportant pas de formules ; le format « texte seul » est finalement encore préférable. À défaut, les textes seront dactylographiés ; dans ce cas, les illustrations seront des documents de bonne qualité (photographies contrastées, figures dessinées en noir et avec précision) prêts à être scannés. *Les textes devant être réencodés risquent de voir leur délai de parution allongé de manière appréciable.*
- Dans tous les cas où l'article en contient, les figures seront annexées dans des fichiers séparés. Leur qualité est extrêmement importante ; en particulier, des documents au format JPEG ne peuvent pas avoir été trop comprimés.
- L'auteur mentionnera dans l'article ses prénom, nom et adresse (personnelle ou professionnelle) ainsi que l'institution où il travaille et, éventuellement, une liste de mots clés (10 maximum).
- La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous.
Pour les livres :
Dieudonné J., *Foundations of Modern Analysis*, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pp.
Pour les articles :
Gribaumont A., Les structures de programmation, *Mathématique et Pédagogie*, **36** (1982), 53–56.
- Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée ; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour corriger cette épreuve et la renvoyer à la rédaction.
- MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

Éditeur responsable : Pascal Dupont, Rue du Stampia 77, 1390 Grez-Doiceau.

Publié avec l'appui de l'Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Service général du Pilotage du système éducatif.

In memoriam

Hommage à plusieurs voix

Une figure marquante de la SBPMef nous a quittés. Jean Wilmet s'est éteint ce 19 juin 2006, entouré de sa famille.

Durant une quarantaine d'années, son action au sein de notre Société fut importante et variée. Membre du comité depuis 1965, il fut Président de la SBPMef de 1985 à 1993. Un Président attentif à donner la parole à tous, tenant compte de tous les avis mais aussi un Président tenace qui défendait avec intelligence et fermeté les projets qu'il croyait bons pour la Société. Homme de conviction, il a, à travers ses nombreux éditoriaux dans Mathématique et Pédagogie, exprimé sans concession ses idées sur les mathématiques, leur enseignement, leur place dans la Société civile. En relisant ceux-ci, le caractère de l'homme transparait : ils sont empreints d'humanisme, de « bon sens paysan », d'enthousiasme, de respect et d'optimisme.

Jean était aussi très proche des jeunes comme l'atteste son investissement pour les différentes olympiades. Il aimait assister aux remises des prix de l'OMB mais ce qui lui tenait le plus à cœur était certainement la préparation et la participation à l'Olympiade Mathématique Internationale. Son enthousiasme à travailler avec nos jeunes élites était réel, et il aimait parler des belles solutions que les étudiants avaient trouvées. Fin des années 80, il fut obligé pour des raisons de santé de renoncer à certaines de ses activités. Je l'ai alors remplacé à l'OMI et j'ai pu constater combien il était apprécié par les leaders des autres pays. Il resta néanmoins attentif aux résultats de nos sélectionnés et ne manquait pas chaque fois que l'on se voyait de prodiguer quelques conseils.

Jean était un mathématicien de grande qualité et un excellent pédagogue. Il avait acquis une grande compétence en statistiques, compétence dont il nous faisait profiter lors des congrès à travers des exposés vivants et originaux. Il aimait aussi résoudre des problèmes. Chaque année, il s'attaquait au test AIME essayant de faire mieux que les jeunes.

Nous n'étions pas à proprement parler des amis mais nous nous rencontrions de temps en temps avec un réel plaisir. Ainsi, début aout 2005, Jean et Monique nous ont accueillis dans leur maison des Corbières au milieu de cette nature qu'il aimait tellement et dont il voulait faire partager les trésors. Nous avons abordé de nombreux sujets autour d'une blanquette de Limoux mais nous n'avons pu éviter ni la SBPMef ni les Olympiades Mathématiques Internationales.

Jean était un grand amoureux de la chasse dont il défendait le bien-fondé avec verve et talent. Il était intensément attaché à sa famille et très fier de ses petits enfants avec lesquels il aimait jouer aux dames ou au football. Il était profondément croyant mais aussi très soucieux de ne pas porter atteinte à la liberté d'autrui et restera dans nos mémoires comme un humaniste moderne, généreux, amoureux des mathématiques.

Gérald Troessaert

* *
*

Jean Wilmet, c'était d'abord une présence. Dès la première rencontre avec lui, on mesurait son dynamisme, la force de ses convictions, son ardeur à les défendre. On pouvait ne pas toujours être d'accord avec ses opinions, les échanges restaient constructifs.

À la présidence de la SBPMef, il devait défendre constamment le principe de la participation des enseignants aux décisions qui les concernent à quelque niveau que ce soit. En particulier, il était soucieux de ce que la Société soit réellement représentative des professeurs de mathématique, de tous les niveaux. C'est ainsi qu'il fut la cheville ouvrière d'une opération baptisée « Bilan de quinze ans de réforme » qui, comme le nom l'indique, recueillit vers le milieu des années 80 les opinions des membres de la Société sur les résultats de la mise en pratique de ce que l'on a appelé les programmes de mathématique moderne.

Plus tard, au début des années 90, lorsque le ministre de l'époque chargea une commission dite « commission Danblon » de rédiger un rapport concernant l'enseignement des mathématiques, il soumit au conseil d'administration la décision de créer une commission interne à la SBPMef afin de réagir aux prises de position de cette instance officielle et de représenter notre Société aux réunions auxquelles elle était invitée. Ce fut la « commission Danblon bis » au sein de laquelle Jean joua un rôle de premier plan. il promut notamment la rédaction et la publication d'un « livre blanc » dans lequel la SBPMef définissait ses opinions concernant l'enseignement des mathématiques et son organisation, des options qui n'ont jamais été infirmées dans la suite.

Jean Wilmet eut encore bien d'autres activités au sein de la SBPMef, il serait difficile d'en faire la liste. Il s'était particulièrement investi dans la préparation des élèves représentant la Belgique francophone à l'Olympiade Mathématique Internationale.

Toujours, il remplissait ses engagements consciencieusement et méticuleusement. Jusqu'à son décès, il resta membre actif du jury régional des Olympiades Mathématiques Belges.

Guy Noël

* *
*

Quelques souvenirs datant de la présidence de J. Wilmet

Fin des années 1980, Jean Wilmet, Président de la SBPMef, me demanda de faire partie du Conseil d'Administration de la Société qu'il dirigeait de main de maitre ; souhaitant élargir d'une manière équilibrée son équipe dirigeante, il me sollicita pour, je crois, une double raison : il cherchait à s'adjoindre la collaboration d'un représentant de l'Université de Liège (jusqu'alors peu représentée au sein de la Société) et se montrait très intéressé par mon souci permanent de montrer l'utilité des mathématiques, notamment en dehors de la discipline elle-même, et spécialement dans la vie courante et dans les applications rencontrées dans le monde des affaires ou dans l'univers économique.

Son rôle important joué au sein de la Société pendant ses huit années de présidence a été bien résumé par Guy Noël dans l'éditorial de *M&P* 93.

En 1990, il me confia la responsabilité de la revue *M&P*, que j'ai dirigée pendant une dizaine d'années. Au titre de directeur de la revue, j'avais des contacts assez privilégiés avec le Président, et, notamment, je recevais son éditorial, pour chaque numéro et avec une ponctualité rare. Il s'agissait le plus souvent d'un texte assez court (généralement d'une petite page), rédigé dans un style direct et très clair, dans lequel il exprimait, avec simplicité mais aussi avec conviction et sans concession, ses idées sur les mathématiques et leur enseignement, ainsi que sur le rôle à jouer par la Société en ce domaine.

Je voudrais rappeler brièvement quelques thèmes que Jean Wilmet aimait à évoquer et qui m'ont particulièrement marqué ; à cet effet, je citerai quelques lignes sélectionnées parmi ses éditoriaux.

Humanisme. « Au delà du débat de la formation mathématique, je crois qu'un problème fondamental est posé : celui de la découverte d'un nouvel humanisme. [...] En conclusion, l'humanisme littéraire, qui a été à l'honneur en Europe occidentale depuis plusieurs siècles, ne doit pas être remplacé par un humanisme scientifique mais complété par celuici. » (*M&P* 64). « Participer à la création de ce nouvel humanisme peut être une tâche essentielle pour les professeurs de mathématiques. » (*M&P* 60).

Probité intellectuelle. « En ce qui concerne spécialement les scientifiques (et singulièrement les professeurs de mathématiques !), une tâche importante est à réaliser dans notre époque troublée où la supercherie est trop présente : l'éducation au discernement et à la probité intellectuelle. » (*M&P* 78).

Sur le rôle des mathématiques. « Bien que le rôle sélectif des mathématiques soit moins marqué en Belgique qu'en France, je crois qu'il faudrait plus insister sur leur rôle de formation de l'esprit. Cette formation s'acquiert par l'éducation à la réflexion, l'apprentissage des raisonnements corrects, le développement de l'intuition et de l'esprit inventif par la résolution de problèmes. » (*M&P* 64).

Enseignement équilibré. Analysant la façon dont les participants belges à des Olympiades internationales avaient essayé de résoudre une question de géométrie, Jean Wilmet écrivait : « Il semble donc que nos élèves, même les plus brillants, soient beaucoup mieux formés maintenant en géométrie des transformations qu'en géométrie « comme on l'étudiait avant les réformes ». Les deux approches n'ont-elles pas leur richesse ? Un enseignement équilibré, montrant ce que chacune peut apporter ne doit-il pas être mieux recherché ? » (*M&P* 63).

Mission de l'enseignement. « L'enseignement est fait pour l'élève. L'adolescent de 1990 est très différent de celui de 1965. Les stéréotypes ont changé. L'information (scientifique, culturelle, générale, ...) lui est fournie de plus en plus par les média. L'école, parallèlement, doit privilégier sa mission de formation. » (*M&P* 78).

Bipolarité des mathématiques. « Depuis toujours, les mathématiques ont présenté deux facettes : celle d'une science intrinsèque forgeant ses propres instruments de développement ; celle aussi d'une discipline inventant des outils destinés aux sciences appliquées, à l'économie, aux sciences humaines... Ces deux aspects sont d'ailleurs souvent mêlés. » (*M&P* 68).

Enthousiasme. « Ces jeux sont là pour montrer que, dans l'enseignement aussi, l'enthousiasme existe et cela n'est-il pas l'essentiel ? » (*M&P* 68, à propos des Olympiades mathématiques). « Ce qui me semble surtout nécessaire est de restaurer les conditions qui permettent d'enseigner dans l'enthousiasme. » (*M&P* 74).

Conditions du métier. « L'attention doit être attirée surtout sur les conditions d'exercice de notre métier. Une trop grande mobilité des jeunes professeurs, l'absence de structures où la réflexion en commun, où l'entraide entre collègues d'une même discipline sont rendues possibles, ... »(*M&P* 74).

Revalorisation morale. « L'inventaire des besoins de l'enseignement est malaisé à établir. Je crois qu'il est nécessaire de dépasser le seul point de vue matériel, qu'il revête la forme de chèques repas ou autre. Ce côté est important. L'éducateur doit être dégagé de trop graves soucis matériels et sa mission doit pouvoir être exercée de façon exclusive auprès des jeunes.

Au delà de ces besoins, cependant, l'essentiel me semble être que le professeur bénéficie s'une revalorisation morale radicale. Ainsi, il pourra prendre le temps de réfléchir à l'évolution du monde qui l'entoure.

Tout en restant un spécialiste de sa discipline, il devra être surtout un maitre proposant des idées-forces à ses élèves mais en se gardant de les imposer. » (*M&P* 78)

À propos de la SBPMef. « Les activités sont nombreuses à la Société, c'est pourquoi tous ceux qui ont envie de participer activement à notre vie associative sont les bienvenus… N'hésitez pas à poser votre candidature si vous désirez travailler à l'amélioration de notre enseignement. » (*M&P* 72).

De telles pensées me semblent encore parfaitement d'actualité aujourd'hui. Écrites avec beaucoup de clairvoyance, sans faire appel à un jargon sophistiqué, elles abordent des thèmes qui me paraissent essentiels pour l'enseignement de notre discipline.

Par son travail incessant, ses analyses lucides, ses prises de position courageuses en faveur des professeurs de mathématiques, ses grandes qualités humaines, son bon sens et ses réflexions profondes sur la formation mathématique des jeunes, Jean Wilmet a fort bien servi la cause de sa chère discipline ; il a transmis beaucoup d'idées dont tout professeur de mathématiques pourrait utilement s'inspirer pour progresser dans sa mission éducative.

Jacques Bair

* *
*

En hommage à Jean Wilmet

C'est au cours des années 1960 que j'ai rencontré Jean Wilmet, à Mesvin, son lieu de résidence à l'époque. Ce n'était pas dans le cadre d'activités liées aux mathématiques mais bien à l'occasion d'une activité de détente car, homme de participation, il s'occupait activement des œuvres paroissiales et collaborait à l'organisation d'un « rallye touristique » fort prisé dans la région.

Puis, au tout début de l'année 1971, j'ai à nouveau croisé sa route, à la SBPM cette fois, lorsque je suis entré au Comité de rédaction de *Mathematica & Paedagogia*, revue de notre Société alors bilingue. Je l'ai ensuite rejoint au Comité de l'association. Nous avons ainsi effectué, dans et pour celle-ci, un parcours commun de plus de deux décennies.

Avec les autres membres du comité de l'association et des commissions, nous avons connu, tout au long de ces années, des moments de grandes satisfactions mais parfois aussi des déceptions. Il y eut des périodes de quiétude mais quelques fois aussi des tumultes. Homme de compromis mais certainement pas de compromissions, Jean affirmait toujours qu'il fallait raison garder et ne pas confondre l'opposition des idées avec l'opposition des personnes.

Durant toutes ces années passées comme membre du comité et notamment en tant que Président de notre association, Jean s'est efforcé de persuader les enseignants qu'ils exercent un métier formidable et exaltant même si la mission est parfois difficile à assumer. Il était convaincu que ce métier comporte des défis permanents à relever : mettre en appétit d'apprendre les jeunes qui sont confiés à l'école, les aider à franchir tous les obstacles qui se dressent devant eux dans leur parcours de formation, éveiller leur curiosité intellectuelle, leur faire éprouver le plaisir d'apprendre, leur permettre d'acquérir le sens de la recherche, ...

Jean était également persuadé qu'en matière d'enseignement et de formation, l'objectif ne constituait pas à réduire artificiellement les obstacles mais bien au contraire à faire montre d'exigences raisonnables aptes à préparer le plus grand nombre à affronter le tumulte de la vie.

Parmi toutes les actions et activités de la SBPMef, il en est deux que Jean appréciait pariculièrement. L'Olympiade Mathématique Internationale qui lui valut des moments de grande fierté dont particulièrement celui de la médaille d'or remportée en 1985 à Helsinki par Philippe Alphonse et aussi l'organisation de notre congrès annuel dont il disait qu'il constituait une des rares occasions pour les membres de se rencontrer de manière conviviale, d'échanger des idées et donc pour la SBPMef de vivre réellement. C'est un homme généreux, soucieux des autres, qui nous a quitté. Avec la collaboration attentive et efficace de Monique son épouse qui l'accompagna tout un temps dans le parcours associatif, il a su insuffler de la vie dans notre association et nous devons lui en savoir gré.

Il continuera certainement à vivre encore longtemps dans la mémoire, l'esprit et le cœur de ceux qui l'ont connu.

Claude Villers

* *
*

Hommage à Jean Wilmet

Évoquer une amitié, c'est aussi — qu'on m'en excuse — parler de soi.

C'est en 1983 que Françoise et moi avons rencontré Jean et Monique Wilmet pour la première fois : c'était au Domaine des Masures de Han-sur--Lesse, dans le cadre de la préparation de l'équipe belge francophone aux

Olympiades Mathématiques Internationales. Pour moi, au début, ces séances de préparation représentaient un plaisir passablement élitiste : j'enseignais à la meilleure classe de maths en Communauté Française ! Mes contacts avec Jean ont certainement eu pour effet d'humaniser le jeune mathématicien que j'étais, en me faisant prendre conscience de ce que les Olympiades de Maths, quel que soit le niveau, sont une aventure humaine avant d'être une aventure intellectuelle.

Toutes les discussions que Jean, ancien officier de réserve, et moi, futur objecteur de conscience, avons eues durant ces stages de Han autour de la situation politique du moment, ont contribué à nous rapprocher, au point que Jean, alors Président de la SBPMef, a fait agréer celle-ci pour qu'elle puisse embaucher des objecteurs de conscience. Ceci m'a permis de passer, d'octobre 1984 à mai 1986, un service civil riche en rencontres de toute sorte, avec des étudiants, des profs, des directeurs d'école, des inspecteurs... Je reste très reconnaissant à Jean de m'avoir permis de vivre ainsi ce service civil, que je n'ai jamais regretté.

Sur le plan mathématique, mes conversations avec Jean m'ont fait prendre conscience de l'importance de la tradition orale dans la transmission d'une certaine culture mathématique. C'était un vrai régal que d'entendre Jean raconter des histoires sur ses anciens professeurs de l'Université de Louvain dans les années 1950. En particulier ses histoires hilarantes sur Georges Lemaître, peut-être déformées par le miroir du souvenir, me rendaient plus proche la grande figure du père du « Big Bang », par ce qu'elles pouvaient révéler de petits travers. C'est sous l'influence des histoires de Jean que j'essaie moi-même d'égayer mes propres cours par des anectodes sur les « grands bonzes » que j'ai eu la chance de côtoyer. C'est une façon de transmettre les aspects sociaux de la profession.

Notre départ en Suisse en 1988 a affecté les amitiés que Françoise et moi avions en Belgique : un certain nombre d'entre elles se sont étiolées (« loin des yeux, loin du cœur »), mais celles qui ont survécu en sont sorties renforcées. C'est le cas de notre amitié avec Monique et Jean qui ont généreusement ouvert à la famille Valette, à partir de 1991, leur résidence secondaire de Molières, dans les Corbières. Pour ceux qui ne connaissent pas Molières, imaginez un village perdu au fond d'une vallée, largement ruiné, avec trois maisons habitées, et encore pas toute l'année ; la route qui y mène (une bande et demie de large) voit passer une à deux voitures à l'heure, à tout casser. Lors de notre premier séjour à Pâques, en 1991, la maison n'avait pas l'électricité, et Jean mettait tous les soirs quelques litres d'essence dans le groupe électrogène, qu'on laissait tourner jusqu'au bout : la panne d'essence marquait, au sens propre, l'extinction des feux ! Jusqu'à notre dernière visite à l'été 2005, nous avons vu Molières « s'embourgeoiser » (arrivée de l'électricité, du téléphone), mais il y a toujours, le soir, la même qualité de silence... C'est là que nous avons découvert le Jean Wilmet coureur des bois, et qu'il a modifié notre vision de la nature, nous apprenant la signification de mille et un détails qui, sans lui, nous seraient passés inaperçus : là où nous ne voyions que quelques branchettes brisées, lui distinguait « une autoroute de sangliers ». C'est aussi sur la terrasse de la maison de Molières que nous avons passé des heures et des heures à refaire le monde, à chanter du Brassens, et à déguster les spécialités locales (J'entends encore Jean : « Monique, n'est-ce pas le moment de sortir la Blanquette de Limoux ? »). Quelques vers de Jean Ferrat me paraissent être la meilleure conclusion de ce bref hommage :

On aurait pu rire encore un peu
Avec les amis des soirées entières
Sur notre terrasse aux roses trémières
Parfumée d'amour d'histoires et de jeux

On aurait pu rire encore un peu
Et dans la beauté des choses éphémères
Caresser nos femmes et lever nos verres
Sans s'apercevoir qu'on était heureux

Alain Valette

Qu'est-ce qu'un bon manuel de mathématiques ?

