

Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française	
Secrétariat : <i>M.-C. Carruana</i> , Rue du Onze novembre 24, B-7000 Mons (Belgique). Tél. : 32.(0)65.31.91.80 ; courriel : sbpm@sbpm.be . Site internet : http://www.sbpm.be	
Conseil d'administration : <i>B. Baudelet, M. Denis-Pecher, É. Deridiaux, B. Desaedeleer, P. Dupont, D. Foucart, M. Frémal, Chr. Géron, M. Goffin, R. Gossez-Ketels, M. Herman, J.-P. Houben, R. Lesplingart-Midavaine, M. Machtelings, Chr. Michaux, J. Miewis, N. Miewis-Seronveaux, Ch. Randour-Gabriel, R. Scrève, Ph. Skilbecq, G. Troessaert</i>	
Président, Olympiades Internationales : <i>G. Troessaert</i> , Sur le Chêne 58, 6800 Libramont, Tél. 061.22.42.01	Vice-Président, Portefeuille de lecture : <i>M. Herman</i> , Rue Rafhay 95, 4630 Soumagne, Tél. 087.26.70.23
Administrateur délégué : <i>Chr. Michaux</i> , Rue Brigade Piron 290, 6061 Montignies-sur-Sambre, Tél. 065.35.47.06	Congrès, Publicité : <i>M. Denis-Pecher</i> , Rue de la Ferme 11, 5377 Noisieux (Somme-Leuze), Tél. 086.32.37.55
Trésorier, Site internet : <i>R. Scrève</i> , Rue du Corbeau 146, 6200 Châtelet, Tél. 071.40.27.34	Secrétaire : <i>M. Frémal</i> , Rue W. Jamar 311/51, 4430 Ans, Tél. 04.263.68.17
Olympiades nationales : <i>Cl. Festraets-Hamoir</i> , Rue J.-B. Vandercammen 36, 1160 Bruxelles Tél. 02.673.90.44	Contact Presse : <i>N. Miewis-Seronveaux</i> , Avenue de Péville 150, 4030 Grivegnée Tél. 04.343.19.92
Math-Jeunes Junior : <i>A. Paternotte</i> , Rue du Moulin 78, 7300 Boussu, Tél. 065.78.50.64	Math-Jeunes Senior : <i>G. Noël</i> , Chemin de la procession 396, 7000 Mons, Tél. 084.38.72.89
SBPM-Infor : <i>R. Gossez</i> , Albert I Laan 13, 1560 Hoeilaart, Tél. 02.657.98.92	
Mathématique et Pédagogie : <i>P. Dupont</i> , Rue du Stampia 77, 1390 Grez-Doiceau, Tél. 010.84.11.99 Comité de lecture : <i>J. Bair, A.-M. Bleuart, M. Denis-Pecher, V. Henry, M. Herman, J.-P. Houben, Chr. Michaux, J. Miewis, J. Navez, G. Noël, Ph. Skilbecq, Cl. Villers</i>	

Photo de couverture : *Solénoïde, ou hélice torique* (Sculpture *Arc à Tore*, Stéphan Gilles) ;
Louvain-la-Neuve, octobre 2006 — Photo P. Dupont



Mathématique et Pédagogie

Sommaire

- Pascal Dupont, *Éditorial* 3

Articles

- Francisco Bellot Rosado, *Quelques-uns de mes problèmes favoris* 9
- Michèle Solhosse, *Débobiner* 21
- James Tanton, *Les Cercles de math et les Olympiades* 27
- André Pétry, *Enseigner des Mathématiques : un compromis entre sens et formalisme. Quelques réflexions en la matière* 41
- Jean-Paul Houben, *Cabri-Géomètre et les sections coniques (2^e partie)* 51

Rubriques

- *In memoriam* 5
- Cl. Festraets, *Problèmes* 56
- Cl. Festraets, *Olympiades* 60
- R. Scrève, *Le coin du trésorier* 66

NOTE

- Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse :
Pascal Dupont, Rue du Stampia 77, B - 1390 Grez-Doiceau.
Courrier électronique : `pascal.dupont@ulg.ac.be`
- Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique *stricto sensu*, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques, &c.
- Les auteurs sont responsables des idées qu'ils expriment. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.
- Les auteurs sont invités à envoyer leurs articles encodés sur un CD-rom ou par courrier électronique. L'usage de $\text{\LaTeX}$ est vivement recommandé ; d'autres traitements de texte ne devraient être utilisés que pour des textes ne comportant pas de formules ; le format « texte seul » est finalement encore préférable. À défaut, les textes seront dactylographiés ; dans ce cas, les illustrations seront des documents de bonne qualité (photographies contrastées, figures dessinées en noir et avec précision) prêts à être scannés. *Les textes devant être réencodés risquent de voir leur délai de parution allongé de manière appréciable.*
- Dans tous les cas où l'article en contient, les figures seront annexées dans des fichiers séparés. Leur qualité est extrêmement importante ; en particulier, des documents au format JPEG ne peuvent pas avoir été trop comprimés.
- L'auteur mentionnera dans l'article ses prénom, nom et adresse (personnelle ou professionnelle) ainsi que l'institution où il travaille et, éventuellement, une liste de mots clés (10 maximum).
- La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous.
Pour les livres :
DIEUDONNÉ J., *Foundations of Modern Analysis*, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pp.
Pour les articles :
GRIBAUMONT A., Les structures de programmation, *Mathématique et Pédagogie*, **36** (1982), 53–56.
- Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée ; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour corriger cette épreuve et la renvoyer à la rédaction.
- MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

©SBPMef Toute reproduction partielle ou totale est interdite sans autorisation.
Éditeur responsable : Pascal Dupont, Rue du Stampia 77, 1390 Grez-Doiceau.

Publié avec l'appui de l'Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Service général du Pilotage du système éducatif.

Éditorial

PASCAL DUPONT

Une fois de plus, Chers lectrices et lecteurs, je dois vous présenter mes excuses pour le retard important avec lequel votre revue vous parviendra. Ces excuses, je les dois d'ailleurs également aux auteurs des articles dont la publication subit des délais, ainsi qu'à nos annonceurs. Je ne cherche pas d'échappatoire : ce retard m'est entièrement imputable. Mais cumuler la fonction —bénévole— de rédacteur en chef avec une vie professionnelle et une vie de famille, sans compter quelques autres tâches encore au service de notre SBPMef, n'est pas chose aisée. Ce numéro est aussi un peu plus maigre que de coutume mais, rassurez-vous, je ne compte pas en faire une habitude.

Ceci d'ailleurs, ainsi que d'autres problèmes plus aigus encore, a amené la Société à entamer une réflexion à long terme sur l'avenir de sa politique éditoriale. Vous en avez été avisés par le biais de SBPM-Infor, et nous ne manquerons pas de vous informer au moment où les conclusions seront mûres.

Mais concrètement, dans l'immédiat, je ne puis qu'insister une fois de plus sur le fait que l'usage de $\text{\LaTeX}$ pour vos propositions d'articles contribue grandement à me faciliter le travail de mise en forme. Apprendre le $\text{\LaTeX}$, de toute façon, c'est un petit investissement pour une grande valeur ajoutée !

Je profite enfin de ce court billet pour vous rappeler que, si vous ne l'avez pas encore fait, il est plus que temps de verser votre cotisation pour 2007 : voyez p. 66...

Les publications de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (français) peuvent être obtenues par l'intermédiaire de la SBPMef : commandez-les à notre secrétariat

— Les brochures signalées par * sont de publication récente.

— Le prix « *adhérent* » concerne l'APMEP et la SBPMef.



TITRES DES BROCHURES		Prix (€)	
N°	Prix, à droite, sans port. Port en plus : Cf. bas du tableau	public	adh
* 168	<i>La place des maths vivantes dans l'éducation secondaire</i> , 336 pages. Des ateliers, des conférences, ...	13	9
	◇ FIN ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE OU COLLÈGE		
* 169	<i>JEUX 7</i> . 172 pages. Des aides pédagogiques par jeu	14	10
144	<i>JEUX 6</i> . Même principe.	12	8
•	<i>JEUX 7 ; 6 ; 5 (n° 119), les trois ensemble</i>	30	18
	◇ COLLÈGE		
* 166	<i>MATH À CRÉDIT</i> : Publicités et pourcentages, ...	10	6
* 165	<i>LA RÈGLE</i> (calcul algébrique) <i>DANS TOUS SES ÉTATS</i>	10	6
	◇ COLLÈGE OU LYCÉE		
151	<i>Les narrations de recherche</i>	13	9
* 253	<i>PANORAMATH 4</i> . Rallyes et autres compétitions...	10	6
•	<i>Ce Panoramath et les trois antérieurs, ensemble :</i>	38	23
	◇ LYCÉES		
* 171	<i>Olympiades académiques de Première 2005</i>	13	9
•	<i>Ce n° et ceux de 2004 ; 2003 ; 2002 ; 2001 ensemble</i>		34
* 156	<i>Les statistiques au lycée et un peu au-delà ...</i>	13	9
150 } 154 }	<i>Pour un enseignement problématisé des mathématiques au lycée</i> . Deux tomes. 392 pages	21	15
◇ CONCOURS D'ENSEIGNEMENT MATHS Agrégations, Capes et CAPLP —externes & internes, sujets & corrigés— par année. Les n°s de 2005, 2004, 2003, 2002, 2001, 2000, 1999 et 1998, chacun à 8 € en moyenne, <i>ENSEMBLE</i> :			30

DEMANDEZ à l'APMEP, 26 Rue Duménil, F – 75013 Paris,
mèl : apmep@apmep.asso.fr, sa plaquette VISAGES, gratuite et franco de port, qui décrit les quelque 170 brochures proposées par l'APMEP.