THÉRÈSE GILBERT, BENOÎT JADIN, NICOLAS ROUCHE
GEM

Le Ministère de l'Éducation a décidé de favoriser l'usage des manuels dans les écoles. Il s'efforce aussi, en mettant en place une procédure d'agrément, d'aiguiller les enseignants vers des manuels de qualité. Qui ne souscrirait à ces deux objectifs ? En effet, un bon manuel est, parmi d'autres, un instrument de travail utile, une référence sûre et stable, partagée par les enseignants et les élèves.

Dans un communiqué de presse du 13 janvier 2006, le Ministère a communiqué ce qui suit : « Le Gouvernement [de la Communauté française] entend garantir la qualité des manuels qui seront mis à disposition des écoles. Ils devront participer à la réalisation des objectifs de qualité, d'efficacité et d'équité poursuivis et assignés à notre système scolaire. »

Nous examinons ci-après les manuels de mathématiques. Ceux qui sont disponibles aujourd'hui sur le marché belge sont de qualités diverses. Certains sont bons, d'autres, sans doute pour des raisons commerciales, favorisent la facilité d'usage par les enseignants et les élèves, au détriment de la profondeur des apprentissages. Dans ces conditions, il nous semble utile d'expliquer ce que l'on peut entendre par *un manuel de qualité*. Dans la première partie, nous proposons quelques critères. Dans la deuxième partie, nous illustrons ceux-ci par un certain nombre d'exemples et de contre--exemples.

Les auteurs du présent document tiennent à souligner qu'ils ne pensent détenir aucune vérité définitive. Ils souhaitent contribuer à un débat nécessaire sur la qualité et l'efficacité des manuels, en espérant que d'autres

Adresses des auteurs : Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM), Chemin du cyclotron 2, B-1348 Louvain-la-Neuve ; Tél. 010.45.02.06 ; courriel : theresegilbert@tiscali.be, bjadin@fulladsl.be, rouche@math.ucl.ac.be.

les rejoindront sur ce terrain et n'hésiteront pas à les contredire s'ils l'estiment opportun. Ils sont conscients qu'en critiquant des manuels, ils prennent le risque d'indisposer certains auteurs. Prendre ce risque était inévitable. Ils ont maintenu le débat au niveau d'arguments étayés autant que possible. Par ailleurs, ils n'ont critiqué aucun manuel dans son ensemble, et n'ont donné des exemples que pour illustrer les critères proposés. Le progrès de l'enseignement est, en de telles matières, le but prioritaire. Il serait naïf de croire qu'on puisse le poursuivre en évitant toute polémique.

1. Quelques critères de qualité

Commençons par un critère qui constitue une exigence largement partagée.

L'absence d'erreurs et d'imprécisions. Un manuel doit être fiable. Il doit distinguer clairement entre définitions, propositions démontrées ou admises, conventions, etc. Il doit éviter les imprécisions, les erreurs, les absurdités, les contradictions, et signaler les abus de langage et de notation, parfois bien utiles.

Les critères suivants résultent de choix pédagogiques. Sans doute sont-ils sujets à débat.

Le développement de la pensée autonome. Un manuel doit proposer des questions, des problèmes, d'un niveau bien adapté. Il s'agit de provoquer la réflexion personnelle des élèves : des questions trop faciles ne mobilisent pas l'intelligence, des questions trop difficiles découragent. L'idée est d'amener les élèves à une pensée autonome. L'école doit les aider à se passer progressivement du professeur.

Mais parmi les manuels dont les chapitres commencent par une situation intéressante, il faut refuser ceux qui poursuivent en oubliant celle-ci et se contentent d'imposer la théorie pour déboucher ensuite sur des exercices de routine sans souci du sens. Au contraire, les images mentales et l'argumentation développées en début de chapitre doivent être sollicitées dans les applications.

L'accent sur le débat, les preuves. Les questions posées doivent favoriser le débat, l'argumentation, la recherche de preuves. Il s'agit, bien entendu, d'arguments adaptés à chaque âge. Les manuels doivent garder la trace des argumentations. Pour les plus jeunes, celles-ci peuvent parfois être exprimées sous la forme d'un dessin ou d'un exemple bien choisi.

L'usage indispensable du français. Dans un débat oral, chacun s'exprime avec les moyens qui sont les siens. Mais les arguments et les preuves, que ce soit dans un manuel ou dans les mises au point collectives en classe, doivent s'exprimer en français, à travers des phrases complètes, dans lesquelles les conjonctions, les prépositions et les adverbes expriment les relations logiques. Des suites de symboles mathématiques isolés n'ont par eux-mêmes pas de sens. Les élèves doivent apprendre, au fil des années d'école, à construire des phrases où ils argumentent, décrivent un procédé ou élaborent une définition. C'est évidemment là un long apprentissage, et donc on ne peut pas attendre des enfants les plus jeunes un langage très évolué.

Une pratique assez répandue consiste à demander aux élèves de remplir les blancs laissés dans des phrases lacunaires. L'objection majeure est qu'en faisant cela, on les empêche d'accéder à la pensée adulte, qui passe par le discours. Bien entendu, ces textes lacunaires font gagner du temps à l'enseignant (qui ne doit plus tout écrire au tableau) et aux élèves (qui ne doivent pas recopier). Ils contribuent sans doute à assurer la tranquillité dans les classes difficiles et donnent aux élèves le sentiment d'avancer. Ces avantages pratiques ne compensent pas leur médiocrité pédagogique. Ajoutons qu'ils ont pour effet pervers d'empêcher toute réutilisation du manuel, ce qui est clairement un objectif commercial.

Un équilibre entre le sens et les automatismes. Les manuels doivent maintenir un équilibre entre la construction du sens, les intuitions, les images et les idées d'une part, et les automatismes utiles de l'autre. Automatiser des parts de plus en plus importantes de sa pensée est une condition de son efficacité. Mais réduire les mathématiques à des routines revient à les dénaturer.

Une mise en page claire. Certains manuels compliquent les mises en page en multipliant les encadrés, les plages de couleur et les types de polices au point que le lecteur ne sait plus sur quoi on veut attirer son attention. La clarté s'obtient au prix d'une certaine sobriété.

Une culture mathématique intégrée. On demande à l'école de développer chez les élèves une culture mathématique qui forme un tout cohérent, un système de pensée qui fonctionne bien. Ceci veut dire que les divers chapitres des mathématiques ne peuvent pas être simplement juxtaposés. Il faut mettre en évidence les liens essentiels qu'ils ont entre eux, respecter les enchaînements naturels des questions.

Des manuels bien structurés. Ceci implique que les manuels aient une structure cohérente et bien mise en évidence et en particulier qu'ils comportent des chapitres de théorie, points d'appui pour la suite.

Les choix qui ont présidé l'ordre des chapitres doivent être clairs. À la fin d'une année, l'élève doit pouvoir saisir, par exemple en reparcourant la table des matières de son manuel, les grands axes de son apprentissage.

Des liens avec l'art et l'histoire. Les mathématiques ont des origines historiques qui peuvent aider à comprendre ce qu'elles sont, à quels besoins elles répondent et quelles difficultés il a fallu vaincre pour les élaborer. Les mathématiques ont aussi des liens avec tout ce qui, dans la nature et l'art, manifeste des régularités, des structures. Il est bon que les manuels exploitent ces contextes culturels, non comme des enjolivements, mais comme des matières de fond.

Les manuels d'année en année. Cette culture qui forme un tout cohérent s'acquiert d'année en année : très peu de choses apprises à un moment donné peuvent être simplement oubliées lorsqu'on passe à la suite. Les notions et les théories se généralisent et s'enrichissent. Ce qui a été appris avant continue à fonctionner soit techniquement, soit intuitivement, dans ce qui vient après.

D'où l'intérêt qu'il y aurait à produire des manuels couvrant plusieurs années. Ou au moins à inciter les élèves à se reporter aux manuels des années antérieures lorsqu'ils en ressentent le besoin.

En conclusion. Tous comptes faits, il semble difficile de demander à une commission d'agrément non seulement d'évaluer les manuels selon des critères tels que ceux proposés ci-dessus, mais encore d'en rejeter certains sur une telle base. Une façon d'élever le niveau moyen des manuels serait que des personnes compétentes, indépendantes de toute attache administrative et n'entretenant aucun lien avec les éditeurs, publient régulièrement des analyses critiques de manuels. La Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française a fait cela parfois dans le passé. Pourquoi ne le ferait-elle pas dans l'avenir ?

2. Exemples et contre-exemples

Illustrons maintenant par quelques extraits de manuels certains des critères évoqués ci-dessus. Notre but est de préciser au mieux notre pensée. Il ne s'agit donc, dans aucun cas, de critiquer un ouvrage dans son ensemble.

L'absence d'erreurs et d'imprécisions

Les encadrés suivants sont extraits de la même collection de manuels. Les deux premiers sont issus d'un livre dont l'objectif apparent est de servir d'aide-mémoire aux élèves de deuxième année du secondaire. Le dernier est issu du livre de l'élève de première secondaire.

Manuel [6]

NOMBRE RATIONNEL
Un **nombre rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction à termes entiers et dont **l'écriture décimale est illimitée périodique**.
(...)

Quel est le statut de cette phrase ? La première partie devrait être une définition, alors que le deuxième partie est une proposition (qu'il faudrait démontrer). Est-ce clair pour l'élève ? Et comment doit-on interpréter le fait que certaines parties de la phrase sont en caractères gras ?

Manuel [6]

TRANSFORMATIONS : INVARIANTS
Les transformations du plan conservent :
- **l'alignement des points,**
- **l'amplitude des angles,**
- **les longueurs,**
- **le parallélisme**.

Il en découle que ces transformations du plan conservent aussi :
- la perpendicularité,
- l'aire et la forme d'une figure,
- le milieu d'un segment.

(...)

Que faut-il comprendre par « les transformations » ? Toutes les transformations du plan ? Alors l'affirmation est fausse. Sans doute faut-il comprendre « toutes les transformations que l'on étudie cette année », c'est-à-dire les isométries ? Il faudrait que les auteurs précisent de quelles transformations ils parlent.
En outre ce paragraphe montre le caractère trop réduit de l'étude des invariants, qui ne peut avoir de sens que si elle permet de caractériser les isométries en les confrontant à d'autres transformations « plus

déformantes ».
Il est clair que ce manuel ne peut servir à un élève rencontrant d'autres types de transformations... Il ne peut donc être un manuel de référence pour cette matière.

Manuel [5]

NOTION

1. Classement des solides

Un **polyèdre** est un solide qui a toutes ses faces planes.
Un **polyèdre régulier** est un polyèdre dont les faces sont des polygones réguliers de même mesure.
Un **non-polyèdre** est un solide dont les faces sont limitées par des courbes.
(...)

Le concept de polyèdre régulier tel que défini ci-dessus n'est pas conforme au concept classique de polyèdre régulier, pour lequel on demande que le nombre de polygones à chaque sommet soit le même, et entre en contradiction avec le fait, écrit ailleurs dans le même livre, qu'il y a exactement cinq polyèdres réguliers. En effet, les polyèdres dont les faces sont des polygones réguliers isométriques sont en nombre infini : par exemple, le « double-tétraèdre », limité par six triangles équilatéraux, vérifie cette condition, alors qu'il ne fait pas partie des cinq polyèdres réguliers cités dans le livre.
Le concept de non-polyèdre tel que défini ci-dessus ne correspond pas à celui de solide non polyèdre. Il existerait donc pour les auteurs les solides polyèdres, les solides « non-polyèdres » et d'autres solides encore, ni polyèdres, ni non-polyèdres...

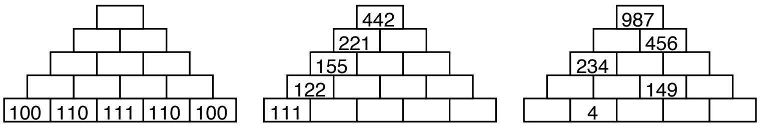
Le développement de la pensée autonome

Commençons par illustrer ce critère en examinant quelques problèmes ayant comme objectifs de s'exercer aux quatre opérations fondamentales en début de cinquième primaire.

Manuel [12]

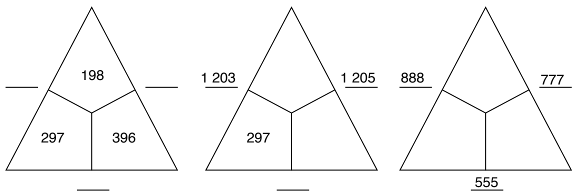
Mur de nombres

Dessine ces murs de nombres dans ton cahier et recherche les nombres manquants.
Règle : sur chaque pierre, on écrit la somme des nombres écrits sur les deux pierres inférieures.



Arithmogone

Dessine ces arithmogones dans ton cahier et recherche les nombres manquants.
Règle : chaque nombre extérieur est égal à la somme des deux nombres intérieurs qui se touchent.



Croix de multiplication

Dessine ces croix dans ton cahier et recherche les nombres manquants.

X	300	80	6
40			
8			

X	600	50	
90			630
		150	

X			8
20		800	
2	800		

Au lieu de proposer des séries de calculs, les auteurs ont choisi de vérifier le savoir-faire des élèves par des jeux de raisonnement. L'addition et la multiplication interviennent directement, la soustraction et la division interviennent comme addition et multiplication lacunaires.
Les élèves doivent découvrir des stratégies leur permettant de compléter les murs, arithmogones et croix proposées. Remarquons que, pour la réalisation du troisième arithmogone, une réelle réflexion est nécessaire.

Continuons en comparant trois introductions à la division d'un nombre par une fraction au premier degré du secondaire.

Manuel [9]

1° Recopier et compléter : $\ldots \times \frac{7}{3} = \frac{28}{3}$, d'où $\frac{28}{3} : \frac{7}{3} = \ldots$.
$\frac{\ldots}{\ldots} \times \frac{7}{3} = \frac{35}{27}$, d'où $\frac{35}{27} : \frac{7}{3} = \frac{\ldots}{\ldots} = \ldots$;
$\frac{\ldots}{\ldots} \times \frac{7}{3} = -\frac{7}{12}$, d'où $-\frac{7}{12} : \frac{7}{3} = \frac{\ldots}{\ldots} = \ldots$.

2° Effectuer les trois calculs suivants (ne pas oublier de simplifier s'il y a lieu) : $\frac{28}{3} \times \frac{3}{7}$; $\frac{35}{27} \times \frac{3}{7}$; $-\frac{7}{12} \times \frac{3}{7}$.

3° En examinant les résultats obtenus dans les deux premières questions, on peut énoncer la règle suivante (à compléter) :
Diviser un nombre par $\frac{7}{3}$ revient à multiplier ce nombre par ....

Il n'y pas de problème véritable. L'élève doit faire pas à pas ce qu'on lui demande. La règle n'est pas réellement justifiée : elle se base sur une constatation. Dans la théorie qui suit, l'énoncé de la règle est donné sans justification. Il est suivi de deux exemples.

Manuel [2]

a) Complète les égalités suivantes.

$$\frac{5}{7} : \frac{2}{3} = \frac{\frac{5}{7}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{5}{7}\cdot\underline{\quad}}{\frac{2}{3}\cdot\underline{\quad}} = \frac{\frac{5}{7}\cdot\underline{\quad}}{1} = \frac{5}{7}\cdot\frac{\quad}{=}\underline{\quad}.$$

$\frac{3}{4} : \frac{7}{11} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{2}{5} : \frac{-3}{7} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{4}{9} : 5 = \frac{\frac{4}{9}}{5} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$7 : \frac{5}{3} = \frac{7}{\frac{5}{3}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Contrairement au manuel précédent, l'élève a la possibilité de se persuader du bien fondé de la règle qu'il devra appliquer. L'exemple qu'il doit compléter lui donne en effet l'idée d'une preuve générale de cette règle. Par contre, il n'a pas le moyen de l'élaborer lui-même. Il est guidé vers la solution.
En outre, aucun sens n'est donné à la division par une fraction.

Dans la théorie, la règle est énoncée, suivie de quatre exemples. Aucune justification n'est reprise.

Alternative (inspirée de deux autres manuels)

1° a) On veut répartir 60 litres de vin dans des bouteilles de 3 litres. Combien de bouteilles faudra-t-il ? Écris le calcul correspondant à ce problème.

b) Si on veut maintenant répartir ces 60 litres dans des bouteilles de $\frac{1}{2}$ litre, combien de bouteilles faudra-t-il ? Écris le calcul correspondant à ce problème.

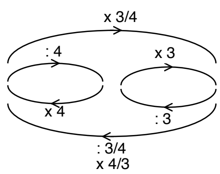
c) Même question si ce sont des bouteilles de $\frac{1}{4}$ de litre ou de $\frac{3}{4}$ de litre.

d) On veut couper des morceaux de tissu de $\frac{1}{5}$ m de long dans une grande pièce de 12 m de long. Combien de pièces pourrons-nous en obtenir ? Et si les morceaux ont $\frac{3}{5}$ m de long ?

2° Choisis un nombre. Multiplie-le par $\frac{3}{4}$.

Indique à ton voisin, sous forme de fraction irréductible, le résultat que tu as obtenu et demande-lui de retrouver le nombre que tu as choisi au départ. Fais de même avec le nombre qu'il te donne.

Ces deux situations, outre le fait qu'elles posent de vraies questions à l'élève, permettent de comprendre la règle de division par une fraction de deux manières.
La première utilise la division contenance, indispensable pour donner du sens à une telle division. La deuxième se base sur la division comme opération inverse de la multiplication et sur la décomposition d'une fraction (opérateur) en deux opérateurs plus faciles à inverser : prendre les $\frac{3}{4}$ d'un nombre consiste à le diviser par 4 puis multiplier par 3 le résultat, donc diviser par cette fraction consiste à diviser par 3 puis multiplier par 4.



Ces situations devraient donner lieu à une synthèse théorique reprenant non seulement la règle mais ses justifications. Remarquons qu'il existe d'autres manières, également exploitables, de justifier cette règle.

L'accent sur le débat, les preuves

> Illustrons ce critère en examinant trois introductions à la somme des premiers nombres impairs au premier degré du secondaire. Regardons ce qu'en dit le programme de l'enseignement catholique [10].

« Les problèmes de dénombrement qui portent sur les régularités dans des suites de nombres ou de figures sont une source d'activités stimulantes pour le raisonnement : les configurations (de nombres ou de figures) constituent un champ expérimental qui se prête à l'observation, à la généralisation et à la vérification. (...)
On utilisera l'écriture littérale d'un nombre pair, impair, de deux nombres consécutifs, (...) pour exprimer quelques phénomènes numériques et les démontrer par une méthode algébrique.
La démonstration sera motivée aux yeux des élèves par l'analyse d'exemples, par l'absence apparente de contre-exemple, par la conjecture d'une loi, par la vérification d'un énoncé.
Exemples : (...) la somme des a premiers nombres impairs vaut a^2, ... »

Manuel [7]

SOMME DES n PREMIERS NOMBRES NATURELS IMPAIRS

Complète la série suivante en notant le nombre total de disques présents dans chaque représentation :

Nombre de termes	1	2	3	4	5	6
Représentation graphique	○	● ● ○ ●	● ● ● ○ ○ ● ○ ○ ●	● ● ● ● ○ ○ ○ ● ○ ○ ○ ● ○ ○ ○ ●	● ● ● ● ● ○ ○ ○ ○ ● ○ ○ ○ ○ ● ○ ○ ○ ○ ● ○ ○ ○ ○ ●	
Somme des n premiers nombres naturels impairs	...	...	...	...	...	...

On remarque que la somme des n premiers nombres naturels impairs n'est autre que C_n, le n^{e} nombre carré.

$1 + 3 =$
$1 + 3 + 5 =$
$1 + 3 + 5 + 7 =$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 =$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 =$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 =$
$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) =$

Si n est le nombre de termes, alors la somme des n premiers nombres naturels impairs est ....

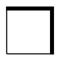
Le nombre de termes de la somme est égal à la moitié du nombre pair qui suit le dernier nombre de la somme (n).

Si $2n+1$ est le dernier terme de la somme, alors la somme des n premiers nombres naturels impairs est ....

Les élèves doivent compléter le tableau avec des nombres. Ensuite on leur dit ce qu'ils auraient pu découvrir. On leur demande enfin d'écrire le carré de n sous sa forme algébrique. Ils ne doivent donc se poser aucune question, n'ont l'occasion ni de conjecturer, ni d'argumenter, ni d'utiliser eux-mêmes l'écriture littérale pour décrire un phénomène.
Remarquons que la dernière phrase que l'on demande de compléter n'a pas de sens. En effet, si $2n + 1$ est le dernier terme de la somme, c'est qu'il s'agit de la somme des $(n + 1)$ premiers nombres naturels impairs, et alors la somme égale $(n + 1)^2$. D'autre part, la somme des n premiers nombres impairs égale n^2. Qu'est-ce que l'élève est supposé répondre ?

Manuel [1]

Les nombres carrés
a) Dessine le premier gnomon. Quel nombre représente-t-il ?
b) Le long des côtés supérieur et droit, c'est-à-dire les côtés coloriés, tu lui accoles le deuxième gnomon.



La figure obtenue est particulière. Quelle forme a-t-elle ? Quel est le nombre qu'elle représente ?
c) Le long des côtés supérieur et droit de cette figure tu accoles le troisième gnomon. La figure obtenue est particulière. Quelle forme a-t-elle ? Quel est le nombre qu'elle représente ?
d) Tu continues d'accoler les gnomons suivants, jusqu'au cinquième de la même manière.
Quelle surprise ! Les figures obtenues ont chaque fois la même forme. Quels sont les nombres successifs obtenus ?
e) Quel nombre obtiendrais-tu en accolant le dixième gnomon à la figure formée des neuf premiers ? Il est la somme des nombres représentés par les dix premiers gnomons.
f) La figure formée des n premiers gnomons représente un nombre. Lequel ? Il est la somme des nombres représentés par les n premiers gnomons. Exprime ce résultat par une formule.
g) Quel raisonnement tiendrais-tu pour convaincre quelqu'un qui aurait des hésitations ?

Signalons que les nombres impairs ont été introduits et représentés par des gnomons juste avant cette séquence.
On le voit, le problème est complètement décomposé. On dit à l'élève ce qu'il doit faire exactement. On ne lui laisse aucune possibilité d'exercer son imagination. Il doit suivre docilement les consignes et répondre aux questions.
Mais contrairement à la séquence précédente, l'objectif de celle-ci est l'argumentation : la dernière question (g) le montre clairement. La synthèse est longue et explicite au niveau des arguments et comprend deux preuves (géométrique et algébrique) de la formule. Il est clair qu'un des objectifs du manuel est le développement de la rigueur.
Les exercices sont variés : application, modélisation, mais aussi problèmes de recherche du même type, où il faut découvrir une formule (et il y a plusieurs façons d'y arriver), ou bien où il faut démontrer une identité algébrique donnée. Le développement de l'imagination et des intuitions est donc un objectif qui apparaît dans les exercices.

Manuel [14]

Étudier la suite

$$\begin{array}{l} 1 \\ 1+3 \\ 1+3+5 \\ 1+3+5+7 \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}$$

en calculant et en dessinant.

Ce manuel laisse beaucoup de liberté au professeur et aux élèves : le problème est donné a priori sans piste. Le professeur est donc libre de susciter l'inventivité des élèves, qui seront amenés à conjecturer, à choisir une représentation adéquate. La solution comprend la piste classique (géométrique). La théorie ne reprend pas l'égalité visée et sa justification. Les exercices sont du type « applications intelligentes » et recherches de nouvelles formules.

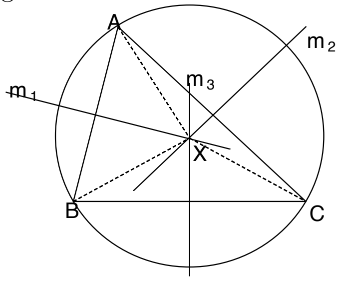
L'usage indispensable du français

Commençons par illustrer ce critère en examinant une démonstration de la concourance des médiatrices d'un triangle au premier degré du secondaire.

Manuel [2]

Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.

Figure



Données

ABC triangle quelconque
m_1 médiatrice de $[AB]$
m_2 médiatrice de $[AC]$
m_3 médiatrice de $[BC]$

Thèse

m_1, m_2 et m_3 se coupent en X.

Démonstration

m_1 et m_2 se coupent en X.

$$\left.\begin{array}{l} X \in m_1 \overset{(1)}{\Rightarrow} |XB| = |XA| \\ X \in m_2 \overset{(1)}{\Rightarrow} |XA| = |XC| \end{array}\right\} \Rightarrow |XB| = |XC| \overset{(2)}{\Rightarrow} X \in m_3$$

Conclusion : m_1 et m_2 se coupent en X et $X \in m_3 \Rightarrow m_1, m_2$ et m_3 se coupent en X.

Remarque : X est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ;
le rayon de ce cercle vaut $|XA| = |XB| = |XC|$.

(1) car tout point de la médiatrice d'un segment est équidistant des extrémités de ce segment.

(2) car tout point équidistant des extrémités d'un segment appartient à la médiatrice de ce segment.

Une première idée est que cette démonstration a l'avantage de présenter l'enchaînement de façon concise. Mais cela entraîne que les justifications sont rejetées en note.
Ensuite, les formules devraient être intégrées dans des phrases bien construites comprenant des « donc », « par conséquent », « puisque », ...
Par ailleurs, l'usage du signe $\Rightarrow$ dans ce contexte est contestable. En effet, ce signe signifie en général « implique » et peut remplacer un « si ... alors... ». Mais il est ici utilisé pour remplacer un « donc ». La conclusion, par exemple, ne devrait pas être l'implication indiquée mais bien « m_1, m_2

et m_3 se coupent en X ».
En outre, l'usage de la ponctuation est déficient.
Remarquons enfin que le X intervenant dans la thèse n'a pas été défini...

Alternative

Propriété des médiatrices d'un triangle. Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point qui est équidistant des trois sommets du triangle.

Démonstration.
Considérons un triangle ABC et ses médiatrices m_{AB}, m_{BC}, m_{AC}.
Appelons P le point ([1]) d'intersection de m_{AB} et de m_{BC}.
Puisque les points de la médiatrice d'un segment sont équidistants des extrémités de ce segment, on a

$$|PA| = |PB| \text{ et } |PB| = |PC|.$$

Dès lors,

$$|PA| = |PC|.$$

Comme les points équidistants des extrémités d'un segment appartiennent à la médiatrice de ce segment, on déduit que P appartient à m_{AC}.
La troisième médiatrice est donc bien concourante aux deux premières.
Leur point d'intersection est équidistant de A, B et C.

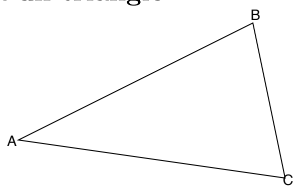
Cette démonstration est exprimée en grande partie en français. Les égalités sont intégrées dans des phrases. Les mots de liaison « dès lors » et « donc » indiquent clairement la logique de la démonstration. Les propriétés utilisées sont citées au bon moment, précédées de conjonctions telles que « comme » et « puisque ».

> À propos de l'usage indispensable du français, et sur un sujet proche du précédent (les médiatrices d'un triangle et son cercle circonscrit), examinons un exemple des textes lacunaires, trop souvent employés actuellement par les auteurs de manuels.

([1]) Certains auteurs commencent par prouver que ce point existe, c'est-à-dire que m_{AB} et m_{BC} sont sécantes. Étant donné l'âge des élèves auxquels s'adresse cette démonstration et le contexte mathématique (non axiomatique) dans lequel elle s'insère, nous avons choisi de ne pas développer cette partie.

Manuel [3]

Cercle circonscrit à un triangle



Le cercle circonscrit à un triangle doit comprendre les trois sommets du triangle. Son centre est donc situé à égale distance de A, B et C.

Les points équidistants de A et B appartiennent à la .... de $[AB]$. En effet, la .... d'un segment est l'ensemble de tous les points équidistants des extrémités de ce segment.
Trace cette droite.
Les points équidistants de A et C appartiennent à la .... de $[AC]$.
Trace cette droite.
Les points équidistants de B et C appartiennent à la .... de $[BC]$.
Trace cette droite.

Ces trois droites se coupent en un point qui est donc équidistant des trois sommets du triangle : c'est le centre du cercle circonscrit est [*sic*] l'intersection des trois .... de ce triangle.
Le rayon de ce cercle est la longueur des segments reliant ce point aux sommets du triangle.
Trace le cercle circonscrit au triangle.

Au lieu de provoquer une réelle recherche sur le sujet, les auteurs, à cet endroit, guident les élèves pas à pas. L'activité de ceux-ci consiste à deviner le bon terme à écrire (médiatrice) et à le copier cinq fois. Aucune justification ne leur est demandée. Aucune des compétences que l'on pourrait développer lors de l'élaboration d'une démonstration, telles que

- exposer et comparer ses arguments,
- s'exprimer dans un langage clair et précis,
- distinguer « ce dont on est sûr » de « ce qu'il faut justifier »,
- raccrocher la situation à des objets mathématiques connus,

ne pourra être travaillée dans ce type d'activité, puisque tout le travail a été prémâché avant d'être présenté à l'élève.

Illustrons maintenant le même critère en examinant une synthèse concernant les transformations de graphes de fonctions en quatrième année du secondaire.

Manuel [8]

Le théorème QDPS des manipulations de fonctions

À partir de la fonction $f(x)$, on obtient le graphe de la fonction
$a \cdot f(bx+h)+k \quad (a \in \mathbb{R}_0, b \in \mathbb{R}_0^+, h \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R})$

En quatre étapes comme suit :
Q. (Quotient) Diviser toute abscisse par b : $f(x) \to f(bx)$
D. (Différence) Retrancher h à toute abscisse : $f(x) \to f(bx+h)$
P. (Produit) Multiplier toute ordonnée par a : $f(x) \to a \cdot f(bx+h)$
S. (Somme) Ajouter k à toute ordonnée : $f(x) \to a \cdot f(bx+h)+k$.

Remarque :
Si $b<0$, alors la fonction s'écrit $a \cdot f(-(b'x-h))+k$ avec $b'=|b|$.

Que se cache-t-il sous cette suite de « trucs » ? Le titre parle d'un théorème…
En mettant de côté le problème du sens, qui est bien occulté dans cet extrait, remarquons l'absence de phrases bien construites et la ponctuation déficiente.

Alternative

Translations et compressions de graphiques

1. Dans un repère orthogonal du plan, par rapport au graphique de la fonction (2) $y=f(x)$, celui de la fonction $y=f(x-m)$ est obtenu par translation parallèlement à l'axe Ox, dans le sens des x croissants si m est positif et dans le sens contraire si m est négatif, d'une longueur égale à $|m|$.
Dans un repère orthogonal du plan, par rapport au graphique de la fonction $y=f(x)$, celui de la fonction $y=f(x)+n$ est obtenu par translation parallèlement à l'axe Oy, dans le sens des y croissants si n est positif et dans le sens contraire si n est négatif, d'une longueur égale à $|m|$.

(2) Pour ne pas alourdir les notations, nous désignons par $y=f(x)$, la fonction $f : x \mapsto f(x)$. De même, la fonction désignée par $y=f(x-m)$ est en fait la fonction $g : x \mapsto f(x-m)$, celle désignée par $y=f(x)+n$ est la fonction $h : x \mapsto f(x)+n$, etc.

2. Dans un repère orthogonal du plan, par rapport au graphique de la fonction $y = f(x)$, celui de la fonction $y = f(r \cdot x)$ (r étant un réel strictement positif) est obtenu par une affinité ([3]) d'axe Oy parallèlement à l'axe Ox et de rapport $\frac{1}{r}$.
Dans un repère orthogonal du plan, par rapport au graphique de la fonction $y = f(x)$, celui de la fonction $y = s \cdot f(x)$ (s étant un réel strictement positif) est obtenu par une affinité d'axe Ox parallèlement à l'axe Oy et de rapport s.

3. Dans un repère orthogonal du plan, par rapport au graphique de la fonction $y = f(x)$, celui de l'opposée, c'est-à-dire celui de la fonction $y = -f(x)$, est obtenu par symétrie orthogonale d'axe Ox.
Dans un repère orthogonal du plan, par rapport au graphique de la fonction $y = f(x)$, celui de la fonction $y = f(-x)$, est obtenu par symétrie orthogonale d'axe Oy.

Contrairement à l'extrait précédent, cette synthèse donne clairement et dans un français correct, le lien entre certaines transformations de l'expression algébrique d'une fonction et les transformations de son graphique.

Un équilibre entre le sens et les automatismes

Illustrons ce critère en examinant l'introduction de l'algorithme de division écrite en 3e année primaire.

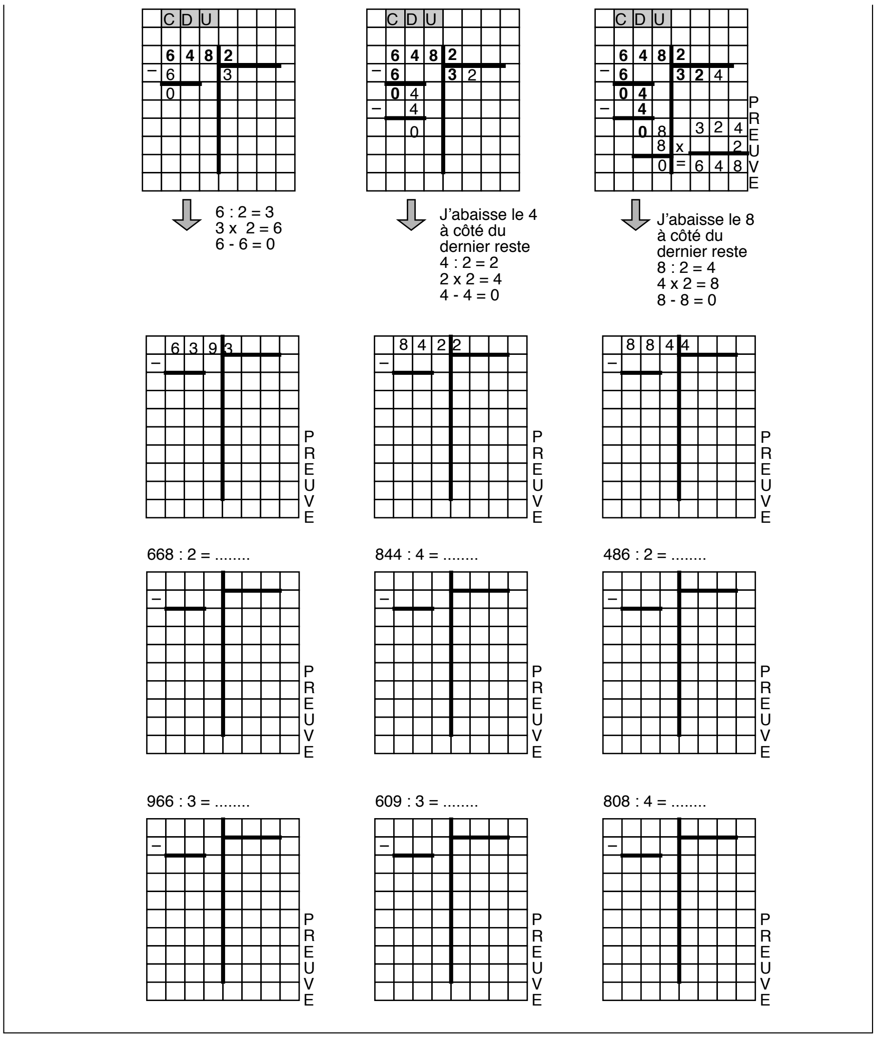
Manuel [11]

Divisions : 648 : 2

Une boîte d'aliment pour chien contient 648 g de viande.
Philippe et Yasmine la partagent en 2 repas équivalents.
Combien de grammes Basile recevra-t-il à chaque repas ?

648 : 2 = ...

([3]) Une affinité s'assimile, suivant le rapport, à une compression ou une dilatation.



On remarque que le procédé de division écrite est introduit sur un calcul (648 : 2) où il est inutile. Nul besoin de calcul écrit pour effectuer cette division. Les calculs intermédiaires (multiplications, soustractions) ne sont pas nécessaires, mais sont imposés. Les auteurs visent probablement, lors de cette première séquence sur la division écrite, l'acquisition d'une disposition particulière. L'objectif de cette séquence est donc l'automatisation. Comment les élèves peuvent-ils comprendre dans ce contexte l'intérêt d'une telle disposition et de ces calculs intermédiaires, puisque ceux-ci compliquent le calcul à faire ?

Plusieurs manuels proposent une toute autre approche de ce procédé, trop longue pour que nous la retranscrivions ici. Résumons-la. Elle part d'un problème tel que : « Monsieur Mathieu est responsable de l'emballage d'ananas. Ceux-ci sont regroupés par cartons de 12. S'il y a 2664 ananas, combien de cartons monsieur Mathieu doit-il prévoir ? » Les enfants sont invités à inventer des stratégies pour trouver la réponse. À partir de leurs solutions ou de leurs idées et avec l'aide du professeur, ils élaborent une procédure qui consiste à soustraire de 2664 des multiples « faciles » de 12... Après quelques étapes, la division écrite se présente comme une suite de soustractions répétées. Elle apparaît comme une procédure sensée qui facilite le calcul.