PORT : Les frais de port depuis la France sont très élevés. Consultez l'APMEP pour les connaître. Si vous n'êtes pas pressé, profitez des accords entre l'APMEP et la SBPMef pour commander via le secrétariat de celle-ci.

In memoriam

Michel Ballieu est né à Trazegnies, en Hainaut, le 13 juillet 1950. Il nous a quittés le 3 novembre 2006, après avoir courageusement lutté contre une cruelle maladie. Ceux qui l'ont bien connu garderont de lui un souvenir vivace, celui d'un homme intelligent, actif, amical et doué de multiples talents.

Après avoir obtenu brillamment, en 1972, son diplôme de licencié en sciences mathématiques à l'Université Libre de Bruxelles, il a été assistant dans cette même université jusqu'en 1979. Ensuite, et jusqu'en 1998, il a enseigné dans les classes supérieures de l'Athénée Royal de Binche. Cette année-là, il est entré en fonction comme chercheur au Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM) à Nivelles et en même temps comme formateur à la FCC (Formation en Cours de Carrière). Il n'a quitté cet organisme en 2004 qu'en raison du règlement administratif qui limite dans le temps les détachements d'enseignants. Il a alors repris ses cours à Binche. En outre, il était depuis 2001 assistant chargé d'exercices à l'ULB. Dans leur sécheresse, ces quelques données biographiques ne disent rien sur l'immense activité qu'il a développée sur plusieurs fronts.

Une de ses passions, peut-être la principale, était l'histoire des mathématiques et les utilisations stimulantes que l'on peut en faire dans l'enseignement. Il a publié, souvent dans *Mathématique et Pédagogie*, mais aussi dans des actes de congrès et dans les ouvrages collectifs du CREM, seul ou en collaboration, des études sur Ptolémée, Fibonacci, Umar al Khayyam, Brunelleschi, Desargues et d'autres. Au cours de ses travaux d'histoire, il pratiquait le grec, le latin, l'anglais, l'italien et déchiffrait même des documents en arabe. Il a animé de nombreuses formations d'enseignants sur ces sujets.

Non seulement il a été chercheur au CREM, mais il a, en collaboration avec Marie-France Guissard, dirigé l'un des projets de recherche importants de ce centre. Le titre de celui-ci montre bien les préoccupations sociales de ses auteurs : *Pour une culture mathématique accessible à tous, élaboration d'outils pédagogiques pour développer des compétences citoyennes*.

Michel a aussi été, de 1991 à 2002, rédacteur en chef de *Math-Jeunes*, revue au succès de laquelle il a aussi contribué par ses écrits. Il a assuré l'édition d'une cinquantaine de numéros.

Il a aussi contribué avec enthousiasme à la formation des jeunes qui se préparaient aux Olympiades Mathématiques Internationales.

Particulièrement compétent en informatique, il a dispensé de nombreuses formations sur les logiciels *Cabri Géomètre* et *Excel*, et sur le langage *PostScript*. Avec Marie-France Guissard, il a rédigé une brochure d'initiation au *PostScript*. Il a géré avec une disponibilité sans défaut le réseau informatique du CREM.

Par delà tous ces talents et ces services rendus, Michel a encore trouvé le temps d'être un musicien reconnu. Triple diplômé du Conservatoire Royal de Mons – en solfège, harmonie et chant –, il a été de 1980 à 1982, membre du Quatuor Vocal de la RTBF. Il a aussi beaucoup pratiqué le violon.

J'ai bien connu Michel Ballieu surtout depuis son arrivée au CREM en 1998. Passionné par son travail, il a été pour tous ceux qui l'ont côtoyé dans notre centre, un collègue intelligent, infatigable, d'une serviabilité sans limite et un ami fidèle. Adieu Michel. Merci pour l'exemple que tu nous as donné et que nous n'oublierons pas.

Nicolas Rouche

* *

*

Michel était bien plus qu'un professeur de mathématiques, c'était un ami des mathématiques.

Tout à tour professeur, vulgarisateur, historien, écrivain, chercheur, pédagogue, il a consacré une grande partie de sa vie à communiquer ses connaissances et sa passion pour les mathématiques.

Son activité au sein de la SBPMef fut très importante. Rédacteur en chef d'une cinquantaine de numéros de *Math-jeunes*, il a marqué la revue de son empreinte. Les jeunes et moins jeunes lecteurs de l'époque se souviennent des nombreux articles consacrés à l'histoire des mathématiques, une branche qu'il affectionnait particulièrement et dans laquelle il s'était beaucoup investi. Ses collaborateurs de la rédaction se souviendront des bouclages de numéros qui se terminaient à l'aube ou presque.

Personnellement, j'ai surtout côtoyé Michel dans le cadre de la préparation aux Olympiades Mathématiques Internationales. Quand j'ai proposé à Michel de rejoindre l'équipe pour enseigner les équations diophantiennes, il a immédiatement accepté, comprenant qu'il avait là une possibilité d'enseigner à de brillants étudiants une matière chargée d'histoire. Il le fit avec brio, intégrant les éléments historiques parmi les problèmes et illustrant de façon magistrale l'idée que l'histoire peut être un fil conducteur au moins aussi efficace que les problèmes pour enseigner les mathématiques.

Ensuite Marie-France a rejoint l'équipe et ils ont travaillé en tandem tant que la santé de Michel l'a permis.

Michel tu t'étais éloigné de certaines activités de la SBPMef mais la SBPMef n'a pas oublié tout ton apport.

Les mots sont dérisoires face à la douleur de la perte d'un être cher. Nos pensées vont vers Marie-France qui a accompagné Michel jusqu'au bout de sa souffrance et qui demain devra faire face à un énorme vide.

Gérald Troessaert

Les *Éditions Van In* vous invitent
aux séances de présentation 2007

Le nouvel Actimath 1

Le nouvel Actimath 2

Van In a entamé, en 2006, l'amélioration de la collection de mathématiques la plus utilisée en Communauté française !

Le manuel de 1^{re} année est disponible depuis quelques mois. Venez découvrir en exclusivité les nouvelles améliorations proposées pour 2007 au premier degré !

- **Mercredi 18 avril à Mons**
- **Mercredi 25 avril à Liège**
- **Mercredi 2 mai à Bruxelles**
- **Jeudi 3 mai à Charleroi**
- **Mercredi 9 mai à Namur**

Les présentations ont lieu de 19 h 00 à 21 h 30.
Une confirmation avec le lieu exact vous sera envoyée ultérieurement.

Soyez les premiers à vous inscrire sur
www.actimath.be

Les places sont limitées... Ne tardez donc pas !

Renseignements complémentaires : actimath@vanin.be ou 010 24 82 51

Quelques-uns de mes problèmes favoris

FRANCISCO BELLOT ROSADO

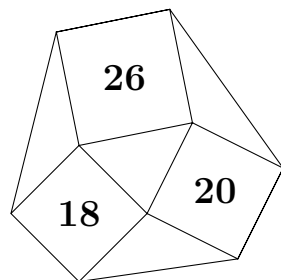
**Rédacteur en Chef de la
Revista Escolar de la O.I.M.**

Avant de commencer mon exposé, je voudrais dire quelques mots d'hommage à la mémoire de Jean Wilmet. Je connaissais Jean depuis 1988, lors de l'Olympiade Internationale de Mathématiques, en Australie. Nous avons fait l'échange des problèmes de nos Olympiades, mais à un certain moment, j'ai cessé d'avoir de ses nouvelles. Il y a deux ans, au Congrès de Liège, j'ai eu une nouvelle fois (je ne savais pas que serait la dernière) le plaisir d'écouter son exposé « Où sont les neiges d'antan ». C'est le lundi 21 août 2006, en recevant la brochure du Congrès, que j'ai appris qu'il était décédé. Donc, les paroles et les problèmes que vont suivre seront dédiés à sa mémoire. Jean aimait les bons problèmes et j'espère en avoir choisi quelques-uns qui lui auraient plu.

Dans cet exposé, je voudrais présenter une collection de problèmes que j'ai trouvés passionnants et que j'ai utilisés dans mes classes du Lycée « Emilio Ferrari » de Valladolid ainsi que dans mon Séminaire de problèmes, comme préparation des Olympiades de mathématiques.

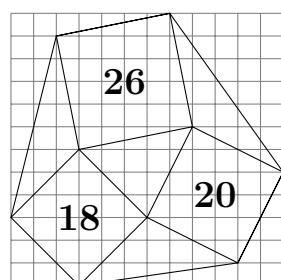
Adresse de l'auteur : Calle Dos de Mayo 16-8º dcha., E-47004 Valladolid (Espagne) ;
courriel : franciscobellot@gmail.com.

Problème 1. La figure ci-dessous montre trois carrés, dont les aires sont de 26, 20 et 18 unités, respectivement.



On demande de calculer l'aire de l'hexagone irrégulier qui constitue le contour extérieur de la figure.

Ce problème appartient à un fameux livre de Henry Ernest Dudeney, *Amusements in Mathematics*, dont la première édition est datée de 1917. Il y a une solution facile utilisant la trigonométrie, mais je l'ai proposé à des élèves âgés de 13 ans environ, car il y a aussi une solution qui n'utilise que le théorème de Pythagore : en effet, il suffit d'observer que 18, 20 et 26 peuvent s'exprimer comme une somme de deux carrés, ce qui permet l'insertion de la figure dans une grille carrée et on calcule l'aire demandée en comptant des petits carrés :



La surface de l'hexagone est de 100 unités. On peut noter que Dudeney, dans son livre, dit que pour trouver l'aire du triangle central, limité par les côtés des trois carrés, on peut utiliser la formule

$$\frac{\sqrt{4ab - (a + b - c)^2}}{4} = 9,$$

où a , b et c sont les aires des carrés donnés, dans n'importe quel ordre. ■

Mon second exemple est, à mon avis, un de ces problèmes qu'il est impossible d'oublier une fois qu'on les connaît. Il est de Paul Erdős (*American Mathematical Monthly*, 1937).

Problème 2. Soit $n + 1$ entiers positifs inférieurs à $2n$.
a) Montrer que l'un au moins d'entre eux est divisible par l'un des autres.
b) Montrer que deux d'entre eux sont premiers entre eux.

Paul Erdős, dans un célèbre article sur les « enfants prodiges » hongrois, raconte qu'il avait posé la partie (b) du problème à Louis Posà, alors très jeune, alors qu'il était occupé à manger sa soupe... Louis Posà dit simplement : « Deux d'entre eux doivent être consécutifs. »... et la partie (b) est automatiquement démontrée.

Pour la partie (a), je reproduis ici la solution publiée dans le *Monthly* :

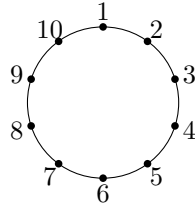
Soit $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ les entiers du problème. Tout nombre entier peut s'exprimer comme le produit d'une certaine puissance de 2 multipliée par un facteur impair :

$$a_r = 2^{b_r} \cdot k, \quad k \text{ impair.}$$

Mais, entre 1 et $2n$, il y a seulement n nombres impairs, et ceci signifie qu'il y a au moins deux des nombres, a_i, a_j qui ont le même facteur impair k , et ainsi il est évident qu'un d'eux divise l'autre. ■

Le problème suivant provient d'une revue scolaire hongroise, au titre presque impossible à prononcer, *Középiskolai Matematikai Lapok*, connue plus simplement sous le nom de *KöMaL*. Cette revue est plus que centenaire (son premier numéro est de 1894) et elle reçoit toute une foule de solutions des étudiants aux problèmes qu'elle propose. Celui que nous allons voir a été utilisé par moi-même dans mes classes d'algèbre linéaire à l'Université, et aussi dans mon Séminaire de problèmes :

Problème 3. Dix personnes sont assises autour d'une table ronde. Chacune pense un nombre et le chuchote à l'oreille des deux personnes qui sont assises à ses côtés (une à sa droite et l'autre à sa gauche). Après quoi chaque personne annonce, à haute voix, la moyenne arithmétique des deux nombres qu'il a entendus. Voici les nombres que chaque personne annonce.



Trouver le nombre pensé par la personne qui a dit « 6 ».

Soit $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ les nombres pensés par les personnes qui ont dit 1, 2, $\dots$, 10, respectivement. On écrit immédiatement les équations

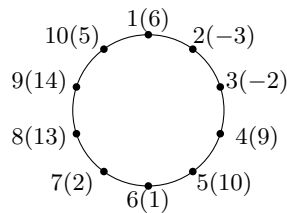
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 4 & ; & & x_2 + x_4 &= 6 \\ x_3 + x_5 &= 8 & ; & & x_4 + x_6 &= 10 \\ x_5 + x_7 &= 12 & ; & & x_6 + x_8 &= 14 \\ x_7 + x_9 &= 16 & ; & & x_8 + x_{10} &= 18 \\ x_9 + x_1 &= 20 & ; & & x_{10} + x_2 &= 2. \end{aligned}$$

En faisant la somme des équations de droite, on obtient

$$\begin{aligned} 2(x_2 + x_4 + x_6 + x_8 + x_{10}) &= 50 & \Leftrightarrow & & 2(6 + x_6 + 18) &= 50 \\ & & \Leftrightarrow & & x_6 + 24 &= 25 \\ & & \Leftrightarrow & & x_6 &= 1. \end{aligned}$$

■

Bien que l'énoncé du problème ne le demande pas, on peut compléter les nombres pensés par chacune des 10 personnes :



Si on considère 12 personnes, le système qu'on obtient n'est pas compatible.

Mon exemple suivant est aussi un problème de *KöMaL* ; je peux en offrir plusieurs solutions, ainsi qu'une généralisation, proposée comme problème dans l'Olympiade Mathématique bolivarienne, un concours de problèmes pour étudiants de l'enseignement secondaire des pays du Nord de l'Amérique du Sud : la Colombie, la Vénézuéla, l'Équateur et le Pérou. En tout cas, à un certain moment, apparaît « l'idée brillante » qui conduit à la solution. . . Moi, dans mes classes, j'ai toujours recommandé à mes étudiants de ne pas protester dans cette situation-là. . . Les idées brillantes, comme tout le monde le sait, sont difficiles à trouver, et il est donc important d'avoir rencontré préalablement quelques-unes d'entre elles pour pouvoir les appliquer, éventuellement, dans une autre situation.

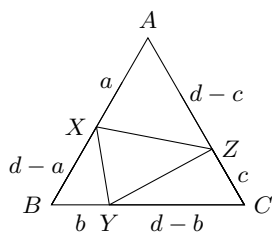
Problème 4. Soit a, b, c, d quatre nombres réels positifs, tels que

$$d = \max \{a, b, c, d\}.$$

Montrer que

$$a(d - c) + b(d - a) + c(d - b) \leq d^2.$$

Pólya, dans son *Décalogue pour professeurs*, disait : « Dessinez une figure ». Mais, dans ce cas, est-il vraiment possible de dessiner une figure qui nous aide dans la recherche d'une solution ? En effet, c'est possible, et plus d'une. . . : dessinons un triangle équilatéral de côté d , et marquons sur ses côtés des segments de longueurs $d - a$, $d - b$ et $d - c$:



Il est clair que la somme des aires des triangles AXZ , BYX et CZY est inférieure à l'aire de ABC :

$$[AXZ] + [BYX] + [CZY] \leq [ABC] = \frac{1}{2}d^2 \frac{\sqrt{3}}{2},$$

mais les trois aires du côté gauche de l'inégalité sont, respectivement,

$$\frac{1}{2}a(d-c) \frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2}b(d-a) \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \frac{1}{2}c(d-b) \frac{\sqrt{3}}{2},$$

et ainsi, si on somme et qu'on simplifie par le facteur commun $\frac{\sqrt{3}}{4}$ on obtient l'inégalité proposée.

Il est aussi possible de dessiner un carré de côté d , et d'y placer convenablement des rectangles disjoints (avec deux cas à considérer, selon que $a < b < d - c$, ou $b \geq d - c$) dont les aires sont les trois quantités du premier membre de l'inégalité. Je viens de recevoir cette solution « sans paroles » d'un professeur de l'École Supérieure Polytechnique du Littoral, à Guayaquil, Équateur, Juan Alvarado Ortega.

La seconde solution est algébrique. L'inégalité proposée peut s'écrire sous la forme

$$d^2 - d(a + b + c) + ab + bc + ca \geq 0.$$

Le fait que nous voyions deux des trois fonctions symétriques élémentaires de a, b, c peut nous conduire à considérer le polynôme de troisième degré dont les racines sont précisément a, b, c :

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - a)(x - b)(x - c) \\ &= x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc, \end{aligned}$$

de sorte que

$$p(x) + abc = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x,$$

et de là nous pouvons passer à la fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{p(x) + abc}{x} = x^2 - (a + b + c)x + ab + bc + ca,$$

qui, évidemment, prend en $d = \max\{a, b, c, d\}$ une valeur positive :

$$\begin{aligned} f(d) &= \frac{(d - a)(d - b)(d - c) + abc}{d} \\ &= d^2 - d(a + b + c) + ab + bc + ca \geq 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Le problème proposé à l'Olympiade bolivarienne de l'an 2000 était le suivant :

a) Soit $a_1, A_1 ; a_2, A_2 ; a_3, A_3$ des nombres réels positifs tels que

$$a_i + A_i = k,$$

pour $i = 1, 2, 3$, où k est une constante donnée. Montrer que

$$a_1 A_2 + a_2 A_3 + a_3 A_1 < k^2.$$

b) Soit $a_1, A_1 ; a_2, A_2 ; a_3, A_3 ; a_4, A_4$ des nombres réels positifs tels que

$$a_i + A_i = k,$$

pour $i = 1, 2, 3, 4$, où k est une constante donnée. Si on a $a_i \geq A_i$, montrer que

$$a_1 A_2 + a_2 A_3 + a_3 A_4 + a_4 A_1 \leq k^2,$$

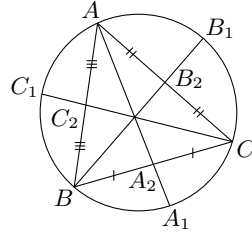
et déterminer dans quel cas on a l'égalité.