Notons encore qu'à l'heure de la calculatrice, l'habileté à appliquer le procédé de division écrite a un peu perdu de son importance. Quelles sont les raisons fondamentales de son étude ? Elle permet de travailler le sens de la division et d'exercer des compétences en numération. C'est donc le sens, plus encore que les automatismes, qui devrait être travaillé.

Une culture mathématique intégrée

> Illustrons ce critère en examinant les liens qui sont faits ou non entre certaines parties de matière, ici des propriétés des diviseurs et multiples au premier degré du secondaire. Regardons d'abord ce qu'en disent les programmes.

Dans les programmes de l'enseignement officiel [13], on lit :
« Exploiter les deux propriétés suivantes :

- tout nombre qui divise deux autres nombres divise leur somme et leur différence,
- tout nombre qui divise un autre nombre divise aussi ses multiples.

On utilisera ces propriétés pour justifier certains critères de divisibilité (...) »

De même dans les programmes de l'enseignement catholique [10], on lit :
« (...) trois propriétés sont essentielles :

- (...)
- si un nombre divise un autre, alors il divise ses multiples,
- si un nombre divise deux autres, alors il divise leur somme et leur différence.

Ces propriétés permettent de justifier les caractères de divisibilité par 2, 5, 4, 25 et par 8 et 125. »

Manuel[9]

Retenir

1. Caractères de divisibilité

Un nombre est divisible par :

2	si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8
5	si son chiffre des unités est 0 ou 5
10, 100, 1000, ...	s'il se termine par 0, 00, 000, ...
4	si le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 4
25	si le nombre formé par les deux derniers chiffres est divisible par 25
(...)	

2. Propriétés

Propriété 1 : Si un nombre en divise deux autres,
alors il divise leur somme et leur différence.

Exemple 1. Si 7 divise 763 et 784,
alors il divise aussi $1547 = 763 + 784$
et $21 = 784 - 763$.

Propriété 2 : Si un nombre divise un autre nombre,
alors il divise aussi ses multiples.

Exemple 2. Si 7 divise 21,
alors 7 divise aussi 42, 63, 84, ...

Ce manuel se contente d'énoncer les caractères de divisibilité sans justification, et les fait suivre de l'énoncé des propriétés qui devraient servir à les démontrer. Ces propriétés ne sont pas justifiées elles non plus.

Manuel [1]

PROPRIÉTÉS DES DIVISEURS ET DES MULTIPLES

(...)

Dans les propriétés qui suivent, les naturels sont supposés non nuls.

d. Un nombre qui en divise un autre, divise tous les multiples de cet autre.

EXEMPLE	EN GÉNÉRAL
On va démontrer que 3 divise 60 (multiple de 12)	On donne les naturels a, b et n tels que a divise b. Il faut démontrer que a divise bn
3 divise 12, car $12 = 3 \times 4$	Si a divise b, alors on peut trouver un naturel c, tel que $b = ac$
Or $60 = 12 \times 5$ $= (3 \times 4) \times 5$ $= 3 \times (4 \times 5)$ $= 3 \times 20$	Considérons un multiple de b, par exemple bn. Puisque $b = ac$, $bn = (ac)n$ ou $bn = a(cn)$
Donc 3 divise 60, car $60 = 3 \times 20$	On peut donc dire que a divise bn, puisqu'il existe un naturel cn tel que $bn = a(cn)$

e. Un nombre qui en divise deux autres, divise leur somme.
(...)

CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ

a. Un nombre naturel est divisible par 2 si et seulement si son dernier chiffre forme un nombre divisible par 2.

EXEMPLE

Montrons que 374 est divisible par 2.

$$374 = 370 + 4$$
$$= 37 \times 10 + 4$$

- 2 divise 10, car $10 = 2 \times 5$
  Donc 2 divise 370, propriété (d)
- 2 divise 4, car $4 = 2 \times 2$

Dès lors, par la propriété (e), 2 divise la somme de 370 et de 4, c'est-à-dire 374.

b. Un nombre naturel est divisible par 4 si et seulement si ses deux derniers chiffres forment un nombre divisible par 4.
(...)

Dans ce manuel, les propriétés de la divisibilité sont énoncées, leur preuve est illustrée sur un exemple générique, puis généralisée. Elles sont suivies des caractères de divisibilité, qui sont démontrés sur des exemples génériques à l'aide des propriétés précédentes.

3. En guise de conclusion : un manuel peut être bon à certains égards et pas à d'autres

Pour illustrer ce point, nous avons choisi une collection de manuels qui propose une palette intéressante de problèmes de réflexion, cer-

tains pouvant être utilisés pour introduire une notion ou une théorie, d'autres étant plutôt des problèmes d'application, d'autres encore des problèmes ouverts.
Le problème choisi permet de travailler les droites remarquables du triangle, les quadrilatères et les isométries au premier degré du secondaire.

Manuel [4]

> Dessine un triangle quelconque sur une feuille cartonnée.
>
> Découpe-le et reporte-le au milieu d'une feuille blanche.
>
> Construis ses droites remarquables en utilisant uniquement la règle (sans recours à sa graduation) et ton triangle cartonné.

Ce problème amène les élèves à se rendre compte des multiples figures que l'on peut obtenir en déplaçant le triangle. Ils sont amenés à échanger leurs procédés, à les justifier soit en utilisant des propriétés de figures simples, soit en utilisant les propriétés des isométries modélisant les mouvements effectués. Ils doivent de toute façon retrouver et affiner les images mentales qu'ils ont des droites remarquables et de leurs propriétés.
Remarquons pourtant que la partie théorique de cette collection de manuels ne reprend que des définitions, des méthodes, des théorèmes, sans faire apparaître les liens que les problèmes contribuent à tisser et les argumentations nécessaires à la résolution de ces problèmes.
Cette collection vérifie les premiers critères cités (favoriser le développement de la pensée autonome, favoriser le débat, ...) et, de ce fait, mérite d'être connue et employée, mais présente une grande lacune au niveau de la structuration des connaissances.

Bibliographie

[1] A. Adam *et al.*, *Espace Math 1*, De Boeck - Wesmael, Bruxelles, 2000.

[2] P. Ancia *et al.*, *Actimath 2*, Van In, Louvain-la-Neuve - Lier, 2000.

[3] M. Charles *et al.*, *À vos math ! 2 (1e partie)*, Plantyn, Bruxelles, 1995.

[4] M. Chastellain *et al.*, *Géométrie*, Loisirs et Pédagogie, 2003.

[5] J.-M. Danel, Cl.-A. Hugo, *Astro-math 1b*, Plantyn, Bruxelles, 2003.

[6] J.-M. Danel, Cl.-A. Hugo, *Astro-math 2, boîte à outils*, Plantyn, Bruxelles, 2003.

[7] J.-M. Danel, Cl.-A. Hugo, *Astro-math 2b*, Plantyn, Bruxelles, 2002.

[8] J.-M. Danel, V. Demezel, *Astro-math 4*, Wolters Plantyn, Bruxelles, 2005.

[9] R. Delord, G. Vinrich, *Cinq sur cinq, Premier degré, Nombres*, Hachette - Erasme, 2003. Édition adaptée pour la Belgique.

[10] Fédération de l'Enseignement Secondaire Catholique, *Programme de mathématiques, 1^{er} degré*, 2000.

[11] Ph. Jonnaert, F. Balaban, *Basile et les maths 3b*, Plantyn, Bruxelles, 2003.

[12] J. Maquoi *et al.*, *Faire des maths en cinquième année*, Erasme, Namur, 2005.

[13] Ministère de la Communauté Française, Administration Générale de l'enseignement et de la recherche scientifique, *Programme d'études du cours de mathématiques, 1^{er} degré commun*, 2000.

[14] F. Van Dieren-Thomas *et al.*, *De question en question 1*, Didier Hatier, Bruxelles, 1993.

Créer un club de jeux mathématiques

JOËLLE LAMON
Haute École Francisco Ferrer

1. Introduction

Étant enseignante à l'école normale, c'est-à-dire dans la catégorie pédagogique d'une haute école, j'ai progressivement constaté les faits suivants :

- Les étudiants qui nous arrivent ont souvent des lacunes en géométrie, et ont du mal à distinguer les éléments essentiels, à « voir » dans l'espace, domaine où il est particulièrement nécessaire de manipuler, d'expérimenter. De plus, les étudiants ne maîtrisent pas toujours les concepts de base et ont souvent du mal à combiner plusieurs concepts dans des exercices de synthèse.
- Beaucoup de nos étudiants ont du mal à aborder les mathématiques de façon ludique : en section normale maternelle (et parfois primaire), certains les abordent avec appréhension ; en section normale primaire et secondaire, beaucoup ont tendance à privilégier la technique et pas assez le raisonnement. De plus, certains enseignants du début de secondaire estiment parfois inutile de proposer des manipulations concrètes aux élèves, même en remédiation.
  Comment dans ces conditions faire passer aux enfants le plaisir de faire des mathématiques, d'abstraire à partir de situations concrètes et les encourager à aller le plus loin possible dans leur réflexion mathématique ?
- Même s'il est possible de présenter l'un ou l'autre jeu dans le cadre des cours, il est dangereux de risquer l'amalgame : « au cours de maths, on joue », alors que l'intention pédagogique est constamment présente. De

Adresse de l'auteur : Haute École Francisco Ferrer, Catégorie pédagogique Buls-De Mot, Boulevard Lemonnier 110, 1000 Bruxelles ; courriel : `joellelamon@yahoo.fr`.

plus, tout jeu nécessite une phase de manipulation avant de prendre du recul, ce qui doit pouvoir être fait en dehors du cours.
Enfin, le jeu ne remplace pas les apprentissages, mais permet plutôt un changement de regard sur ceux-ci.

– Certains jeux proposés par les étudiants, en maternelle et parfois en primaire, sont assez pauvres et ne permettent pas de dépassement pour les plus forts.
– Alors que l'on parle de charnière entre les niveaux d'enseignement, celle-ci est encore peu présente dans les faits, et particulièrement dans le domaine mathématique, qui s'y prête pourtant bien, en envisageant par exemple la logique, les grandeurs ou la géométrie.

J'ai alors imaginé de créer un club de jeux mathématiques qui permettrait à chacun de trouver des défis à son niveau et l'encouragerait à progresser. De plus, il me semblait que l'échange entre étudiants de classes ou de sections différentes (normale préscolaire, primaire et secondaire) pouvait être intéressant. Enfin, l'organisation de ce club en dehors des cours proprement dits évitait tout amalgame trop rapide « mathématique = manipuler ».

2. Idées directrices du projet et organisation

Point de départ

En Finlande existent déjà des clubs de mathématiques, nés du souhait d'aborder davantage les mathématiques sous leurs aspects « résolution de problèmes » et « mathématique du quotidien ». Aux États-Unis se développent à l'heure actuelle des « Cercles de mathématique », soit en vue de la préparation d'élèves aux olympiades en dehors du temps scolaire comme c'est le cas à Berkeley, où l'idée a été inspirée de ce qui se faisait en Europe de l'Est, soit en dehors de tout esprit de compétition en vue d'explorer les mathématiques par le jeu et la discussion comme à Boston (voir [8]). En France, des clubs comme « Animaths » ou « Maths en jeans » semblent avoir du succès ; le « Salon du jeu et de la culture mathématique » organisé depuis 6 ans prend chaque année plus d'importance.

En Belgique, des initiatives telles que « Le monde en jeux » à Parentville, les soirées jeux organisées par des boutiques et clubs de jeux sont des occasions de découvrir de nouveaux jeux, pas forcément mathématiques.

D'autre part, l'enquête PISA avait mis en évidence en 2003 l'écart entre les performances des élèves. Elle soulignait aussi le fait que les maths ne soient pas toujours considérées comme importantes par les élèves, surtout dans des sections à peu d'heures de mathématique, et d'autre part l'importance pour l'apprentissage d'avoir confiance dans ces capacités, de bénéficier de l'intérêt et du soutien de l'enseignant (or, en Belgique, les élèves se disent moins soutenus que la moyenne), d'avoir un climat de classe positif. De plus, le temps consacré aux devoirs en Belgique apparaissait comme légèrement inférieur à la moyenne dans cette enquête. Enfin, le taux élevé d'échecs dans l'enseignement supérieur (mais pas uniquement) incite à trouver d'autres pistes pour améliorer le niveau des élèves.

Objectifs généraux de ce type d'activité

1. Au niveau des mathématiques :
   - Donner l'occasion aux étudiants de manipuler, d'enrichir leur expérience mathématique et de s'améliorer dans un cadre ludique. On parle souvent de « lecture plaisir ». Pourquoi ne pas parler aussi de « mathématiques plaisir » ?
   - Créer un moment où le jeu et la manipulation sont permis, et ceci en dehors du cours proprement dit et du cadre strictement scolaire mais sans le remplacer : ce moment est une passerelle entre univers scolaire et extrascolaire de l'élève.
   - Proposer des situations permettant un passage aisé du concret vers l'abstrait, par l'observation de démarches et l'anticipation suscitée. En émettant des hypothèses et en expérimentant des tactiques, l'élève peut construire des stratégies gagnantes et développe une recherche personnelle, une modélisation de problèmes et donc une démarche scientifique. Le jeu est ici une interface entre les concepts et les élèves : il est un support d'apprentissage pertinent dans une perspective constructiviste de l'apprentissage.
   - Faire éprouver le plaisir d'avoir vaincu la difficulté et d'avoir affronté des défis, très important pour la motivation en mathématique, et créer ainsi un changement de regard sur l'école et les apprentissages grâce à un sentiment de reconnaissance et de valorisation et par là une implication plus grande de l'étudiant dans ses apprentissages mathématiques en lui donnant envie d'apprendre.
   - Développer la capacité à résoudre des problèmes, à raisonner avec logique et rigueur, à chercher et persévérer, à faire face à des situations inédites, à faire preuve de créativité, objectifs qui me semblent primordiaux pour la formation mathématique.
   - Susciter un plus grand intérêt pour les mathématiques en aidant à leur donner du sens, en les rendant encore plus vivantes et, à plus

long terme, aider à créer une image positive des activités scientifiques.
   - Faire connaître à chacun des jeux, qu'ils soient très connus, peu connus, ou inventés pour l'occasion et ainsi transmettre une culture ludique et mathématique.
   - Permettre aux étudiants de diverses sections de se rencontrer dans un cadre mathématique et d'échanger leurs expériences ; favoriser l'entraide par l'explication de règles, la confrontation et l'analyse de démarches, ...
2. Au niveau de la formation de l'apprenant :
   - Développer l'autonomie et l'initiative des élèves, et ceci dans un contexte désintéressé : cet aspect peut être accentué par la diversité des jeux proposés.
   - Développer la concentration, le dépassement de soi, l'implication dans des tâches intellectuelles et par là aider à une progression personnelle de l'élève et avoir donc des effets positifs sur les processus d'apprentissage.
   - Travailler la lecture de consignes à l'aide des règles des différents jeux.
   - Proposer des défis à la mesure de chacun par la variété des jeux et des niveaux proposés : le repérage des obstacles par l'élève ou l'enseignant permet une remédiation par d'autres jeux présentés et donc permet à chacun d'avancer à son rythme.
   - Développer des attitudes de tolérance et de respect de l'autre.
3. Au niveau de la formation du futur enseignant :
   - Montrer des exemples d'adaptation de règles à plusieurs niveaux différents afin de susciter des transferts ultérieurs.
   - Favoriser les transitions maternel-primaire et primaire-secondaire en proposant des jeux convenant à différents niveaux.
   - Envisager le rôle de l'enseignant en dehors de tout contexte d'évaluation : proposition de situations, animation et médiation sont privilégiées.
   - Provoquer une réflexion sur l'utilisation pédagogique de ces jeux chez de futurs enseignants ; inciter à créer ou adapter d'autres jeux mathématiques.
   - Créer progressivement des fiches de jeu encourageant d'autres enseignants à organiser le même type d'activité, mis sur le site `http ://cso.ulb.ac.be/urem/` avec le concours de Jacques Lefebvre. Ces fiches comportent actuellement une photo du jeu, les règles et des variantes, et l'intérêt pédagogique du jeu.

Aspect pratique

Une séance quasi mensuelle de 2 h (le mercredi après-midi) avec un thème précis offre l'avantage de laisser un temps de préparation suffisant et de ne pas solliciter trop souvent les étudiants. Cette année, 6 séances ont été ainsi organisées. À chaque séance, une quinzaine de nouveaux jeux sont proposés.

Côté matériel, la priorité est donnée à des jeux classiques (matériel pédagogique, jeux familiaux, de ludothèques, de magasins de jeux), et à des jeux faciles à réaliser et peu coûteux comme ceux proposés par l'APMEP et la revue *Tangente Jeux*. Ceci permet aussi d'enrichir le matériel didactique disponible.

L'école est intervenue financièrement pour payer quelques jeux qui font désormais partie du matériel pédagogique. Par ailleurs, un montant de 1 € est demandé à chaque participant, en vue de l'achat ultérieur de nouveaux jeux. Cette année, la participation à l'activité était totalement libre.

3. Quelques exemples de thèmes et de jeux

Les thèmes proposés sont planifiés en fonction des sujets abordés dans les différentes sections au cours de l'année. Un accent particulier est mis sur la géométrie, et plus particulièrement la géométrie dans l'espace, domaine où beaucoup de nos étudiants se sentent mal à l'aise.

Le choix des jeux s'est porté vers des jeux dont les règles sont simples, et possédant plusieurs variantes ou niveaux de difficulté. Beaucoup de jeux sont individuels et permettent une autocorrection.