Le problème suivant est une inégalité géométrique, proposée par Dmitri Tereshin dans la phase nationale de l'Olympiade russe de 1994 :

Problème 5. Soit a, b, c les côtés d'un triangle ; m_a, m_b, m_c les longueurs de ses médianes, et D le diamètre de son cercle circonscrit. Démontrer que

$$\frac{a^2 + b^2}{m_c} + \frac{b^2 + c^2}{m_a} + \frac{c^2 + a^2}{m_b} \leq 6D.$$

Y a-t-il dans cet énoncé une piste qui permette de l'attaquer avec une certaine probabilité de succès ? Incroyablement, la réponse est affirmative... le fait que dans l'énoncé on mentionne le diamètre du cercle, qui est la plus grande corde qui puisse être tracée dans un cercle, nous inspire à prolonger les médianes jusqu'à ce qu'elles recoupent le cercle circonscrit :



Soit A_1, B_1, C_1 les nouveaux points d'intersection des médianes avec le cercle circonscrit, et A_2, B_2, C_2 les pieds des médianes. Il est clair que

$$AA_1 \leq D, \quad BB_1 \leq D, \quad CC_1 \leq D.$$

Ceci peut se récrire

$$m_a + A_1A_2 \leq D, \quad m_b + B_1B_2 \leq D, \quad m_c + C_1C_2 \leq D. \quad (*)$$

Pour déterminer A_1A_2 nous calculerons de deux manières la puissance du point A_2 relativement au cercle circonscrit :

$$A_1A_2 \cdot AA_2 = BA_2 \cdot A_2C \Leftrightarrow A_1A_2 = \frac{a^2}{4m_a},$$

et, de la même manière,

$$B_1B_2 = \frac{b^2}{4m_b} \text{ et } C_1C_2 = \frac{c^2}{4m_c}.$$

Par substitution dans (*) et en faisant la somme des trois inégalités,

$$\frac{4m_a^2 + a^2}{4m_a} + \frac{4m_b^2 + b^2}{4m_b} + \frac{4m_c^2 + c^2}{4m_c} \leq 3D.$$

Les numérateurs sont, par le théorème de la médiane (dit aussi d'Apollo-nius), respectivement

$$2b^2 + 2c^2, \quad 2c^2 + 2a^2, \quad 2a^2 + 2b^2,$$

et donc ainsi on a

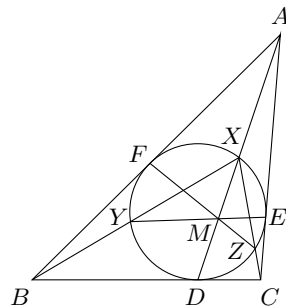
$$\frac{a^2 + b^2}{2m_c} + \frac{b^2 + c^2}{2m_a} + \frac{c^2 + a^2}{2m_b} \leq 3D,$$

qui est équivalente à celle proposée. ■

Le sixième et dernier problème que j'ai choisi pour cet exposé est un des problèmes de géométrie élémentaire que j'aime le plus. Son énoncé est le suivant :

Problème 6. *Le cercle inscrit au triangle ABC est tangent aux côtés en les points $D \in BC$, $E \in CA$, $F \in AB$; AD recoupe le cercle inscrit en X ; XB et XC recouperont ce cercle en Y et en Z , respectivement. Montrer que si X est le milieu de $[AD]$ alors $EY = FZ$.*

J'ai trouvé cet énoncé, sans solution, dans un vieux livre anglais, de l'époque de la Seconde Guerre mondiale. Après quelques semaines, j'ai finalement trouvé une solution, et le proposai pour l'Olympiade Ibéroaméricaine de Mathématiques de 1995, où il a été, finalement, le problème le plus difficile. Je peux maintenant en proposer plusieurs solutions. Mais, avant tout, voyons la configuration présentée dans l'énoncé :



Solution 1 [La mienne, abrégée]

Comme les quadrilatères $XEYZ$ et $XEYF$ sont inscrits dans le cercle, le théorème de Ptolémée indique que

$$FZ = \frac{FE \cdot XZ - FX \cdot EZ}{EX} \text{ et } EY = \frac{FE \cdot XY - EX \cdot FY}{FX}$$

et ma solution consiste en le calcul, en fonction des côtés du triangle ABC , des longueurs des segments qui y interviennent. Pour y aboutir, on utilise successivement la puissance de A relative au cercle inscrit (calculée de deux manières), le théorème du cosinus (Al-Kashi) dans FAX et FXB , le

théorème de la médiane dans plusieurs triangles et finalement on a

$$EY = FZ = \frac{3(p-a) \sqrt{(p-b)(p-c)}}{\sqrt{2bc}}.$$

Solution 2 [Du Prof. Eduardo Wagner, Brésil]

La puissance de A par rapport au cercle inscrit est égale à

$$AF^2 = AX \cdot AD = x \cdot 2x \Rightarrow AF = x\sqrt{2}.$$

Il est clair que $BD = BF$; appelons m cette longueur ; et alors $c = m + x\sqrt{2}$, ou $2x^2 = (c - m)^2$. Comme, dans le triangle BAD , BX est une médiane, on a

$$m^2 + c^2 = 2(BX^2 + x^2) \Leftrightarrow BX^2 = \frac{m^2 + c^2 - 2x^2}{2} = mc,$$

et ainsi nous avons $BX = \sqrt{mc}$.

En utilisant la puissance de B relativement au cercle inscrit, nous obtenons

$$BY \cdot BX = m^2 \Rightarrow BY = \frac{m^2}{\sqrt{mc}}.$$

Mais on peut observer que

$$\frac{BY}{BX} = \frac{m^2}{mc} = \frac{m}{c} = \frac{BF}{BA},$$

donc FY est parallèle à AD . De manière analogue, on prouve que EZ est parallèle à AD et ainsi FY est parallèle à EZ ; donc $FYZE$ est un trapèze isocèle (ou bien un rectangle), et ses diagonales doivent être égales : $EY = FZ$. ■

Solution 3 [De l'étudiant colombien Carlos Alberto Vargas Cruz, obtenue pendant la compétition]

FD est la polaire de B relative au cercle inscrit ; alors, si nous appelons P le point d'intersection de BX et FD , les points B, P, X, Y sont des conjugués harmoniques, et les rayons respectifs FB, FY, FP et FX forment un faisceau harmonique ; et ainsi pour les rayons FY, FD, FX et FA . Mais comme $DX = XA$, les rayons FD, FX et FA bissectent le segment AD ; par conséquent, FY est parallèle à AD .

De la même manière, ZE est parallèle à AD , et $FYZE$ est un trapèze inscrit : il est isocèle, et $EY = FZ$. ■

Solution 4 [Du Prof. Toshio Seimiya (*Crux Mathematicorum*, février 1998)]

Les suivantes triangles sont semblables :

$$\begin{aligned} BFY \approx BXF &\Rightarrow \frac{FY}{FX} = \frac{BF}{BX}, \\ DYX \approx BDX &\Rightarrow \frac{DY}{DX} = \frac{BD}{BX}; \end{aligned}$$

mais comme $BD = BF$, on a $\frac{FY}{FX} = \frac{DY}{DX}$, et comme $AX = DX$, on obtient

$$\frac{FY}{FX} = \frac{DY}{AX}.$$

Comme X, F, Y et D sont cocycliques, on a $\widehat{FYD} = \widehat{AXF}$. Donc le triangle FYD est semblable au triangle FXA , et ainsi

$$\widehat{YFD} = \widehat{XFA} = \widehat{XDF},$$

et FY est parallèle à XD . De manière analogue, EZ est parallèle à XD ; $FYZE$ est un trapèze isocèle, et $EY = FZ$. ■

Solution 5 [Du Prof. Dan Branzei, Iași, Roumanie ; communication privée ; formulation abrégée]

Comme $AX \cdot AD = AF^2 = (p - a)^2$,

$$\begin{aligned} AX = XD &\Leftrightarrow AD^2 = 2(p - a)^2 \\ &\Leftrightarrow 4c(p - b) = 2c^2 + 2(p - b)^2 - AD^2 \\ &\Leftrightarrow BD \cdot BA = BX^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{BD^2}{BX^2} = \frac{BF}{BA} \\ &\Leftrightarrow \frac{BY}{BX} = \frac{BF}{BA} \\ &\Leftrightarrow FY \parallel AD. \end{aligned}$$

■

Le triangle spécial du problème, dans lequel la céviennne de Gergonne AD est coupée en son milieu X par le cercle inscrit, semble n'être pas repéré dans la *Bibliographie des Triangles spéciaux*, que publia J. Neuberg dans les *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège*, 3^e série, vol. 12 (1924).



Enseignement de la Province de Hainaut

Région Mons-Borinage

Direction Générale Régionale Mons-Borinage
065/40.80.80



Haute Ecole Provinciale de Mons-Borinage-Centre
Catégorie Economique à Mons (065/88.12.28)

Haute Ecole Provinciale de Mons-Borinage-Centre
Catégorie Paramédicale à Mons (065/22.12.60)

Lycée Technique
Provincial Richard
Stiévenart à Hornu
(065/61.39.40)

Lycée Provincial
d'Enseignement
Technique du Hainaut
à Saint-Ghislain
(065/71.42.11)

Institut d'Enseignement
Secondaire Provincial
à Mons (065/39.93.40)

Institut d'Enseignement
Secondaire
Paramédical Provincial
à Mons (065/32.89.00)

Ecole
Fondamentale
Provincial
Victor Mirguet à
Mons (065/
32.05.53)

Centre d'Education et
de Formation en
Alternance de l'Athénée
Provincial Jean
d'Avesnes à Mons
(065/40.01.08)

Lycée Provincial Albert
Libiez à Colfontaine
(065/61.33.99)

Athénée Provincial
Jean d'Avesnes
à Mons
(065/40.01.01)

Académie des Métiers,
des Arts et des Sports
à Mons (065/39.89.79)

Haute Ecole Provinciale de Mons-Borinage-Centre
Catégorie Pédagogique à Mons (065/32.04.90)

Haute Ecole Provinciale de Mons-Borinage-Centre
Catégorie Artistique à Saint-Ghislain (065/71.42.11)

Institut Provincial d'Enseignement de Promotion sociale Mons-Formations à Mons (065/35.38.13)

Centre Provincial d'Enseignement de Promotion sociale du Borinage à Hornu (065/76.76.18)

Ecole Industrielle Supérieure Provinciale à Mons (065/39.89.39)

Cours des Métiers d'Arts du Hainaut (065/84.96.32)

Conseiller en informations scolaires à Mons (065/40.80.80)

Débobiner

MICHÈLE SOLHOSSE

**Centre d'autoformation et de formation
continué de la Communauté française**

On dispose d'un rouleau de papier hygiénique, d'un rouleau « comptable », ou de tout autre rouleau de papier. Déterminer la quantité de papier restant sur le rouleau — sans pour autant tout dévider !

Ce n'est un secret pour personne, plus on dévide le rouleau plus le diamètre du rouleau diminue. La question est de savoir quelle relation relie les mesures du papier déroulé et du diamètre du rouleau ? Essayons de modéliser la situation. Lorsque le modèle sera établi, il sera possible de répondre à la question.

On choisit de dérouler le papier régulièrement — par exemple, trois mètres par trois mètres — et de mesurer à chaque fois le diamètre du rouleau de papier.

Collecte des données

Diamètre de la bobine [m] : 14,5			
Diamètre [mm]	Longueur déroulée [m]	Diamètre [mm]	Longueur déroulée [m]
67,3	0	52,8	18
65,0	3	49,9	21
62,8	6	47,0	24
60,5	9	43,9	27
57,9	12	40,6	30
55,4	15		

Adresse de l'auteur : Michèle Solhousse, CAF, La Neuville 1, 4500 Tihange; courriel : m.solhousse@skynet.be.

Encoder les données

Afin de travailler sur ces données, il faut les encoder dans les listes de la calculatrice (colonnes de données).

Choisir **STAT**-Edit : les listes [L1], [L2], ... sont prédéfinies dans le menu. Encoder les mesures des diamètres dans [L1] et celles du papier déroulé dans [L2]. Pour encoder régulièrement dans [L2], taper l'instruction suivante : Seq(X,X,0,30,3).

L1	L2	L3	Z	L1	L2	L3	Z
67.500	██████	-----		67.500	-----	-----	
65.000				65.000			
62.800				62.800			
60.500				60.500			
57.900				57.900			
55.400				55.400			
52.800				52.800			
L2(X)=				L2 =... (X, X, 0, 30, 3			

Remarque : La commande Seq se trouve dans le menu [LIST] (qu'on atteint à l'aide de la touche **2nd**).

Pour encoder les données sous des noms de listes personnalisés, on les insère dans le menu **STAT**-Edit. Se placer sur la tête d'une liste, [L1] (par exemple) et **2nd**[INS]. Une liste vide apparaît et le curseur clignote en mode alphabétique dans la ligne d'édition : taper simplement les lettres formant le nom souhaité.

NDI	L1	Z
67.5	-----	
65		
62.8		
60.5		
57.9		
55.4		
52.8		
Name=NL		

Graphique

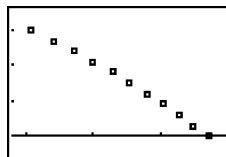
Pour avoir une première idée, faire une représentation graphique.

Choisir le menu **2nd**[STAT PLOT] et sélectionner par exemple Plot1. Le mettre On, choisir le Type : **Scatter**, et compléter Xlist : [NDI] et Ylist : [NL] ; choisir aussi la Mark.

```

Plot1 Plot2 Plot3
On Off
Type: [Scatter]
Xlist: NDI
Ylist: NL
Mark: [square]

```



Ensuite, **ZOOM**-Stat ou **ZOOM**-[9].

Régression

Les points semblent alignés. Pour trouver la relation entre les variables, on tente une régression linéaire (droite des moindres carrés).

Quitter l'écran graphique et revenir à l'écran de calcul par **2nd**[QUIT]. Encoder la ligne de commande ci-contre par :

STAT[**CALC**][4] : LinReg
2nd[**NDI**] [] **2nd**[**NL**] []
VAR**S**-Y vars-1 : Function-1 : Y1

LinReg(ax+b) LND	EDIT 0:10 TESTS
I, LNL, Y1	1:1-Var Stats
	2:2-Var Stats
	3:Med-Med
	4:LinReg(ax+b)
	5:QuadReg
	6:CubicReg
	7:QuartReg

Les résultats s'affichent lorsqu'on pousse sur **ENTER** : La régression est bonne; le coefficient r^2 affiché est fort proche de 1. L'équation de la droite de régression est encodée dans Y1 et avec la commande **GRAPH**, on superpose la droite à notre ensemble de données.

LinReg
y=ax+b
a=-1.124
b=76.638
r ² =.996
r=-.998
■

On peut alors estimer la longueur totale du papier. En effet, lorsque le papier sera complètement déroulé, le diamètre du rouleau de papier sera égal au diamètre de la bobine, soit 14,5 mm et la longueur sera calculée par $Y_1(14,5)$: **VAR****S**-Y-vars-1 : Function-1 : Y1 **ENTER** et compléter par (14.5).

a=-1.12725884
b=76.80452787
r ² =.9960869025
r=-.9980415335
Y1(14.5)
60.45927469
■

La longueur estimée du rouleau est de 60,46 m.

Courbe des résidus

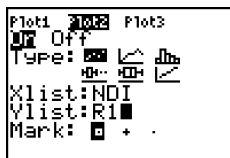
L'étude des résidus — différences entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées de la droite des moindres carrés — apporte des renseignements intéressants.

À chaque fois qu'une régression est obtenue sur la calculatrice, le procédé génère une liste dont le nom est RESID. On peut la sélectionner dans le menu **LIST**-Names.

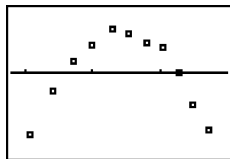
Conservons-la sous un autre nom : par exemple R1.

NAMES OPS MATH 1:L1 2:L2 3:L3 4:L4 5:L5 6:L6 7:NDI 8:NL 9:RESID	LRESID→	NAMES OPS MATH 6:cumSum(7:aList(8:Select(9:augment(0:List*matr(A:Matr*list(30:L	LRESID→L1
---	---------	---	-----------

Désactiver le premier graphique (Plot 1 : Off) et construire le graphique des résidus :



ZOOM-9



Cette courbe est significative. Visiblement les résidus ne sont pas aléatoirement répartis de part et d'autre de la ligne d'écart nul ; la droite des moindres carrés n'est pas le modèle qu'il faut choisir.

Quel genre de courbe conviendrait le mieux ?

Si on effectue une coupe du rouleau perpendiculairement à la « bobine », on obtient un anneau de papier dont l'aire est égale à

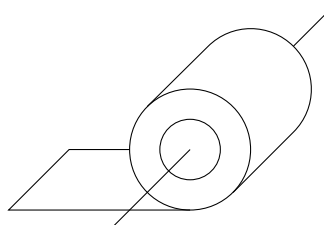
Longueur du papier enroulé $\times$ Épaisseur.

Si on note L_e la longueur du papier enroulé et e l'épaisseur et si on appelle d le diamètre du rouleau de papier et b le diamètre de la bobine,

$$L_e \cdot e = \pi \left(\frac{d^2}{4} - \frac{b^2}{4} \right),$$

ou encore

$$L_e = \frac{\pi}{4e} (d^2 - b^2).$$



Essayons donc une relation entre la longueur du papier déroulé et le carré du diamètre.