1. Des jeux pour s'orienter dans le plan et dans l'espace (Table 1) ([1]).
   Parmi ces différents jeux, nous retiendrons *River crossing* et *Crazy circus* pour leur originalité et leur aspect algorithmique (*Crazy circus* offrant de plus un passage à l'abstraction par la non manipulation progressive des pièces) *Blokus* et *Rumis* pour la simplicité des règles, l'aspect compétitif et le travail sur l'orientation des pièces, *Puissance 4 dans l'espace* pour la nécessité de se repérer dans l'espace, *Immeubles et gratte-ciels* pour la progression possible.
2. Puzzles à 2 et 3 dimensions (Table 2).
   Dans le plan, les puzzles de Sam Loyd restent un incontournable pour

([1]) Dans ces tableaux : M signifie *Maternelle*, P, *Primaire* et S, *Secondaire*

Tab. 1 – Des jeux pour s'orienter dans le plan et dans l'espace

	M	P	S
Go Getter	×	×	
Labyrinthe	(×)	×	
River crossing		×	(×)
Quoridor		×	(×)
Blokus		×	×
Rail road, *Lunar lock out*		×	×
Labyrinthes de France de Ranchin, *Amaze*		×	×
Puissance 4 dans l'espace		×	×
Structuro	×	×	(×)
Crazy circus	(×)	×	(×)
Rumis		×	×
Schauen und bauen		×	(×)
Immeubles et gratte-ciels		×	×

Tab. 2 – Puzzles à 2 et 3 dimensions

	M	P	S
Puzzles de Sam Loyd		×	×
Puzzles de carrés à bords colorés		×	×
Brick by brick	×	×	
Tangram et autres puzzles géométriques	×	×	(×)
Quads et carrés de Mac Mahon		×	×
Pentominos, *Kataminos*		×	×
Carrés et pointes à reconstituer		×	×
Octaclips	×	×	
Pyramides et cubes à reconstituer	×	×	×
Dé à reconstituer		×	×
Coloriages et développements		×	×
Jeu du python perfide		×	×
Cube Soma – Block by block		×	×

leur richesse et leur simplicité. Avec d'autres jeux comme *Brick by brick* et le tangram, ils aident à dégager les éléments essentiels d'une figure. Des jeux comme *Quads* et les carrés de Mac Mahon peuvent aussi être utilisés pour leur aspect combinatoire en faisant créer les pièces. Les différents puzzles à 3 dimensions (pyramides, cubes, dé, python perfide, cube Soma) permettent une progression de chacun et provoquent la nécessité d'analyser les pièces et développent une

Tab. 3 – Jeux logiques

	M	P	S
Pippo	×	×	
Ikarus	×	×	
Wingo Dingo	(×)	×	
Broc et troc	(×)	×	
Cher Augustin	×	×	
Speed et jeux associés	×	×	
Jeu des familles	×	×	
Rapid croco	(×)	×	
Set		×	(×)
Quarto		×	×
Quintus	(×)	×	×
Mastermind		×	×
Qui est-ce		×	×
Diam		×	×
Cluedo		×	×
Jeux d'allumettes		×	(×)
Awélé		×	×
Yinsh		×	×
Jeu de Nim		×	×
Grille à recouvrir de dominos		×	×
Suites logiques et autres jeux logiques sur papier		×	×

meilleure vision dans l'espace. Chacun de ces jeux peut être exploité spécifiquement en classe, notamment pour les démarches utilisées et les justifications.

Ces différents puzzles me semblent faire partie d'une culture mathématique à transmettre.

3. Jeux logiques (Table 3).
Quelques jeux simples peuvent facilement être introduits : *Pippo*, *Rapid croco*, *Set*, *Mastermind*, les jeux d'allumettes et les jeux de suites logiques et de déduction sur papier. Progressivement, certains jeux font progressivement anticiper et développent ainsi une réflexion plus poussée : *Quarto*, *Quintus*, *Diam*, *Yinsh*, *Awélé*, pour arriver enfin à des jeux possédant une stratégie gagnante comme le célèbre jeu de Nim.

4. Jeux sur les grandeurs (Table 4).
Le jeu de sériation peut permettre de comparer les démarches et l'uti-

TAB. 4 – Jeux sur les grandeurs

	M	P	S
Sériation de masses	×	×	
Jeux d'équilibre	×	×	
Jeux d'estimation de grandeurs et de mesures		×	×
Jeux d'aires et de volumes		×	×
Gobblets		×	×
San ta si		×	×
Tours de Hanoï		×	×
Curvica		×	×
Problèmes de pesées et transvasements		×	×
Jeux de fractions		×	(×)

lisation de la transitivité. Le jeu d'estimation de grandeurs et de mesures permet d'entraîner une compétence encore peu développée et d'aider à donner du sens aux unités conventionnelles. Le jeu d'aires et volumes est l'occasion de rencontrer des situations de non proportionnalité. *Gobblets* et *San ta si* sont des jeux de stratégie utilisant les grandeurs de façon originale. Les tours de Hanoï sont une occasion de construire un algorithme et présentent un intérêt culturel. Les fractions, matériel trouvé sur l'internet, permettent de faire construire des règles de jeu classiques et de les utiliser dans un contexte nouveau.

5. Jeux numériques (Table 5).
   Les nombres fléchés permettent d'exploiter la mode des jeux japonais. *Mathador* est un jeu particulièrement original pour réviser les tables d'addition et de multiplication, travaillés aussi dans *Le compte est bon*, en proposant de plus des résolutions de problèmes. Ces jeux permettent de plus, par l'écriture sous forme de calcul, d'aborder les règles de priorités dans les calculs. Le jeu des bonus-malus, invention originale de ma collègue Annie Goovaerts, permet de donner du sens aux nombres négatifs, et aux opérations simples sur ceux-ci (addition, soustraction) en utilisant plusieurs niveaux de jeu. Les cartes binaires (et le jeu de Nim) permettent d'aborder une autre base de numération dans un contexte motivant pour l'élève, avec l'attrait de l'énigme à résoudre seul ou en groupe.

6. Jeux sur les symétries et autres transformations (Table 6).
   Quelques jeux simples basés sur le principe du miroir peuvent être exploités à plusieurs niveaux : tâtonnement, recherche d'une stratégie,

Tab. 5 – Jeux numériques

	M	P	S
Ikarus	×	×	
Ferme la boîte	×	×	
6 nimmt ou *Six qui prend*		×	
Jeux de cartes	×	×	
Nombres fléchés		×	×
Magix 34 - Multiplay		×	(×)
Mathador		×	×
Take it easy (non exploité cette année)		×	×
Trio		×	×
Mathable – Triolet		×	×
Le compte est bon		×	×
Jeu d'échanges	×	×	
Le lièvre et la tortue		×	×
Jeu des bonus - malus		×	×
Cartes binaires et énigmes numériques		×	×

Tab. 6 – Jeux sur les symétries et autres transformations

	M	P	S
Jeu de miroirs allemand	×	×	×
Mirror game ou Jeu du miroir	×	×	(×)
Reflecto		×	×
Jeu du dessin en miroir	×	×	(×)
Yin yang		×	×
Combis et minicombis		×	×
Pavages		×	×
Frises		×	×
Mandalas		×	×
Jeux de rotation		×	×
Vitrail	(×)	×	×
Jeux de dés		×	×
Spirographe		×	×
Casse-têtes de Rubik		×	×

justification mathématique de celle-ci. Les jeux de rotation et jeux de dés aident à construire une meilleure vision de mouvements dans l'espace. Le spirographe permet de retrouver les notions de pgcd et ppcm dans un contexte original qui peut aider à leur donner du sens. *Vitrail* est un jeu très simple qui peut aussi conduire à une modélisation du problème.

Les projets de l'année prochaine

Les nouveaux thèmes prévus l'an prochain sont : jeux de solides, jeux de pliages et découpages et jeux de perspective. Une collaboration avec les collègues littéraires est prévue pour la séance « jeux logiques ». La création d'un jeu de coopération est en cours, afin de développer encore plus l'échange de stratégies.

Et dans le futur ? Une utilisation de logiciels de jeux comme matériel supplémentaire pourrait être envisagée.

4. Évolution du concept

Participation

L'écho a été positif : des étudiants des trois sections visées sont venus. Quelques collègues maîtres-assistants, maîtres de formation pratique et personnes extérieures ont également assisté à l'une ou l'autre séance. Néanmoins dans l'ensemble peu d'étudiants se sont inscrits. Quelques motifs ont été donnés : travail en dehors de l'école, récupération de cours, préparation de stage ou de travaux pour l'école. Les participants ont chaque fois été enchantés et sont revenus lorsque c'était possible. Certains étudiants m'ont dit qu'ils avaient pris beaucoup de plaisir, que c'était la première fois qu'ils s'amusaient à faire des mathématiques, qu'ils se sentaient à l'aise.

Évolution

Les jeux proposés ont été rapidement constitués pour une moitié de jeux sur le thème proprement dit et pour l'autre moitié de jeux des séances précédentes. Lors de chaque séance est proposé au moins un jeu à stratégie gagnante, destiné aux étudiants de normale primaire et normale secondaire. À chaque séance est proposée aussi une feuille de problèmes, que l'on peut résoudre par la suite chez soi.

Parfois, quelques curiosités mathématiques sont aussi présentées : photos découpées où des personnages disparaissent ou apparaissent selon l'assemblage des pièces, « magie », … Certains étudiants ont assisté à une séance de jeu dans le cadre des Ateliers de Formation Professionnelle, ou dans le cadre d'une semaine « Ouverture sur le monde extérieur ».

Avis des étudiants

Lorsqu'on demande aux étudiants (futurs enseignants) l'intérêt de ce club, ils citent :

- Faire des mathématiques en s'amusant (toutes sections, surtout primaire) ;
- Voir des jeux exploitables en classe, découvrir des jeux (section préscolaire surtout) ;
- Améliorer la logique, se structurer, développer l'anticipation (toutes sections, surtout secondaire) ;
- Appliquer des notions vues, leur donner du sens (toutes sections, surtout secondaire) ;
- Passer de la manipulation à la représentation mentale, réfléchir (toutes sections).

Lorsqu'on demande aux mêmes étudiants s'il est possible de transposer le club au niveau où ils enseigneront, ils proposent :

- Une utilisation des jeux en introduction de leçon, pour utiliser les notions vues (primaire, secondaire) ;
- Un moment privilégié dans l'horaire (maternel, primaire) ou dans l'année (primaire, secondaire) ;
- Un parascolaire, une utilisation pendant les pauses : midi, garderies (toutes sections) ;
- Une utilisation en remédiation ou en contrat (primaire, secondaire), en dépassement (secondaire) ;
- Un moment de rencontre entre les élèves d'une même classe, de classes différentes, entre élèves et parents (primaire).

Espérons que ceci apparaîtra encore plus dans les écoles à l'avenir.

5. Premier bilan

Cette année, construire ou se procurer les jeux à moindre frais et rédiger une première version des fiches a été une activité très prenante, mais aussi très créative et enrichissante intellectuellement.

La place de ces jeux reste pour moi en dehors du cours de mathématique. Ils doivent pouvoir être envisagés comme une détente, une découverte, ce qui n'empêche pas de reprendre un jeu en classe et de l'étudier plus en profondeur. La principale difficulté est d'amener la première fois les étudiants à découvrir les jeux.

L'une des classes a particulièrement bien répondu au projet : ce sont des étudiants de normale primaire, ce qui a eu comme conséquence une approche plus ludique des mathématiques au cours et progressivement en stage. L'observation et l'utilisation de nombreux jeux permettent plus aisément d'en créer de nouveaux qui répondent à un besoin précis (introduction d'un sujet ou remédiation par exemple). Certains étudiants ont ainsi au cours de l'année proposé ou créé des jeux dans le cadre ou en dehors du club de jeux mathématiques, sont venus avec des étudiants d'autres classes. Certains étudiants des trois sections ont emprunté des jeux.

Le club de jeu induit un changement de la relation prof-élève. En effet, l'enseignant apparaît ici lors de l'activité plus comme médiateur, et par la suite comme un formateur, un « coach » et moins comme un évaluateur. Le regard positif sur l'élève peut l'aider à surmonter une difficulté. De plus, le club apparaît comme lieu d'échanges et de respect de l'autre.

Souvent, l'aspect rigoureux et structurant des mathématiques est passé au second plan : c'est après avoir essayé et échoué plusieurs fois que l'on ressent le besoin de structurer sa démarche pour progresser : les étudiants ont ici eu l'occasion de passer par cette étape.

Ces jeux ont permis de transmettre une certaine culture mathématique, d'autant plus que beaucoup d'étudiants ne les connaissaient pas. Ils permettent aussi de susciter et développer la curiosité des élèves.

Des collègues de mathématique et d'autres disciplines sont venus, ont montré leur intérêt. Des collaborations se mettent progressivement en place pour l'année prochaine.

6. Conclusions et perspectives

Quel est en définitive l'intérêt de cette activité ?

- Un espace et un temps de rencontre pour des élèves de classes différentes ;
- Un moment « gratuit » de découverte et de jeu, de plaisir lorsqu'on est arrivé à vaincre une difficulté ;
- Une occasion d'enrichir le matériel pédagogique à disposition de tous ;

– Une occasion de manipuler, de partir du concret, quel que soit le niveau, sans « honte », et de se poser des questions en allant ainsi progressivement vers l'abstrait (et ceci particulièrement pour la géométrie) ;
– Une occasion de susciter l'observation, la réflexion, l'anticipation, le souhait d'aller plus loin ;
– Une occasion d'appliquer ses connaissances dans des situations nouvelles, ce qui peut aider à augmenter le niveau de compétence des élèves ;
– Une occasion de transmission de la culture mathématique ;
– Un autre regard sur les mathématiques ;
– Un moteur pour la motivation des élèves ;
– Une occasion d'échanges intéressants avec les étudiants ;
– Pour les (futurs) enseignants, une source de réflexion sur les aspects mathématiques et pédagogiques des jeux, sur les utilisations possibles ;
– Une occasion de discuter entre collègues et de collaborer : jeux à proposer, suites à donner, ...

Comment l'organiser et dans quel cadre ?

Rêvons un peu et imaginons plusieurs types d'organisation :

– Reprise de l'idée telle quelle dans une école maternelle, primaire ou secondaire.
– Création de parascolaire mathématique au même titre qu'un atelier théâtre ou sport.
– Utilisation de l'idée pour faciliter la transition maternelle/primaire ou primaire/secondaire en proposant ces activités en commun.
– Création d'une « mallette de jeux mathématiques » ou d'un « carnet de jeux mathématiques » à proposer aux élèves qui n'ont pas cours (version avec ou sans surveillance).
– Séances de remédiation (collective ou individuelle) organisées autour de jeux travaillant les compétences à acquérir.
– Création d'une ludothèque mathématique dans l'école ou dans le quartier (au même titre que la bibliothèque).
– Partie d'un centre de ressources mathématiques qui cumulerait activités proposées aux élèves et documents proposés aux enseignants.
– ... Celle que chacun pourra imaginer et réaliser dans son école !

Bibliographie

[1] APMEP, *Jeux 1 : Les jeux et les mathématiques*, 1982.

[2] APMEP, *Jeux 3 : Jeux pour la tête et les mains*, 1990.

[3] APMEP, *Jeux 5 : Des activités mathématiques au collège*, 1998.

[4] APMEP, *Jeux 6 : Des activités mathématiques pour la classe*, 2002.

[5] Malaty G., Mathematical Clubs : A Way to Develop Mathematics Education, *in* : *Nordic Committee Proceedings of ICME 10*, Helsinki, 2005.

[6] OCDE, *Connaissances et compétences : des atouts pour la vie*, Paris, 2001.

[7] *Tangente Jeux et Stratégie* (revue bimestrielle).

[8] Tanton J., Maths circles and Olympiads — MSRI Asks : Is the US Coming of Age ?, *Notices of the AMS*, Vol. 53, n° 2, Févr. 2006 ([2]).

[9] Richard J., Trouillot É., Faradji D., Le Borgne Ph., *Mathématiques et jeux au collège*, Hachette Éducation, Paris, 2005.

[10] `http://perso.wanadoo.fr/therese.eveillau`

[11] `http://www.jlsigrist.com`

[12] `http://cso.ulb.ac.be/urem`

([2]) Une version française de cet article devrait paraitre prochainement dans *M&P*.

Cabri-Géomètre et les sections coniques (1e partie)

JEAN-PAUL HOUBEN
Université Catholique de Louvain

Dans des articles précédents, nous avons construit l'ellipse (1), la parabole (2) et l'hyperbole (3) comme lieux de points. Dans l'article d'aujourd'hui, nous allons envisager les coniques comme l'intersection d'un cône avec un plan. Si le plan est variable, nous pouvons théoriquement obtenir les trois sortes de coniques. Mais il ne faut pas se faire d'illusions, nous n'obtiendrons pratiquement jamais une parabole rien qu'en déplaçant un point afin de faire varier la section (4).

Pour commencer, il nous faut un cône (5) et un plan de section (6).

Dans le cône, plaçons un point variable X sur le cercle de la base. Traçons la droite passant par X et le sommet S pour obtenir une génératrice du cône. La droite SX rencontre le plan de section en un point de la conique. Il reste à rechercher le lieu du point d'intersection lorsque le point X parcourt le cercle de la base du cône. On obtient ainsi la conique comme section du cône par le plan. On a par exemple le résultat visible sur la figure 1.

Mais la section obtenue n'est pas utilisable : elle est obtenue comme un lieu.

Adresse de l'auteur : Jean-Paul Houben, Rue de l'Église 78, 1301 Bierges ; courriel : `houbenjp@versateladsl.be`.

(1) Cabri-Géomètre et l'ellipse. *M&P* 144, Novembre - Décembre 2003, pp. 33–38.

(2) Cabri-Géomètre et la parabole. *M&P* 154, Novembre - Décembre 2005, pp. 57–61.

(3) Cabri-Géomètre et l'hyperbole. *M&P* 155, Janvier - Février 2006, pp. 29–35.

(4) Il en est de même lorsqu'on veut tracer une conique avec l'outil **Ligne** / *Conique* qui impose la donnée de cinq points. En changeant la position des points, on peut obtenir une ellipse ou une hyperbole mais pratiquement jamais une parabole. Pour en construire une, il nous faut des points très particuliers. En effet, analytiquement, pour obtenir une parabole, il faut que $B^2 - AC = 0$.

(5) Perspective cavalière : le cube, le cercle, le cône. *M&P* 143, Septembre - Octobre 2003, pp. 25–31.

(6) Cabri-Géomètre et les sections. *M&P* 147, Mai - Juin 2004, pp. 89–94.

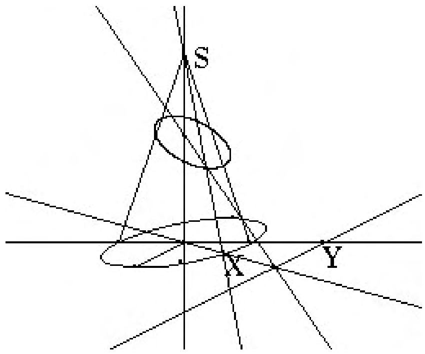


Fig. 1 –

Nous allons donc procéder autrement. Le cercle de la base du cône, représenté par une ellipse à cause de la perspective, a été construit en utilisant 5 points particuliers. Nous allons faire de même pour la section en recherchant les points d'intersection de 5 génératrices particulières. On terminera en utilisant le tracé d'une conique passant par 5 points. Nous aurons ainsi la section comme objet et non comme lieu.

Passons à la réalisation en construisant le cône avec ses 5 points particuliers de la base.

Prenons un cercle de centre O avec deux diamètres perpendiculaires (un vertical et l'autre horizontal). Sur ce cercle nous aurons deux paires de points diamétralement opposés et un cinquième point choisi arbitrairement. La perspective cavalière est définie par le segment OB et le triangle de sommet O ([7]). À partir du cinquième point du cercle de départ, on détermine le point C. La base du cône est construite comme conique passant par les 5 points A, B', A', B et C.

Choisissons un point S comme sommet sur le diamètre vertical et notre cône est défini par sa base et son sommet (figure 2).

([7]) Rectangle isocèle dans l'espace.

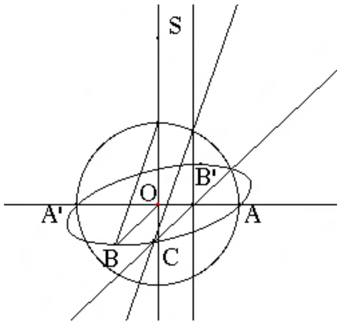


Fig. 2 –

1. Sections elliptiques et hyperboliques

Déterminons maintenant le plan de section par un point et une droite. Le point sera le point X sur l'axe du cône et la droite une parallèle à OB passant un point Y sur le diamètre horizontal (figure 3).