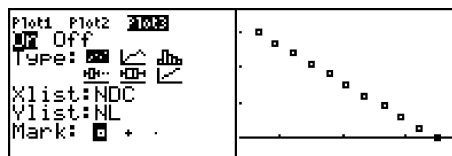
Nouvelle régression

Ajouter donc une nouvelle liste dans laquelle on calcule le carré du diamètre (voir plus haut pour ces commandes) ; l'appeler NDC ; indiquer la formule pour la construire, puis **ENTER**.

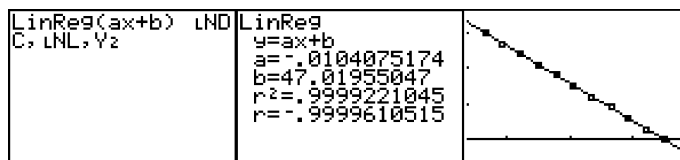
NDI	NL	NDC	3
67.3	0	-----	
68	3		
68.8	6		
69.8	9		
70.9	12		
72.4	15		
73.8	18		
NDC = LNDI ²			

Représenter ensuite la longueur du papier déroulé NL en fonction du carré du diamètre NDC .

Désactiver le second graphique, c'est-à-dire Plot2 : Off
Créer le Plot 3 et le représenter avec [ZOOM]-9.



Rechercher la droite de régression et l'ajouter sur le graphique :



Dans ce cas-ci, la longueur totale du papier est estimée par $Y_2(14,5^2)$.

[VARΣ]-Y-vars-1 : Function-1 : Y1 [ENTER] et compléter par $(14,5^2)$.

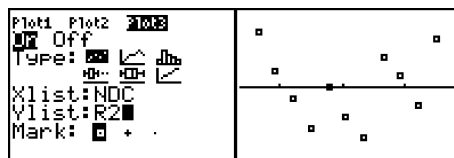
La longueur estimée du rouleau est de 44,83 m.

```
a=-.0104075174
b=47.01955047
r^2=.9999221045
r= -.9999610515
Y2<14.5^2
44.83136993
```

Courbe des résidus.

Comme précédemment, conserver la liste des résidus sous un autre nom : par exemple R2. Puis, bien sûr faire la représentation graphique de ces résidus.

```
a=-.0104075174
b=47.01955047
r^2=.9999221045
r= -.9999610515
Y2<14.5^2
44.83136993
LRESID→LR2
```

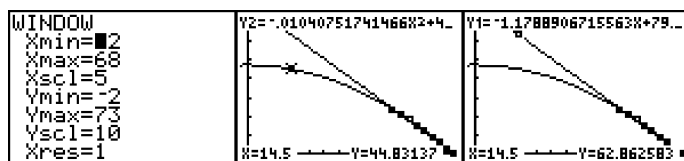


Les valeurs des coefficients de détermination et de corrélation sont meilleures, mais surtout la distribution des résidus paraît quelconque : ce modèle est mieux adapté au problème traité.

Graphique données-régressions

Sur un même graphique, représenter les données, la droite de régression et la régression du second degré. Dans cette représentation, les valeurs du

diamètre sont placées sur l'axe X ... il faut donc penser à remplacer X par X^2 dans l'équation de Y_2 .



Longueur totale du papier déroulé

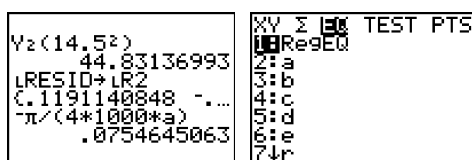
Algébriquement, la relation entre le papier déroulé et le carré du diamètre est :

$$LT = L_e + L_d \Leftrightarrow L_d = -\frac{\pi}{4e}d^2 + \left(\frac{\pi}{4e}b^2 + LT\right).$$

On peut alors calculer l'épaisseur du papier comptable (attention aux unités), puisque

$$-\frac{\pi}{4e} = 1000a,$$

a étant le coefficient de x dans la dernière régression, obtenu par **VARs**-**5** : Statistics



L'épaisseur du papier est d'environ 0,075 mm.

Les Cercles de math et les Olympiades

JAMES TANTON

St. Mark's Institute of Mathematics

Cet article résume les discussions de la conférence sur les Cercles mathématiques et les Olympiades mathématiques organisée du 16 au 18 décembre 2004 par le *Mathematical Sciences Research Institute* aux États-Unis. Les expériences faites dans les Cercles de math sont-elles transposables dans les classes ?

1. Introduction

La liste des programmes d'animation extérieurs offrant des expériences mathématiques de grande qualité pour les élèves de l'enseignement secondaire ne cesse de croître. Des programmes tels que le Cercle de math de Berkeley [6] et le Cercle de math de Boston [7] sont un grand succès. Il y a un grand nombre de camps d'été qui sont proposés dans tout le pays et la participation des élèves aux compétitions mathématiques régionales, nationales et internationales est significative. Clairement ces programmes semblent répondre à un besoin. C'est intéressant, cela intrigue, même si ce n'est pas simple à expliquer.

Du 16 au 18 décembre 2004, le *Mathematical Sciences Research Institute* (MSRI) a fait l'effort de réunir plus d'une centaine de personnes très impliquées dans ces programmes et qui avaient toutes pour objectif plus large de faire partager la joie des mathématiques pures. Cette rencontre fut organisée par Hugo Rossi, Directeur du MSRI, Tatiana Shubin, de l'Université

Adresse de l'auteur : James Tanton, St. Mark's Institute of Mathematics; courriel : jamestaton@stmarksschool.org. Article original : *Math Circles and Olympiads, MSRI Asks : Is the US Coming of Age ?*, Notices of the AMS, Vol. 53, N° 2, Févr. 2006. Traduit de l'anglais par Charlotte Bouckaert, Avenue Forton, 6, 1950 - Kraainem; courriel : charlotte.bouckaert@scarlet.be.

d'État de San José, Californie, Zvezdelina Stankova, du *Mills College*, Californie, et Paul Zeitz, de l'Université de San Francisco. La *Conférence sur les Cercles de math et les Olympiades* a réuni les spécialistes de l'éducation mathématique et les chercheurs du monde de l'éducation des niveaux secondaire et supérieur. Elle s'est attelée à des questions telles que « Que faisons-nous ? », « Où allons-nous ? » et a proposé des mesures concrètes pour alimenter la discussion et partager les ressources. Suite à cette rencontre, le MSRI envisage d'établir un réseau national permanent de chercheurs et d'éducateurs. « L'un des objectifs principaux de cette conférence a été de faire se rencontrer ces deux communautés pour commencer une interaction », écrit Hugo Rossi. Et il semble que le concept de Cercle mathématique fournisse un élément crucial pour la discussion. Quelle voie — autre que celle des compétitions mathématiques et des camps de math — les Cercles de math offrent-ils pour découvrir de jeunes talents ? L'usage du mot « talent » est-il approprié ? Les Cercles de math peuvent-ils contribuer à l'organisation des études dans l'enseignement secondaire ? Sont-ils auto-suffisants ? Qu'est-ce qui les fait fonctionner ? Voici ce qu'en dit Hugo Rossi :

« Je suis convaincu que l'idée des Cercles mathématiques est arrivée à maturité aux États-Unis, et qu'elle peut devenir un mouvement qui se développe rapidement pour devenir quelque chose de comparable à ce qui se passe en Europe de l'Est. Les personnes présentes à cette conférence sont la ressource pour ce développement. Il nous faut rendre cette ressource aisément disponible. »

Le MRSI reconnaît que le moment est venu de tirer les enseignements des expériences collectives de nos collègues — ici et à l'étranger — et d'examiner les possibilités qui nous sont offertes. Personnellement, je suis intrigué par le vaste défi d'incorporer les idéaux des Cercles de math dans les programmes rigides de l'enseignement secondaire. (J'ai eu le plaisir de travailler avec Bob et Ellen Kaplan du Cercle de math de Boston pendant un certain nombre d'années avant de quitter le monde de l'université pour affronter la vie de professeur de l'enseignement secondaire.) Je n'ai pas de vraie réponse, mais j'ai été ravi d'apprendre à cette conférence que je suis loin d'être le seul à explorer de telles possibilités. De sérieuses discussions sont en cours à propos de ce que fournissent les Cercles de math et les autres programmes d'animation extérieurs.

2. L'expérience des Cercles de math

Les cercles périscolaires consacrés à une variété de sujets ont commencé en Hongrie dans les années 1800, avec comme objectif d'offrir aux jeunes élèves la possibilité de développer au maximum leurs intérêts personnels. Aujourd'hui, ils sont considérés comme partie intégrante de l'expérience des élèves de l'Europe de l'Est, et la participation à un Cercle est considérée comme aussi normale que ne l'est la participation à un cercle sportif aux États-Unis. Quoiqu'il n'y ait pas de mode opératoire commun, tous les Cercles de math ont le même objectif de partager l'attrait intellectuel et la beauté des mathématiques avec un public aussi important que possible. Ils utilisent les talents des institutions scolaires secondaires et post-secondaires et accueillent avec succès des élèves de tous les milieux pour pratiquer les mathématiques. Les Cercles de math existent maintenant dans de nombreux pays, y compris les États-Unis (voir aussi [1], par exemple), selon des styles et des approches multiples. Étant donné le succès du modèle de l'Europe de l'Est, il est naturel de se demander si d'autre(s) version(s) de l'expérience du Cercle de math pourraient être incorporées dans la norme culturelle des États-Unis. Peut-on encore faire plus ? Tatiana Shubin remarque :

« Nous sommes dans une situation merveilleuse et unique . . . dans laquelle nous pouvons choisir parmi les expériences et les traditions du monde entier. Il existe aussi de nouveaux outils comme l'internet et la télévision . . . Si les réunions des Cercles de math pouvaient être diffusées à la télévision, beaucoup de gens pourraient voir comment les enfants interviennent — et cela pourrait entraîner un impact important sur la perception du public à l'égard de notre chère discipline. »

Et c'est vrai, imaginez l'impact ! Pour amorcer cette idée, les participants de la conférence ont eu l'occasion d'observer deux classes expérimentales — une du Cercle de math de Boston et une du Cercle de math de Berkeley — et il était clair qu'à chaque fois quelque chose de remarquable avait lieu.

3. Les deux modèles des États-Unis

3.1. Le Cercle de math de Boston

Le Cercle de math de Boston a été fondé par Bob et Ellen Kaplan et Tomas Guillermo en 1994 et compte pour le moment plus de 120 participants. Dans ce Cercle, on a complètement abandonné le cours ex-cathedra et les participants découvrent et développent les mathématiques en explorant, en jouant et en discutant (voir [3]). Les questions discutées sont attrayantes et riches sur le plan mathématique et peuvent être explorées, généralisées, variées de multiples manières. Les élèves travaillent sur une même question fondamentale et les idées qui en découlent pendant dix semaines consécutives. Par exemples, de jeunes élèves de la maternelle à la troisième primaire ont exploré la question vague « Y a-t-il des nombres entre les nombres ? » et ils ont découvert à la fin du semestre la densité et la dénombrabilité des rationnels. Les élèves du début de l'enseignement secondaire (middle school), alors qu'ils exploraient la question de savoir si une puissance de deux pouvait ou non commencer par un sept, ont créé leur propre version des logarithmes, développé des résultats fondamentaux de la théorie ergodique, et prouvé des résultats sur la densité des ensembles infinis. Des élèves un peu plus âgés sont parvenus par leurs propres moyens à calculer i^i , à prouver le théorème fondamental de l'algèbre, et à mener à bien une recherche originale [5]. Le Cercle de math de Boston veille à supprimer tout esprit de compétition et ne se soucie absolument pas des étiquettes comme « talentueux » ou « doué ». Il s'appuie uniquement sur « la séduction intellectuelle de questions attrayantes », comme dit Ellen, pour attirer et exciter. Le rôle de l'instructeur n'est pas d'enseigner mais de guider, de mettre en garde, de proposer des suggestions et le plus souvent, de ne pas intervenir.

3.2. Le Cercle de math de Berkeley

Le Cercle de math de Berkeley, fondé en 1998 et dirigé par Zvezdelina Stankova, travaille avec plus de 50 élèves de l'enseignement secondaire inférieur et supérieur de la région de San Francisco Bay. Il reconnaît ouvertement qu'il y a plusieurs voies pour aimer les mathématiques et travaille activement pour offrir une panoplie d'expériences variées. Les réunions changent de style, d'organisation et de sujet de semaine en semaine et les

compétitions et la préparation aux compétitions jouent un rôle important dans le fonctionnement du Cercle. (Le Cercle de math de Berkeley a particulièrement bien réussi à aider les élèves à se préparer aux compétitions nationales et internationales). Stankova reconnaît aussi qu'on peut trouver beaucoup de plaisir et de beauté dans des mathématiques avancées et que cela peut préluder à une conférence sur un sujet sophistiqué. Par exemple, le sujet suivant est un des favoris du Cercle de math de Berkeley :

Quatre cercles d'un plan sont tangents extérieurement deux à deux. Trois de ces cercles sont aussi tangents à une droite d . Si le rayon du quatrième cercle est une unité, quelle est la distance de son centre à la droite d ?

Les participants s'attaquent au problème après avoir assisté à une conférence sur l'inversion du cercle. La puissance et la beauté de ce sujet avancé apparaît clairement quand on découvre que ce problème a une solution unique élémentaire basée sur une simple application du théorème de Pythagore ! Pendant la démonstration MSRI, Stankova a conduit les jeunes participants à travers une série de défis interactifs sur les principes des circuits eulériens et sur les stratégies gagnantes de nouvelles variantes du jeu de dames.

3.3. Synthèse

Une chose apparaissait clairement dans les deux expériences : les deux programmes avaient trouvé des moyens d'éveiller l'intérêt de jeunes élèves pour les mathématiques, mais aidait aussi les jeunes à développer la ténacité pour affronter des défis substantiels grâce à un travail dur, bien charpenté, accompli dans la bonne humeur. Dans chacun des Cercles, le processus mathématique créatif et naturel est clairement mis à nu et les élèves sont placés aux commandes de leur propre apprentissage. Quelle réussite ! Rick Umicker de l'école St Mark, une école secondaire indépendante située à Southborough, Massachussets, fait le commentaire : « Les Cercles de math nous montrent un très bon enseignement ... Est-ce qu'ils redécouvrent la puissance des petites classes et de l'environnement intimiste ? ». Le succès des Cercles de math est-il essentiellement dû à la nature personnelle, intime de l'expérience ? C'est peut-être l'expérience humaine qui est mise à nu ?

À ce propos, Shubin écrit « Les Cercles peuvent faire du tort si l'on ne respecte pas les deux conditions suivantes : les animateurs doivent rester en

retrait et respecter la personnalité de chacun ; les thèmes discutés doivent être porteurs et doivent séduire. Et je ne sais pas ce qui est le pire ... Les Cercles sont des organismes délicats, subtils et complexes qui demandent des soins très spécifiques et diligents pour fonctionner ». Stankova conclut

« Les sessions des Cercles de math doivent être conçues de manière impeccable, de manière à offrir différentes choses : attirer les élèves, les intriguer, les séduire, les instruire, les défier, et les laisser partir avec plus de questions sur lesquelles réfléchir à la fin de la session qu'au début. La forme que prend une session n'est pas essentielle, aussi longtemps que les objectifs précités sont atteints. Comment un responsable de session peut-il conserver l'attention des élèves sur des concepts plus difficiles ? C'est là qu'on remarque l'enseignant vraiment doué. »

On pourrait dire naïvement qu'il n'est pas difficile de créer un Cercle de math. Il suffit de réunir quelques élèves et d'ajouter une poignée de problèmes excitants. L'organisation et le financement ne sont pas essentiels. Mais Paul Zeitz est préoccupé parce que tout semble reposer sur des personnalités et des agendas surchargés. « Ces programmes fonctionnent grâce à une ou deux personnes au charisme incroyable qui s'y dévouent. Rien ne prouve qu'un tel programme soit autosuffisant. » Le seul modèle de Cercle de math réalisable est-il local, soutenu par la passion et le dévouement d'un ou deux individus énergiques ? Jusqu'à présent, c'est le seul modèle qui fonctionne aux États-Unis. Est-ce ce modèle-là que nous devons encourager et soutenir ? Et dans ce cas, comment trouver les animateurs qui conviennent ? Comment les former et les soutenir ? Pouvons-nous partager les ressources ?

4. Le rôle des compétitions

Melanie Wood, étudiante de second cycle à l'Université de Princeton, ancienne *Putnam fellow*, détentrice d'une médaille d'argent de l'Olympiade mathématique Internationale (OMI), a fait part de sa grande préoccupation à la conférence. Elle a dit qu'elle avait ressenti un préjugé négatif de la part de la communauté des chercheurs pour avoir si bien réussi dans le monde de compétition. « Certaines personnes considèrent que la résolution de problèmes, ce n'est pas des *vraies math* et que les étudiants qui sont bons dans les compétitions ne sont pas bons pour la recherche ». Mélanie exprimait aussi le sentiment, partagé par d'autres participants à l'OMI également

présents à la conférence, que la compétition lui a apporté beaucoup de joie et de réussite dans l'exploration mathématique, que cela lui a permis de rencontrer et d'apprendre une quantité considérable de mathématiques dont les thèmes n'étaient pas repris dans les programmes scolaires et qu'elle a développé des outils de pensée et une maturité d'esprit qui constituent un acquis incroyable et un avantage maintenant qu'elle s'embarque dans la voie de la recherche originale.

Joe Gallian de l'Université du Minnesota à Duluth, depuis peu Vice-Président de la *Mathematical Association of America*, fait remarquer que d'après ses observations, les étudiants qui ont participé avec succès aux compétitions sont généralement meilleurs que les autres étudiants dans les programmes d'expérience de recherche destinés aux étudiants de premier cycle (Research Experiences for Undergraduate programs). Inna Zakharevich, lauréate des Olympiades Mathématiques étatsuniennes et de celles de la Région de la baie de San Francisco, maintenant étudiante à l'Université de Harvard, ajoute que les élèves ne se sentent pas mal s'ils ne gagnent pas une compétition. Elle ajoute que l'attitude générale est une attitude de confrontation avec les problèmes plutôt qu'avec les collègues et que chacun apprécie et admire une bonne solution même s'il n'en n'est pas l'auteur.