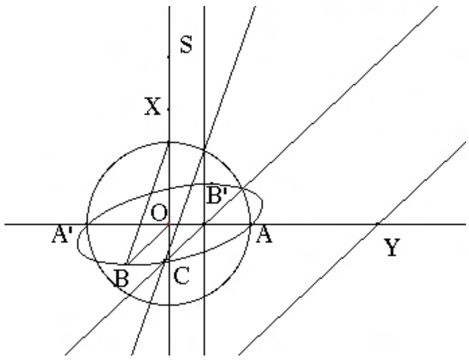


Fig. 3 –

Le point Y nous permet déjà d'obtenir deux points de la section : le point d'intersection de la génératrice SA avec la droite XY et le point d'intersection de la génératrice SA' avec la même droite XY. Il reste à prendre deux autres points Z et T pour avoir 4 points supplémentaires. En n'en gardant que 5, nous construisons la section (figure 4).

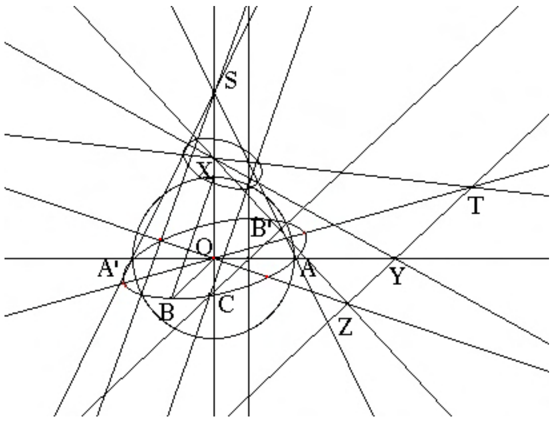


Fig. 4 –

En cachant toutes les constructions, il nous reste la figure 5 :

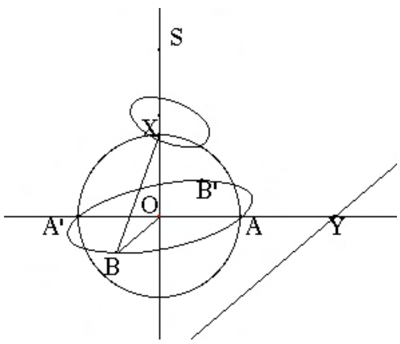


Fig. 5 –

Ajoutons pour finir les génératrices (demi-droites) passant par A et A'. Nous avons alors le résultat visible sur la figure 6 :

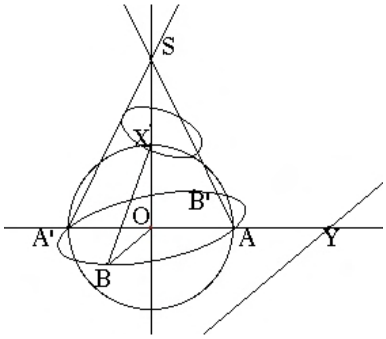


FIG. 6 –

Mais nous pouvons avoir un plus beau dessin en prenant comme génératrices les tangentes issues du sommet S à l'ellipse de la base. Pour les obtenir, nous devons nous référer à l'article sur les axes d'une conique ([8]).

Nous devons d'abord déterminer deux diamètres conjugués de l'ellipse de base. Puis à l'aide de la macro élaborée dans l'article précité, construire les deux axes de symétrie de l'ellipse. Ensuite déterminer la position des foyers en construisant le cercle centré à l'extrémité du petit axe avec comme rayon la moitié du grand axe. On termine par le tracé des tangentes issues du sommet S à l'ellipse de la base ([9]).

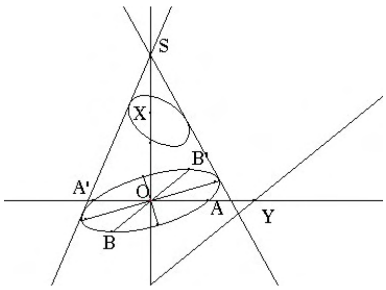


FIG. 7 –

([8]) Cabri-Géomètres et les axes d'une conique, *M&P* 156, de Mars - Avril 2006, pp. 25–33.
([9]) Cabri-Géomètre et l'ellipse, *M&P* 144, Novembre - Décembre 2003, pp. 33–38

On obtient, en cachant les constructions, la figure finale (figure 7).

Dans ce dessin les points X et Y sont mobiles, ils permettent de faire varier la section. Lorsque le point Y passe à l'intérieur de l'ellipse de la base, la section, d'ellipse, se transforme en une hyperbole (figure 8).

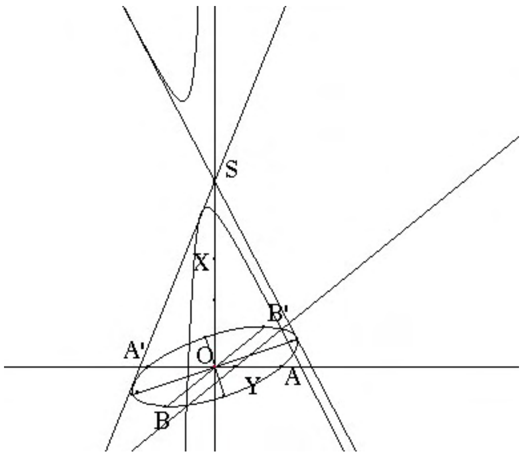


FIG. 8 –

2. Sections paraboliques

Reprenons la figure 2 donnant un cône de sommet S. Construisons maintenant un plan de section variable et parallèle à une génératrice du cône.

Considérons la génératrice SA du cône et, par le point Y du plan de la base du cône, traçons une parallèle à SA et une parallèle à OB. Le plan de section sera ainsi déterminé par deux droites passant par le point Y l'une d'entre elles étant parallèle à une génératrice du cône (figure 9).

Comme dans le cas de l'ellipse et de l'hyperbole, nous allons déterminer la section en recherchant l'intersection de notre plan avec cinq génératrices particulières. Commançons par déplacer le point Y à l'intérieur de la base du cône. Nous nous ramenons aux constructions précédentes en recherchant l'intersection de notre plan de section avec la hauteur du cône : soit X ce

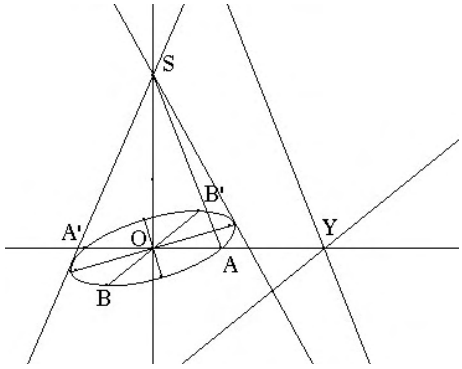


FIG. 9 –

point. Il s'agit de l'intersection de la droite du plan, parallèle à la génératrice du cône, avec la hauteur du cône.

On reprend la technique de construction décrite dans la première partie. Prendre un point P sur la génératrice du plan de section située dans la base du cône. Tracer la droite passant par ce point et le point X obtenu sur

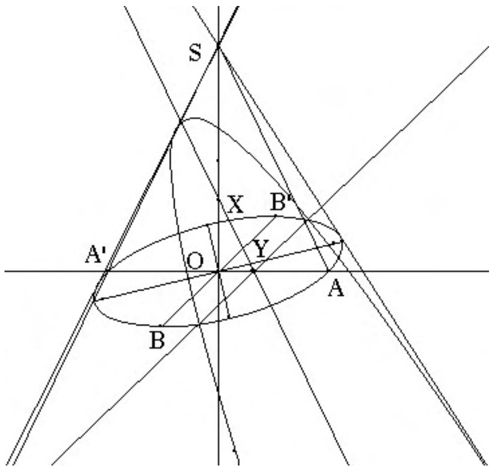


FIG. 10 –

la hauteur du cône. Tracer le diamètre de la base du cône passant par le point P. Rechercher les intersections de ce diamètre avec l'ellipse de la base. Tracer la génératrice utile et rechercher son intersection avec la droite PX. C'est un point de la section. Pour ne pas se perdre dans les constructions, on cache les trois droites construites et les points intermédiaires. On ne garde que le dernier point. Cette construction doit être reproduite pour obtenir les 5 points indispensables pour tracer la conique. On a ainsi le dessin avec une section parabolique visible sur la figure 10.

Il reste à déplacer le point Y pour modifier la section parabolique.

On trouvera sur le site de la SBPM : `www.sbpm.be`, les fichiers Cabri qui permettent d'obtenir les sections ellipse-hyperbole (`coniE_Hy.FIG`) et les sections paraboliques (`coniPar.FIG`).

Nous verrons dans le prochain article comment on peut obtenir l'équation de la section.

Les narrations de recherche : des écrits intermédiaires et réflexifs

JACQUES BAIR, VALÉRIE HENRY
HEC-École de Gestion de l'Université de Liège

Introduction

Bien que de nombreux professeurs de mathématiques les pratiquent probablement depuis longtemps, un peu à la manière de Monsieur Jourdain qui faisait de la prose sans s'en rendre compte, les narrations de recherche n'ont été introduites de manière formalisée qu'à la fin du siècle dernier. Des membres de l'IREM de Montpellier souhaitaient alors observer des élèves résolvant des problèmes de géométrie (voir à ce sujet [5]) ; pour mettre en évidence et analyser le travail de recherche des élèves, ils ont mis au point un type d'exercice qui peut être défini comme étant *un travail scolaire consistant en un exposé détaillé, écrit par l'élève, d'une suite d'actions, qu'il a réalisées au cours de la recherche d'un problème de mathématiques* (L. C. Paès, cité dans [15], p. 6).

Cet outil pédagogique est largement étudié dans une brochure éditée récemment par la commission pédagogique de la SBPMef ([2]) : nous y renvoyons le lecteur désireux de se familariser avec les narrations de recherche et d'en découvrir de nombreux exemples concrets.

Dans cet article, nous nous contentons d'émettre quelques réflexions générales sur les langages, puis sur les écrits en mathématiques ; ensuite, nous traitons dans cette optique le cas particulier des narrations de recherche.

Adresses des auteurs : Jacques Bair, Valérie Henry, Université de Liège, Bd du Rectorat 7, 4000 Liège ; courriel : `J.Bair@ulg.ac.be`, `V.Henry@ulg.ac.be`.

1. Les langages en mathématiques

L'apprentissage des mathématiques est parfois comparé à celui d'une langue étrangère ([4]) avec ses problèmes de vocabulaire, de sémantique, de syntaxe, ...

Une difficulté majeure de la formation dans cette discipline provient du fait que les mathématiques comprennent plusieurs types de langages. Ainsi, C. Laborde [16] en distingue trois :
- Le langage *naturel*, qui correspond à la langue que nous employons dans la vie courante : en l'occurrence ici, la langue française ;
- Le langage *formel*, représenté par l'écriture symbolique d'expressions mathématiques, qui est un répertoire de signes et de symboles, pouvant être ésotériques, avec de règles spécifiques pour les agencer ;
- Le langage *mathématique* qui mixe les deux précédents, mais avec des caractéristiques propres, par exemple, avec des tournures syntaxiques peu usitées dans le langage courant, ou avec des mots, nouveaux ou connus, mais utilisés dans un sens particulier.

Ces trois langages, auxquels certains auteurs ([10]) ajoutent le langage *graphique*, représentent des codes qui possèdent leur propre structure, leurs règles implicites ou explicites, leur vocabulaire, leur sémantique, leurs conventions, ..., avec des intersections non vides et pas forcément cohérentes. Leur utilisation conjointe est susceptible d'engendrer, chez les apprenants, une certaine confusion provenant du décodage et du traitement de l'information, qui peuvent être spécifiques aux différents langages. Par exemple, des mots du langage naturel sont employés par les mathématiciens avec une signification souvent suggérée par l'usage courant, mais qui peut s'en éloigner : cette interférence entre les sens savant et usuel peut être la cause d'obstacles épistémologiques pour les étudiants, ainsi que le mettent en évidence des études didactiques sur l'apprentissage de concepts tels celui de limite ([1], [8],...).

Il en résulte que le recours à différents registres langagiers nécessite notamment ([6], p. 81) :
- Des compétences linguistiques proprement dites pour comprendre un message écrit ;
- Une connaissance spécifique du vocabulaire et du symbolisme mathématiques ;
- Un abandon progressif de la logique naturelle pour la logique formelle ;
- La capacité de repérer, sélectionner, trier et exploiter les informations mathématiques.

2. Les écrits en mathématiques

Les productions mathématiques se font le plus souvent par écrit et peuvent avoir des finalités différentes ; que l'on pense notamment aux

- Très nombreux écrits, livres ou revues, qui sont consacrés aux mathématiques, et plus spécialement à leur apprentissage, à leur vulgarisation ou à la diffusion de résultats nouveaux : ainsi, au début de ce siècle, on estime qu'environ 60 000 articles originaux sont publiés chaque année ([19]) ;
- Travaux variés que les élèves sont invités à écrire durant leur apprentissage : exercices, problèmes, travaux pratiques, TPE (travaux personnels encadrés) ([24]), TFE (travaux de fin d'études) ([25]), portfolios ([12]), ... ; leurs buts peuvent être variables : s'entraîner, se perfectionner, s'évaluer, mémoriser, rendre-compte, synthétiser, imaginer, réfléchir, faire agir, ... ;
- Nombreux tableaux couverts par un professeur de mathématiques dispensant ses cours.

Les écrits rencontrés en mathématiques peuvent être classés selon leur fonction : énoncer un problème ou une règle, formuler des consignes ou une question, élaborer une stratégie, produire des messages, communiquer des démarches ou des résultats, expliquer un savoir ([6]).

Cette prédominance de l'écrit sur l'oral dans cette discipline peut s'expliquer par le fait que, contrairement au langage naturel qui se présente indifféremment sous forme écrite ou orale, les langages symbolique et graphique se pratiquent essentiellement par écrit, ce qui est donc forcément le cas pour le langage mathématique puisque ce dernier s'appuie sur les deux autres.

Les résultats connus en mathématiques sont, le plus souvent, rédigés sous une forme austère, de façon décontextualisée et dans un langage assez formalisé ; le style d'exposition est qualifié par Lakatos de *déductiviste* et non d'*heuristique* ([17], p. 142). Un écrit mathématique devrait idéalement se rapprocher de cette description, certes un peu caricaturale :

> *l'écriture d'un article de recherche mathématique va « droit au but ». Pas de détails : ils cacheraient le fil de la démonstration. Les digressions sont exclues. Pas question de décrire les fausses pistes qu'on a essayées, ni d'expliquer pourquoi on y a cru. L'indispensable, et rien de plus. Tout est tendu vers le même but. Pas de circonlocutions forcées pour éviter les répétitions de « donc » et de « or » qui articulent les propositions entre elles. Cette*

> *convention de style est adoptée de façon si générale qu'elle s'est transformée en nécessité, se justifiant elle-même. Les indications superflues déroutent d'autant plus le lecteur, qu'il s'attend moins à ce viol de la convention ; son esprit est préparé à ce que tout ce qu'il lit soit décisif pour la démonstration en cours. L'auteur doit saisir la chose même, s'effacer derrière, et l'exprimer exactement. L'idéal de la rédaction mathématique, c'est le squelette ! Et, si j'ose filer pareille métaphore, les os du squelette sont ces signes cabalistiques (formules, équations, symboles) qui effraient le profane, et dont la fonction est de dire l'essentiel sans fioriture* ([20], p. 79).

Une présentation finale est bien entendu le fruit d'un travail préparatoire parfois considérable, au cours duquel l'auteur réalise divers essais, change de piste, peaufine peu à peu son texte, élimine progressivement le superflu, clarifie pas à pas ses intentions et son écriture, ... De tels documents finalisés reposent sur d'autres écrits qui font office de brouillons et ne sont pas destinés à être conservés. Mais, alors que les premières ébauches du travail peuvent être maladroites (et donc peut-être inintéressantes), les améliorations successives du texte se rapprochent petit à petit du résultat final. Ces écrits provisoires sont loin d'être inutiles : ils constituent en quelque sorte un « passage obligé » qui permet à l'auteur de progresser dans son écriture ; nous les qualifierons d'*intermédiaires* ([7]).

Dans le contexte scolaire, de tels écrits intermédiaires devraient être favorisés, même s'ils s'écartent radicalement de la forme finale souhaitée qui est proche de la description donnée ci-dessus. En effet, ils vont permettre aux élèves d'apprendre graduellement à rédiger des textes mathématiques formalisés.

Pour atteindre de tels objectifs inhérents à tout apprentissage des mathématiques, l'écrit se doit d'être, à tout le moins dans son stade intermédiaire, *réflexif*, en ce sens que *l'élève écrit ce qu'il croit savoir, il écrit ses questions, il va lire, discuter, récapituler, trier, organiser avec des tableaux, faire des schémas, résumer ce qu'il a appris, reformuler* ([3]). De tels écrits sont alors forcément spontanés, liés à la situation rencontrée et à l'expérience personnelle du sujet : ils sont de « premier genre » comme les nomment certains auteurs ([22]). Ils doivent tendre vers des documents de « second genre », à savoir des écrits dépouillés de tout superflu, décontextualisés et finalisés dans le langage mathématique, ayant *une signification culturelle plus large* ([22]). De fait, comme ce sont des écrits de second genre qui, en vertu du contrat didactique traditionnel, sont implicitement recherchés dans le contexte scolaire, il s'agit dès lors de faire passer progressivement les apprenants du premier au second genre.

3. Les narrations de recherche

Dans une narration de recherche, les élèves travaillent sur un problème mathématique ou un travail de type documentaire ([2]), individuellement ou en groupe, à l'école ou à domicile : ils sont invités à s'interroger sur leurs recherches, leurs réflexions, leurs conjectures, leurs doutes, . . . ; ils doivent décrire chronologiquement le cheminement de leur apprentissage en notant pas à pas leur stratégie, leurs amorces de solution, leurs changements de pistes, leurs essais infructueux, leurs interrogations, puis leur solution du problème, leurs vérifications, leurs questions et remarques additionnelles éventuelles.

Ainsi conçues, les narrations de recherche apparaissent essentiellement comme étant des écrits intermédiaires et réflexifs.

Ce type d'exercice change fondamentalement le contrat didactique traditionnel selon lequel seule importe une réponse définitive et exacte à un problème posé, et ceci conformément à une description classique des mathématiques, inspirée de [13], selon laquelle :

- Les véritables questions possèdent une vraie réponse et une seule, d'autres étant forcément erronées ;
- Il existe nécessairement une voie sûre pour découvrir ces vérités ;
- Une fois obtenues, ces vraies réponses doivent être compatibles entre elles et former un tout.

Une narration de recherche est principalement centrée sur le travail personnel de l'apprenant (ou du groupe d'apprenants) en mettant en évidence sa (ou leur) production langagière décrivant son (ou leur) travail heuristique, mais en refoulant à l'arrière-plan le résultat final (d'ailleurs généralement connu du professeur). Elle a l'avantage d'offrir à l'élève un espace de liberté lui permettant de travailler à son propre rythme, selon ses méthodes préférées, et surtout en utilisant le(s) langage(s) avec le(s)quel(s) il se trouve le plus à l'aise ; notamment, le langage employé ne doit pas être nécessairement formalisé, car le texte peut être écrit en langage naturel ; de plus, les normes régissant le passage d'un langage à un autre sont relativement peu rigides : par exemple, des formules mathématiques ou des graphiques peuvent être mélangés à du texte écrit en langage naturel, sans se soucier de règles bien précises en la matière.

Bien entendu, un travail d'institutionnalisation, avec éventuellement un débat scientifique ([18]), s'avérera indispensable et devra donc être organisé par l'enseignant qui veillera à ce que chaque élève s'améliore au niveau des savoirs et des procédures mathématiques, mais également passe progressivement d'écrits de premier genre à ceux de second genre.

Une narration de recherche est ainsi clairement un outil permettant de développer des compétences langagières, car elle peut amener petit à petit l'apprenant à se sentir plus à l'aise avec le langage mathématique proprement dit.

Mais ce genre d'exercice se révèle encore performant dans d'autres domaines.

D'un point de vue psychologique, une narration de recherche, en tant qu'écrit réflexif, favorise le questionnement de l'élève sur ses connaissances, ses savoir-faire et ses méthodes de travail. Elle joue donc un rôle métacognitif, car elle nécessite une analyse de la situation, sa description, le tri de certaines informations, ..., ce qui participe évidemment à la formation de l'esprit.

Au surplus, en écrivant une narration de recherche, les apprenants progressent également sur le plan socio-affectif : ils se construisent une représentation d'eux-mêmes en tant qu'individu ; en écrivant les pensées et les raisonnements selon leur propre point de vue, les élèves peuvent mieux se situer par rapport à leurs condisciples, mais aussi vis-à-vis de leur professeur. Réciproquement, ce dernier a l'occasion de découvrir chacun de ses élèves, avec ses propres démarches, ses difficultés potentielles, son originalité, sa méthode de travail, ... ; il peut alors tenir compte de ces singularités pour individualiser au mieux son enseignement et ainsi veiller au meilleur développement possible de chaque apprenant. De la sorte, l'enseignant est mieux en mesure de juger le chemin que chaque élève doit personnellement parcourir pour passer d'un écrit intermédiaire à une production mathématique finalisée.

Écrire une narration de recherche apparaît donc comme étant bien plus qu'un simple travail d'écriture ; il s'agit d'un exercice pour l'élaboration de l'esprit, un véritable « vecteur d'apprentissage » ([14]), car l'écriture devient alors *un mode de construction et d'appropriation de savoirs et de savoir-faire* ([23]) : *il faut écrire pour penser, pour apprendre et pour se construire* ([7]).

4. Conclusion

Terminons cet article par un tableau comparant, de manière schématique, les différences entre les narrations de recherche et les productions mathématiques d'un type plus traditionnel.

Caractéristiques	**Narr. rech.**	**Prod. classiques**
Statut	intermédiaire	définitif
Langage principal	naturel	formel
Écrit de	premier genre	second genre
Niveau de contextualisation	contextualisé	décontextualisé
Mode d'exposition	heuristique	déductiviste
Statut de l'erreur	tolérée	sanctionnée
Type « idéal » d'évaluation	formative qualitative	certificative quantitative

Cette comparaison met en évidence les complémentarités des narrations de recherches vis-à-vis des travaux plus conventionnels, et de là l'intérêt d'incorporer ce type de production dans la formation mathématique des apprenants ; elle s'inscrit en effet fort bien dans le cadre, recherché à l'heure actuelle, d'un apprentissage socio-constructiviste ([1]) et autorégulé ([2]).

En conclusion, il nous semble que les narrations de recherche peuvent aider efficacement les élèves dans leur apprentissage des mathématiques ([3]), ainsi que les enseignants dans l'appréhension de ce que les apprenants sont en train de « construire dans leur tête ». Elles constituent un outil, parmi d'autres, permettant à l'élève de progresser dans sa formation, et ceci en harmonie avec cette citation de Perrenoud :

> *On peut aider un élève à progresser de mille façons. En expliquant plus simplement, plus longuement ou autrement. En l'en-*

([1]) Les narrations de recherche s'inscrivent dans une démarche constructiviste en ce sens que l'élève peut, en construisant seul sa solution, auto-construire de nouvelles connaissances à partir de ses anciennes ; la dimension socio se réfère au fait que l'élève interagit en groupe avec les autres élèves, ce qui peut donner lieu à des conflits de points de vue socialement vécus et déboucher moyennant une restructuration cognitive sur une meilleure solution du problème ([2], p. 38).

([2]) *L'autorégulation se réfère au degré avec lequel les individus s'impliquent de manière active, métacognitive, motivationnelle et comportementale dans leur processus personnel d'apprentissage.* ([9], p. 36).

([3]) Il s'agit en effet d'une activité favorisant ce que certains spécialistes appellent l'*autorégulation cognitive* ([9], p. 29).

> *gageant dans une autre tâche, qui doit être plus mobilisatrice ou proportionnée à ses moyens. En allégeant son angoisse, en lui redonnant confiance. En lui proposant d'autres raisons d'agir ou d'apprendre. En le plaçant dans un autre cadre social, en dédramatisant la situation, en modifiant la relation ou le contrat didactique, en modifiant le rythme de travail et de progression, la nature des sanctions et des récompenses, la part d'autonomie et de responsabilité de l'élève* ([21], p. 4).

À notre avis, les narrations de recherche rencontrent donc bien les préoccupations didacticiennes de F. Gippet et A. Jorro lorsqu'elles écrivent :

> *Dans une perspective didactique, il paraît important de prendre en compte le fait que l'écrit peut constituer un « lieu » où objectiver des savoirs en construction, un lieu de (re)travail conceptuel. L'idée est d'envisager des dispositifs de formation qui exploitent cette caractéristique non évidente de l'écrit et permettent de la conscientiser* [11].

Bibliographie

[1] ANDRIANI M. F., DALLANOCE S., GRUGNETTI L., MOLINARI F., RIZZA A., *Autour du concept de limite*, Contrat de recherche du CNR, Université de Parme, 1997.

[2] BAIR J., DELAGARDELLE J.-Cl., HENRY V., *Narrations de recherche : de la théorie à la pratique dans les enseignements secondaire et supérieur*, Commisssion pédagogique de la SBPMef, Mons, 2006.

[3] BAUTIER É., Lire et écrire pour penser et apprendre, publication de formation continue, *EduSCOL*, site internet :
`http://eduscol.education.fr/D0033/clasrelais_actes3.htm`.

[4] BÉLANGER M., DE SERRES M., Les erreurs langagières en mathématiques, *Correspondance*, vol. 3, n° 4, 1998.

[5] BONAFÉ Fr., CHEVALIER A., COMBES M.-Cl., DEVILLE A., DRAY L., ROBERT J.-P., SAUTE M., *Les narrations de recherche de l'école primaire au lycée*, co-édition de l'IREM de Montpellier et de l'APMEP, brochure APMEP, n° 152, Paris, 2002.

[6] BRIAND J., CHEVALIER M.-Cl., *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques*, Hatier, Paris, 1995.

[7] CHABANNE J.-Ch., BUCHETON D., *Écrire pour penser, apprendre et se construire. L'écrit et l'oral réflexifs*, P.U.F., Paris, 2003.

[8] CHBAT J., GROLEAU J.-D., Difficultés langagières des collégiens et approche sémantique : un plan d'intervention proposé aux enseignants du collégial, site internet :
`http://www.ccdmd.qc.ca/fr/dyn/fichiers/difflang.pdf ?sect=ouvrages`.

[9] DE CORTE E., VERSCHAFFEL L., Apprendre et enseigner les mathématiques : un cadre conceptuel pour concevoir des environnements d'enseignement-apprentissage stimulants, *Enseignement et apprentissage des mathématiques*, sous la direction de M. Crahay, L. Verschaffel, E. de Corte et J. Grégoire, De Boeck, Bruxelles, 2005, chapitre 1.

[10] DE SERRES M., GROLEAU J.-D., *Mathématiques et langages*, Concours du Prix du Ministre pour 1988–1999 au collégial, collège Jean-de--Brébeuf, 1997.

[11] GIPPET F., JORRO A., Les registres du paddage, dans *Passages de l'écriture. Un défi pour les apprenants et les formateurs*, par R. Delamotte, F. Gippet, A. Jorro et M.C. Penloup, P.U.F., Paris, 2000.

[12] GOUPIL G., *Portfolios et dossiers d'apprentissage*, Chenelière/McGraw-Hill, 1998.

[13] GRANT H., What is Modern about "Modern Mathematics", *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 17, n° 3, 1995, pp. 62–66.

[14] IREM de Montpellier, Pourquoi les narrations de recherche en ZEP ?, site internet :
`http://www.irem.univ-montp2.fr/groupeZEP/narrations/objectifs.htm`.

[15] IREM de Paris VII, *Expériences de narration de recherche en mathématique*, ACL - Les Editions du Kangourou, Paris, 2002.

[16] LABORDE C., *Langue naturelle et écriture symbolique : deux codes en interaction dans l'enseignement des mathématiques*, Thèse d'Etat, Grenoble, IMAG, 1982.

[17] LAKATOS I., *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, 1976 ; traduction française, Hermann, Paris, 1984.

[18] LEGRAND M., Genèse et étude sommaire d'une situation co-didactique : le débat scientifique en situation d'enseignement, *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1988, pp. 53–66.

[19] LEMAIRE L., La recherche mathématique aujourd'hui (édition 2000), *Mathématique et Pédagogie*, 128, 2000, pp. 7–35.

[20] Nordon D., *Deux et deux font-ils quatre ? Sur la fragilité des mathématiques*, Belin - Pour la Science, Paris, 1999.

[21] Perrenoud Ph., Pour une approche pragmatique de l'évaluation formative, *Mesure et évaluation en éducation*, vol. 13, 4, 1991, pp. 49–81. Repris dans *L'évaluation des élèves. De la fabrication de l'excellence à la régulation des apprentissages*, Bruxelles, De Boeck, 1998, chapitre 7.

[22] Puault Y., *Les conceptions des objets mathématiques portés par le langage : analyse des erreurs langagières en mathématiques*, mémoire pour le DESS en Psychologie de l'Education, Université de Paris VIII, 2005.

[23] Reuter Y., De quelques obstacles de l'écriture, dans *Pratiques de l'écrit et modes d'accès au savoir dans l'enseignement supérieur*, par M. Dabene et Y. Reuter, Lidil, 1998.

[24] Robin L., À propos des TPE et de leur avenir, *Bulletin de l'APMEP*, 449, 2003, pp. 709–721.

[25] Scheepers C., *Le travail de fin d'études. Quelles compétences, pour quelle formation ?*, Labor Éducation, Bruxelles, 2002.

Problèmes

Claudine Festraets [1]

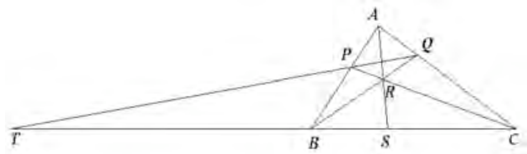
Triangle rectangle

Problème n° 319 de *M&P* n° 155

Le triangle ABC est rectangle en A et tel que $|AB| = 6$ et $|AC| = 8$. Les points P et Q appartiennent respectivement à $[AB]$ et $[AC]$ et $|AP| = |AQ| = 2$. Les droites CP et BQ se coupent en R, les droites AR et PQ recontrent respectivement BC en S et T. Que vaut $|ST|$?

Solution de J. FINOULST de Diepenbeek

En tenant compte des longueurs des côtés de l'angle droit du triangle rectangle ABC, on trouve $|BC| = 10$.



Appliquons le théorème de Ménélaus au triangle ABC coupé par la transversale PQ, nous avons

$$\frac{TB}{TC} \cdot \frac{QC}{QA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$$

ou, selon les données, $\frac{TB}{TC} \cdot \left(-\frac{6}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{4}\right) = 1$, ce qui donne $\frac{TB}{TC} = \frac{2}{3}$. Comme $TC = TB + BC = TB + 10$, on déduit facilement $TB = 20$. $APRQ$ est un quadrilatère complet et on sait que chaque diagonale est divisée harmoniquement par les deux autres ; ainsi les diagonales PQ et AR coupent harmoniquement la diagonale BC en T et C. La moyenne harmonique de BT et BS est donc BC :

$$\frac{2}{BC} = \frac{1}{BT} + \frac{1}{BS}.$$

[1] Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à :
Cl. FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, ou à l'adresse électronique `hamoircl@brutele.be`

Comme $BC = 10$ et $BT = -20$, on obtient $BS = 4$ et finalement $TS = = TB + BS = 20 + 4 = 24$.

Bonnes solutions de J. ANSSEUW de Roeselare, M. BLEVOT de St Denis (La Réunion), R. CHOULET D'Avenay, Cl. KHALID de Bruxelles, P. LE GALL de Metz, M MAESEN de Eupen, J. OOMS de Chimay, A. PATERNOTTRE de Boussu, J. RASSE de Méan, M. VERHEYLEWEGHEN de Bruxelles, Cl. VILLERS de Hyon et Y. DURAND de Mons, qui a envoyé quatre solutions différentes basées sur les géométries synthétique, analytique et vectorielle, et sur la trigonométrie.

Second degré

Problème n° 320 de *M&P* n° 155

Démontrer que si les coefficients a, b, c de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont tous trois impairs, cette équation n'admet pas de racine rationnelle.

Solution de P. LE GALL de Metz
Supposons que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, avec a, b, c entiers impairs, admette une solution rationnelle. Soit p/q une forme irréductible de cette solution. On a donc : $a(p/q)^2 + bp/q + c = 0$, d'où : $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$.
Comme a, b et c sont impairs, la parité de $ap^2 + bpq + cq^2$ est la parité de $p^2 + pq + q^2$.
Deux cas se présentent : soit p et q sont tous deux impairs, soit ils sont de parité différente. Ils ne peuvent pas être tous les deux pairs sans quoi la fraction p/q serait réductible.
• S'ils sont tous les deux impairs, alors p^2+pq+q^2 est impair comme somme de trois nombres impairs.
• S'ils sont de parité différente, alors $p^2 + pq + q^2$ est la somme de deux nombres pairs et d'un nombre impair, c'est donc un nombre impair.
Dans les deux cas on aboutit à une contradiction, car on ne peut pas avoir $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$, 0 étant un nombre pair. Donc l'équation n'a pas de solution rationnelle.

J. ANSEEUW de Roeselare, R. CHOULET D'Avenay, J. FINOULST de Diepenbeek, M. MAESEN de Eupen, J. OOMS de Chimay, A. PATERNOTTRE de Boussu et J. RASSE de Méan ont tous envoyé d'excellentes solutions.

Carré parfait

Problème n° 321 de *M&P* n° 155

Quels sont tous les nombres premiers p tels que la somme des diviseurs entiers positifs de p^4 soit un carré parfait.

Solution de J. ANSEEUW de Roeselare
Les diviseurs entiers positifs de p^4 sont p^4, p^3, p^2, p et 1.
Posons $p^4 + p^3 + p^2 + p + 1 = q^2$. De là, $(2q)^2 = 4p^4 + 4p^3 + 4p^2 + 4p + 4$.
On a

$$\left(2p^2 + p\right)^2 = 4p^4 + 4p^3 + p^2 < (2q)^2$$

et

$$\left(2p^2 + p + 2\right)^2 = 4p^4 + 4p^3 + 9p^2 + 4p + 4 > (2q)^2.$$

De ces deux inégalités, on obtient

$$\left(2p^2 + p\right)^2 < (2q)^2 < \left(2p^2 + p + 2\right)^2$$

et comme $2p^2 + p$, $2q$, $2p^2 + p + 2$ sont des nombres positifs, il vient

$$2p^2 + p < 2q < 2p^2 + p + 2,$$

donc $2q = 2p^2 + p + 1$. D'où

$$\begin{aligned}
(2q)^2 &= \left(2p^2 + p + 1\right)^2 \\
4p^4 + 4p^3 + 4p^2 + 4p + 4 &= 4p^4 + 4p^3 + 5p^2 + 2p + 1 \\
p^2 - 2p - 3 &= 0 \\
(p - 3)(p + 1) &= 0
\end{aligned}$$

La seule solution est $p = 3$. On vérifie que la somme des diviseurs de 3^4 est un carré : $3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1 = 121 = 11^2$.

Bonnes solutions aussi de R. CHOULET d'Avenay et de P. LE GALL de Metz.

* *
*

Les solutions des problèmes que voici doivent me parvenir pour le 1$^{\text{er}}$ janvier 2007 au plus tard. Ces solutions peuvent être manuscrites, mais vous pouvez aussi les envoyer à mon adresse électronique sous la forme d'un fichier LaTeX ou à défaut au format doc ou txt. N'oubliez pas d'indiquer votre nom sur chacune des feuilles.

328. Nombre parfait

Démontrer que le chiffre des unités de tout nombre parfait pair est 6 ou 8 (un nombre naturel est dit parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs propres : par exemple, $6 = 3 + 2 + 1$).

329. Fonctions dérivables

Déterminer toutes les fonctions f telles que

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

pour tous x, y réels avec $xy \neq 1$ et qui sont dérivables partout.

330. Géométrie et calcul

Le triangle ABC, rectangle en A, est tel que $|AB| = 4$ et $|AC| = 3$. Le point P est le milieu de $[AB]$, le point Q est le pied de la perpendiculaire abaissée de P sur BC. Déterminer la longueur de $[AQ]$.

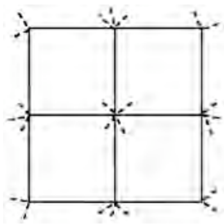
Olympiades

Claudine Festraets [1]

Dans cette rubrique, vous trouverez tout d'abord les problèmes posés lors de la finale de l'Olympiade Mathématique Belge. Les meilleures solutions proposées par les élèves seront publiées dans les prochains numéros de *Mathématique & Pédagogie*. Ensuite, vous pourrez vous confronter aux quinze questions posées à l'AIME.

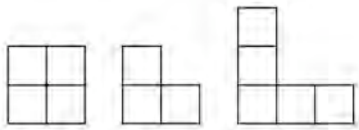
MINI

1. Les nombres naturels sont écrits successivement pour former la suite
   $$0\,1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,1\,0\,1\,1\,1\,2\,1\,3\,1\,4\,1\,5\,1\,6\ldots$$
   (a) Quel est le 2006$^{\text{e}}$ chiffre de cette suite ?
   (b) Combien y a-t-il de chiffres 0 depuis le début de la suite jusqu'au 2006$^{\text{e}}$ chiffre inclus ?
2. Henriette possède 2006 morceaux de ficelle, tous de même longueur. Elle les noue l'un à l'autre afin de réaliser un grand filet carré à mailles carrées, chaque morceau de ficelle devient un côté d'une maille. Ci-dessous est représenté un petit filet 2×2. A chaque noeud, dépassent 2, 3 ou 4 bouts de ficelle (dessinés en pointillés). Il lui faudra couper ces bouts de ficelle.
   (a) Si elle réalise un grand filet 15×15
      i. Combien de morceaux de ficelle devra-t-elle utiliser ?
      ii. Combien de bouts de ficelle qui dépassent devra-t-elle couper ?
   (b) Si elle réalise le plus grand filet carré possible avec ses 2006 morceaux de ficelle, combien de bouts de ficelle qui dépassent devra-t-elle couper ?



[1] Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à :
Cl. FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, ou à l'adresse électronique `hamoircl@brutele.be`

3. Le triangle ABC est isocèle avec $|AB| = |AC|$. L'angle $\widehat{BAC}$ est aigu et tel que le cercle de centre B et de rayon $|BC|$ coupe $[AC]$ en D et $[AB]$ en E. Si les triangles BCD et BED sont symétriques par rapport à BD,
   (a) Que vaut, en degrés, l'amplitude de l'angle $\widehat{BAC}$? (Justifier cette réponse.)
   (b) Prouver que le triangle AED est isocèle.
4. On désire paver un rectangle en utilisant uniquement des pièces identiques à celles dessinées ci-dessous, formées de petits carrés de dimension 1×1. Ce pavage doit s'effectuer sans laisser de trou dans le rectangle et sans superposer deux pièces.



Ce pavage est-il possible si les dimensions du rectangle sont
   (a) 4×6 ?
   (b) 4×5 ?
   (c) 3×7 ?
   (d) $m \times n$ où m et n sont des naturels supérieurs à 2 ?

MIDI

1. Par le sommet A du triangle ABC, on mène une droite d. Les pieds des perpendiculaires abaissées de B et de C sur d sont respectivement D et E. Le point M étant le milieu de $[BC]$, démontrer que $|MD| = |ME|$.
2. Dans le tableau ci-dessous, chaque case est repérée par son numéro de ligne et son numéro de colonne. La ligne 1 commence par 2006 et pour passer du nombre inscrit dans la colonne k au nombre inscrit dans la colonne $k+1$, on soustrait 1. La ligne 2 commence par 2005 et on soustrait à chaque fois 2. La ligne 3 commence par 2004 et on soustrait à chaque fois 3. Et ainsi de suite.

	1	2	3	4	5	…
1	2006	2005	2004	2003	2002	···
2	2005	2003	2001	1999	1997	···
3	2004	2001	1998	1995	···	
4	2003	1999	1995	1991	···	
5	2002	1997	1992	···		
···	···					

(a) Quel est le nombre inscrit en ligne 10, colonne 20 ?

(b) Dans quelles cases le nombre 0 figure-t-il ? Expliquer votre réponse.

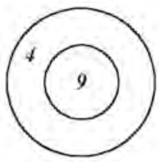
(c) Si le nombre figurant dans le tableau en ligne 1, colonne 1 est n, comment déterminer, en fonction de n, les cases où figure le nombre 0 ?

3. Trois nombres dont le produit vaut 1 sont tels que leur somme est égale à la somme de leurs inverses.

   (a) Donner un exemple numérique où les trois nombres sont différents.

   (b) Est-il vrai qu'au moins un des nombres vaut toujours 1 ? Si oui, le démontrer, si non, donner un contre-exemple.

4. Dans la cible dessinée ci-dessous, il n'y a que deux régions, l'une à 4 points et l'autre à 9 points. Lorsqu'on lance plusieurs flèches successivement, le score est la somme des points marqués dans les régions où les flèches ont abouti.

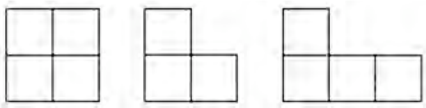


   (a) Existe-t-il des nombres naturels qui ne s'obtiennent pas comme des scores ? Quel est, s'il existe, le plus élevé d'entre eux ?

   (b) Certains nombres naturels peuvent être obtenus comme des scores au moins de deux manières différentes. Quel est le plus petit à partir duquel tous les scores suivants peuvent être obtenus au moins de deux manières ?

MAXI

1. On désire paver un rectangle en utilisant uniquement des pièces identiques à celles dessinées ci-dessous formées de petits carrés de dimension 1×1. Ce pavage doit s'effectuer sans laisser de trou dans le rectangle et sans superposer deux pièces.



   Ce pavage est-il possible si le rectangle est de dimension

(a) 3×5 ?

(b) 3×3 ?

(c) $m \times n$ où m et n sont des naturels supérieurs à 2 ?

2. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Sur DC et BC, on construit les parallélogrammes $DCFE$ et $BCHG$, tels que A, B et G soient alignés, ainsi que A, D et E. Montrer que EH, FG et AC sont concourantes.
3. Déterminer tous les entiers naturels k et n tels que

   (a) $2^k - 1 = n^2$;

   (b) $3^k - 1 = n^3$.
4. Les réels positifs x, y sont tels que $y = 2 - x$.

   (a) Quelle est la valeur maximale de $x^2y^2(x^2 + y^2)$?

   (b) Pour quelles valeurs de (x, y) ce maximum est-il atteint ?

   (c) Quel est l'ensemble des valeurs de $x^2y^2(x^2 + y^2)$?

* *
*

24th Annual American Invitational Mathematics Examination 2006 (AIME)

Ce test a été proposé aux élèves des classes supérieures d'humanités ayant obtenu les meilleurs résultats à la demi-finale de l'OMB, soit 7 élèves de 4^e année, 16 élèves de 5^e année et 24 élèves de 6^e année. Le meilleur résultat, 9 sur 15, est celui de Hoan-Phung Bui, élève de 4^e à l'Athénée Robert Catteau à Bruxelles. Les questions 13 et 15 n'ont été résolues par aucun élève. Je vous recommande la question 13, je l'ai trouvée spécialement difficile.

1. Les six côtés d'un hexagone convexe $ABCDEF$ sont de même longueur. Les angles $\sphericalangle A$ et $\sphericalangle D$ sont droits et les angles $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$, $\sphericalangle E$ et $\sphericalangle F$ sont égaux. L'aire de la région limitée par l'hexagone est $2116\,(\sqrt{2} + 1)$. Déterminez la longueur du côté AB.
2. Les longueurs des côtés d'un triangle d'aire strictement positive sont $\log_{10} 12$, $\log_{10} 75$ et $\log_{10} n$ où n est un entier strictement positif. Trouvez le nombre de valeurs possibles de n.
3. Soit P le produit des 100 premiers entiers impairs positifs. Déterminez le plus grand entier k tel que P est divisible par 3^k.

4. Soit $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{12})$ une permutation de $(1, 2, 3, \ldots, 11, 12)$ pour laquelle on a

   $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6$ et $a_6 < a_7 < a_8 < a_9 < a_{10} < a_{11} < a_{12}$.

   (Un exemple d'une telle permutation est

   $$(6, 5, 4, 3, 2, 1, 7, 8, 9, 10, 11, 12)\ .)$$

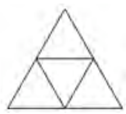
   Déterminez le nombre de telles permutations.

5. Au lancer d'un certain dé truqué à six faces numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6, la probabilité d'obtenir une certaine face F est plus grande que $1/6$ tandis que la probabilité d'obtenir la face opposée à la face F est plus petite que $1/6$. La probabilité d'obtenir chacune des autres faces est $1/6$ et la somme des nombres sur chaque paire de faces opposées est 7. Quand on lance deux dés de ce type, la probabilité d'obtenir une somme égale à 7 est de $47/288$. Étant donné que la probabilité d'obtenir la face F est m/n, où m et n sont des entiers positifs premiers entre eux, trouvez $m + n$.

6. La longueur des côtés du carré $ABCD$ est 1. Les points E et F sont situés sur les côtés BC et CD respectivement de sorte que le triangle AEF soit équilatéral. Un carré de sommet B a ses côtés parallèles à ceux de $ABCD$ et un sommet sur le segment AE. La longueur d'un côté de ce petit carré est $\dfrac{a - \sqrt{b}}{c}$ où a, b et c sont des entiers strictement positifs et b n'est divisible par le carré d'aucun nombre premier. Trouvez $a + b + c$.

7. Trouvez le nombre de paires ordonnées d'entiers positifs (a, b) telles que $a + b = 1000$ et ni a ni b ne comporte de chiffre 0.

8. Il existe une réserve illimitée de triangles équilatéraux isométriques faits de papier coloré. Chaque triangle est d'une couleur opaque et les deux côtés du papier sont de la même couleur. On construit un grand triangle équilatéral à partir de quatre de ces triangles de papier comme sur la figure ci-dessous.

   Deux grands triangles sont considérés discernables s'il est impossible de les placer l'un sur l'autre par des translations, des rotations et/ou des symétries orthogonales de sorte que leurs petits triangles correspondants soient de la même couleur. Étant donné que le choix se fait à partir de 6 couleurs différentes de triangles, combien de grands triangles équilatéraux discernables est-il possible de construire ?

9. Les cercles C_1, C_2 et C_3 ont respectivement leurs centres en $(0,0)$, $(12,0)$ et $(24,0)$ et des rayons 1, 2 et 4. La droite t_1, de pente positive, est une tangente interne commune à C_1 et à C_2. La droite t_2, de pente négative, est une tangente interne commune à C_2 et à C_3. Étant donné que les droites t_1 et t_2 se rencontrent en (x,y) et que $x = p - q\sqrt{r}$ où p, q et r sont des entiers positifs et r n'est divisible par le carré d'aucun nombre premier, trouvez $p+q+r$.

10. Sept équipes participent à un tournoi de football au cours duquel chaque équipe rencontre chaque autre équipe exactement une fois. Il n'y a pas de match nul et chaque équipe a 50 pourcents de chance de remporter chaque match qu'elle joue. Les résultats des différents matchs sont indépendants.

    À l'issue de chaque match, on accorde 1 point au gagnant et 0 point au perdant. Le classement des équipes se fait en additionnant les points. Lors du premier match du tournoi, l'équipe A bat l'équipe B. La probabilité que l'équipe A ait plus de points que l'équipe B à l'issue du tournoi est m/n où m et n sont des entiers strictement positifs premiers entre eux. Trouver $m+n$.

11. Une suite de nombres est définie comme suit : $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ et pour tous les entiers strictement positifs n, $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$. Étant donné que $a_{28} = 6\,090\,307$, $a_{29} = 11\,201\,821$ et $a_{30} = 20\,603\,361$, trouvez le reste de la division de $\displaystyle\sum_{k=1}^{28} a_k$ par 1000.

12. Le triangle équilatéral ABC est inscrit dans un cercle de rayon 2. Prolongez le côté AB au delà de B jusqu'au point D de sorte que $AD = 13$ et prolongez le côté AC au delà de C jusqu'au point E de sorte que $AE = 11$. Par D, tracez une droite l_1 parallèle à AE et par E, tracez une droite l_2 parallèle à AD. Soit F l'intersection de l_1 et l_2. Soit G le point du cercle colinéaire avec A et F et distinct de A. Étant donné que l'aire du triangle CBG peut s'exprimer sous la forme $\dfrac{p\sqrt{q}}{r}$ où p, q et r sont des entiers strictement positifs, p et r sont premiers entre eux et q n'est divisible par le carré d'aucun nombre premier, trouvez $p+q+r$.

13. Combien d'entiers N inférieurs à 1000 peuvent s'écrire comme la somme de j entiers impairs positifs consécutifs pour exactement 5 valeurs de $j \geqslant 1$?
14. Soit S_n la somme des inverses des chiffres non nuls des entiers de 1 à 10^n inclus. Trouvez le plus petit entier strictement positif pour lequel S_n est un entier.
15. Étant donné que x, y et z sont des nombres réels qui satisfont

$$x = \sqrt{y^2 - \frac{1}{16}} + \sqrt{z^2 - \frac{1}{16}},$$

$$y = \sqrt{z^2 - \frac{1}{25}} + \sqrt{x^2 - \frac{1}{25}},$$

$$z = \sqrt{x^2 - \frac{1}{36}} + \sqrt{y^2 - \frac{1}{36}},$$

et que $x+y+z = \dfrac{m}{\sqrt{n}}$ où m et n sont des entiers strictement positifs et n n'est divisible par le carré d'aucun nombre premier, trouvez $m+n$.

Remarques :
- Deux nombres entiers sont premiers entre eux lorsqu'ils n'ont pas de diviseur commun.
- $\log_{10} x = y$ si et seulement si $10^y = x$.

Solutions :

1	2	3	4	5
046	893	049	462	029
6	7	8	9	10
012	738	336	027	831
11	12	13	14	15
834	865	015	063	009

Le coin du trésorier

R. Scrève

Tarifs (Janvier 2006)

Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent *Mathématique et Pédagogie*, *SBPM-Infor* et les deux *Math-Jeunes*.

- Belgique :
  - Cotisation ordinaire : 24 € ;
  - Cotisation multiannuelle (5 ans) : 110 € ;
  - Cotisation familiale (réservée aux couples cohabitant ; les intéressés ne reçoivent qu'un exemplaire des publications, mais sont membres à part entière et participent donc aux élections) : 30 € ;
  - Cotisation réduite (réservée aux étudiants et aux sans-emploi) : 15 € ;
- Europe : 65 € (non-PRIOR), 72 € (PRIOR) ;
- Autres pays : 70 € (non-PRIOR), 79 € (PRIOR).

Abonnement à *Mathématique et Pédagogie*

- Belgique : 30 € ;
- Europe : 50 € (non-PRIOR), 54 € (PRIOR) ;
- Autres pays : 53 € (non-PRIOR), 58 € (PRIOR).

Anciens numéros :
- $<$ 2005 : 0,75 €/n° + frais d'expédition.
- $\geqslant$ 2005 : 2,50 €/n° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : Belgique : 1,80 €, Europe : 4,50 €, Autres pays : 6 €.

Abonnement à *Math-Jeunes* ou *Math-Jeunes Junior*

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, supérieur et inférieur respectivement, sont idéalement pris de manière groupée par l'intermédiaire d'un professeur.

- Abonnements groupés (au moins 5) :
  - Abonnements groupés à une des revues (3 numéros) Belgique : 4 € ;
  - Abonnements groupés aux deux revues (6 numéros) Belgique : 8 €.

- Abonnements individuels :
  - Abonnements à une des revues (3 numéros)
    Belgique : 6 € ;
    France : 8 € (à prendre par l'intermédiaire de l'APMEP) ;
    Europe : 18 € (non-PRIOR), 20 € (PRIOR) ;
    Autres pays : 19 € (non-PRIOR), 22 € (PRIOR).
  - Abonnements aux deux revues (6 numéros)
    Belgique : 12 € ;
    France : 16 € (à prendre par l'intermédiaire de l'APMEP) ;
    Europe : 24 € (non-PRIOR), 26 € (PRIOR) ;
    Autres pays : 25 € (non-PRIOR), 28 € (PRIOR).

Anciens numéros :
- $\leqslant$ 2003–2004 : 0,25 €/n° + frais d'expédition.
- $\geqslant$ 2004–2005 : 0,50 €/n° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : Belgique : 1,50 €, Europe : 2,50 €, autres pays : 3 €.

Bulletin de l'APMEP

Les membres de la SBPMef peuvent, par versement à son compte, devenir membres de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (France). Le prix de l'abonnement est de 50 €. Ils recevront le *Bulletin* de l'APMEP, le BGV (*Bulletin à Grande Vitesse*) et *PLOT*.
Les membres de la SBPMef peuvent aussi commander par celle-ci les publications de l'APMEP ; ils bénéficient du prix « adhérents ».

Autres publications (brochures et CD-ROM)

Les prix indiqués sont les prix des publications ; les frais d'expédition (port et emballage) sont en sus. Les prix réduits sont réservés aux membres de la SBPMef ou de sociétés associées (comme l'APMEP) et aux étudiants. N'hésitez pas à consulter notre secrétariat ou à visiter notre site Internet.
Pour toutes nos publications non périodiques, à partir du dixième exemplaire, toute la commande bénéficie d'une réduction de 10 %.

Modalités de paiement :

Pour effectuer une commande, versez le montant indiqué sur un des comptes suivants :
- **Si vous habitez en Belgique :** Compte 000-0728014-29 de SBPMef.
- **Si vous habitez en France :** Compte CCP Lille 10 036 48 S de SBPMef.
- **Si vous habitez ailleurs :** Virement international sur l'un de nos deux comptes avec les références internationales suivantes :
  CCP BELGIQUE : IBAN BE26 0000 7280 1429 / BIC BPOTBEB1
  ou CCP LILLE :
  IBAN FR68 2004 1010 0510 0364 8S02 683 / BIC PSSTFRPPLIL

	Prix plein	Prix réduit	Frais d'expédition
Séries RÉNOVER			
Série 1 (n° 12)	1 €	—	T1
Série 2 (n^{os} 7–11 & 13)	5 €	—	T2
Série 3 (n° 14)	5 €	—	T2
Les 3 séries	7,50 €	—	T2
Dossiers d'exploration didactique			
Dossier 2 : *Autour du PGCD*	1,80 €	1,20 €	T1
Dossier 3 : *Isomorphisme et Dimension*	1,80 €	1,20 €	T1
Dossier 6 : *Statistique*	7,40 €	6 €	T1 (1)
Dossier 7 : *Vers les infiniment petits* (Simone TROMPLER et Guy NOËL)	6 €	—	T1
Dossier 8 : *La démonstration en géométrie plane dans les premières années l'enseignement secondaire* (Claude VILLERS *et al.*)	9 €	—	T2 (2)
Dossier 9 : *Des démonstrations à la rencontre des compétences à travers de thèmes* (Claude VILLERS *et al.*)	9 €	—	T2 (2)
Dossier 10 : *Narrations de recherche — De la théorie à la pratique dans les enseignements secondaire et supérieur* (Jacques BAIR, Jean-Claude DELAGARDELLE, Valérie HENRY)	6 €	—	T1
Jacques BAIR, *Mathématique et Sport*	5 €	3,70 €	T1
François JONGMANS, *Eugène Catalan, Géomètre sans patrie, ...*	12 €	9,50 €	T2
G. ROBERT, CD-ROM, logiciels mathématiques	5 €	—	T1
Recueils de questions des OMB			
Tome 5	6 €	—	T1 (1)
Tome 6	6 €	—	T1 (1)
Tomes 5 & 6 ensemble	10 €	—	T1 (1)

(1) 2–3 ex. : T2 ; 4–6 ex. : T3 ; 7–12 ex. : T4 ; au-delà : consulter le secrétariat.
(2) 2 ex. : T3 ; 3–4 ex. : T4 ; au-delà : consulter le secrétariat.

Frais d'expédition (non-PRIOR)

	Belgique	Europe	Autres pays
Tarif 1	1,80 €	4,50 €	6 €
Tarif 2	3,50 €	8,50 €	12 €
Tarif 3	5 €		
Tarif 4	7 €		

Pour les expéditions PRIOR : consulter le secrétariat.

Pour la définition d'« Europe », voir les tarifs postaux.

Pour tout problème, consulter le secrétariat.