Le premier rôle des compétitions est souvent perçu comme un moyen d'identifier et trier les éléments potentiellement brillants et donc comme fondamentalement élitiste. Est-il possible de modifier cette perception et de développer, d'articuler et de communiquer les sentiments exprimés par les étudiants ? Rossi ajoute :

« Il suffit d'observer que la compétition est une motivation essentielle pour certaines personnes, et sans intérêt ou même dommageable pour d'autres. Est-il est mauvais que les problèmes soient le moteur de l'éducation et bon que l'éducation ait un contenu, ou le contraire ? ... Les deux approches donnent de bons résultats, surtout ensemble. »

Certains participants à la conférence suggèrent que les profs de math du secondaire ne sont peut-être pas conscients de ce qu'est la mission ultime de l'expérience de compétition pour leurs élèves et qu'ils ne savent pas comment les préparer. Pouvons-nous les aider ? Des personnes comme Richard Rusczyk avec son site <http://www.artofproblemsolving.com> essaient de le faire. Comment pouvons-nous soutenir et aider de telles initiatives ? Et que faire pour ceux pour qui la culture de la compétition est « dommageable » ? Transmettons-nous de manière adéquate les multiples facettes de

la réussite en mathématiques ? Avons-nous une idée claire de ce que nous voulons promouvoir ?

5. Le programme du secondaire : avons-nous quelque chose à offrir ?

Beaucoup d'enseignants du secondaire pensent que la nature de l'esprit d'un adolescent est différente de celle de l'esprit d'un jeune adulte à l'université et que cela requiert une attention spéciale et une approche spécifique lorsqu'on en vient à l'éducation mathématique. Bien sûr, ils ont raison et le système éducatif des États-Unis a abrité bien des approches réussies et valables de l'éducation mathématique. La question n'est pas « Qu'est-ce qui est mauvais dans la manière dont les mathématiques sont enseignées dans l'enseignement secondaire ? » mais bien « Que pouvons-nous offrir de plus ? » L'existence d'activités mathématiques périscolaires n'est pas un constat de carence, mais seulement la reconnaissance qu'il y a certainement des possibilités et des occasions de discussions et d'échanges entre le monde pré-universitaire et le monde universitaire.

« Il faut des Cercles de math pour les profs », dit Umiker, « pour qu'ils accordent ce genre de liberté à leurs élèves. Il faut voir comment arrondir les angles. Nous ne savons pas tous ce qui peut être fait. »

Un exemple typique qui vient à l'esprit est l'introduction des fonctions trigonométriques en classe de neuvième [notre troisième secondaire, élèves de 14–15 ans]. Cela vient à un moment où beaucoup d'adolescents — mais certainement pas tous — commencent à apprendre à ne pas mémoriser les formules. Cependant beaucoup de livres introduisent le sujet en commençant par une liste de trois, parfois six rapports à retenir par cœur (SOHCAHTOA : Sinus = côté Opposé sur l'Hypoténuse, Cosinus = côté Adjacent sur l'Hypoténuse, Tangente = côté Opposé sur côté Adjacent).

Une approche inspirée des Cercles de math (comme je l'ai d'ailleurs fait avec de jeunes élèves dans un Cercle de math) serait d'introduire la « cerclométrie » et de définir (convenablement !) le sinus et le cosinus comme les fonctions de « hauteur » et « d'écartement » d'un point en rotation autour du cercle le plus simple qui soit en mathématique, le cercle centré à l'origine et de rayon unité. On peut jouer (et fixer ?) cette idée en explorant la « quadrimétrie » et tracer les graphiques du « carsinus » et du « cocarsinus », décrites par un point en mouvement sur un carré avec les sommets

$(\pm 1, \pm 1)$. À quoi ressemblent ces graphiques ? Peut-on également faire cela dans une classe de neuvième ? Ce serait intéressant de l'essayer. Umiker ajoute : « Les chercheurs doivent se rendre compte que nous avons besoin de gens qui peuvent nous mettre au défi d'explorer les mathématiques au-delà d'un terme prédéfini. »

Bien sûr, les profs de math du secondaire doivent couvrir une quantité de matière fixée. (Personnellement, la pression que je subis dans le monde de l'enseignement secondaire est considérablement plus grande que tout ce que j'ai ressenti en enseignant à l'université.) Les Cercles de math n'ont pas ce problème. Et les profs de math du secondaire n'ont pas le luxe de travailler avec un groupe d'élèves qui aiment les maths et qui ont choisi d'en faire. Mais ce ne sont pas là des problèmes insurmontables. Tatiana Shubin est ravie de dire qu'elle a réussi à faire descendre du piédestal le cours d'analyse dans son université, et moi, dans ma classe de neuvième et dans mon enseignement de l'analyse, je n'ai pas du tout renoncé à mes tendances « Cercle de math ». Des approches multiples peuvent travailler main dans la main avec succès. Le problème est d'examiner comment communiquer les idées, partager les ressources entre enseignants et créer un forum pour discuter des observations et des résultats.

Il faut aussi considérer le rôle des manuels. Ils sont conçus pour être intellectuellement sûrs et sont généralement écrits pour fournir à l'élève une structure, des processus composés de petites étapes, et de la routine. Ils veillent aussi à fournir un bon impact psychologique — cela rassure d'avoir une bonne réponse et de réussir rapidement. Les problèmes dans les manuels sont souvent conçus pour donner des coups de pouce, des petites tapes dans le dos, et des indicateurs de réussite. (Si, par exemple, vous vous trouvez en train de travailler avec la quantité familière $\sin 30^\circ$, alors il y a des chances que vous soyez sur la bonne voie.)

Cependant, il faut remarquer que les mathématiciens et les élèves qui participent à des compétitions cherchent souvent les mêmes indicateurs de réussite. Les problèmes compliqués sont attaqués par très petites étapes et en les étudiant on cherche toujours à se raccrocher à des choses familières et à des techniques éprouvées. Si en progressant dans un problème on arrive à un certain sens de l'élégance, ou si la formule obtenue possède une certaine symétrie, on est rassuré et on a confiance dans la voie choisie. (Il y a néanmoins une différence fondamentale : ici la réussite ne s'obtient pas rapidement. Et il n'y a pas de solutionnaire.)

Est-il possible de mettre sur le même pied l'expérience qu'offre un manuel de mathématique courant et l'expérience vécue dans la recherche mathématique ? Est-ce que ce n'est pas un point de vue trop radical ? Y a-t-il un moyen de mettre en évidence les liens entre le programme scolaire et les expériences de recherche créatives ? Est-ce que ce n'est pas ce que les Cercles de math, les camps de maths et les compétitions de math tentent d'offrir en fin de compte ?

J'ai été personnellement confronté à ce problème il y a quelques mois quand je suis arrivé au théorème 5.15 du manuel de géométrie utilisé par mes élèves : *Le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équidistant des trois sommets du triangle*. On pourrait, bien sûr, présenter ce théorème comme une propriété connue qu'il faut démontrer et faire suivre la démonstration par diverses applications. J'ai décidé de faire le contraire et de proposer une énigme à la place.

On plante deux clous dans un mur. Placer une feuille de papier entre les deux clous et marquer l'endroit où se trouve le coin de la feuille. Déplacer le papier dans différentes positions et marquer chaque fois la position du coin de la feuille. Répéter plusieurs fois. Quelle est la courbe produite ?

Une discussion animée s'en est suivie. Les élèves ont découvert la propriété 5.15 par eux-mêmes, ils l'ont démontrée et se sont posé d'autres questions : *Que se passe-t-il si le coin de la feuille n'est pas un angle de 90° ? La courbe décrite par le sommet est-elle toujours un arc de cercle ? Si on donne le cercle d'abord, est-ce que tous les angles qui interceptent le diamètre ont une amplitude de 90° ?* (Remarquons que la réponse à cette dernière question donne un moyen astucieux pour trouver le diamètre d'un cercle rien qu'avec une feuille de papier.) J'ai été particulièrement heureux que l'un de mes élèves ait été stimulé par ces problèmes et ait démontré, entièrement par lui-même, que tous les sommets des angles de même amplitude sous-tendus par une corde fixe décrivaient un arc de cercle — un résultat remarquable. J'ai été témoin, dans ma classe, d'une expérience digne d'un Cercle de math.

Il est apparu clairement au cours de la conférence que beaucoup d'activités d'animation extérieures — les thèmes des Cercles de math, les problèmes des compétitions — sont puisés dans la théorie des graphes, la combinatoire et la théorie des nombres (et, bien sûr, la géométrie). Ces sujets sont facilement accessibles et autorisent de multiples voies d'exploration et de découverte. Étonnamment, aucun de ces sujets n'apparaît en profondeur dans les programmes de math du secondaire. Cela vaut-il la peine de se de-

mander pourquoi ? Pourrait-on rendre tous les sujets d'algèbre et d'analyse aussi attirants et accessibles ? Pourrait-on les présenter avec de multiples voies de découverte et d'exploration ? Est-ce cela qu'il faut faire dans les classes ? Dans quelle mesure cette approche dépend-elle des contenus ? Dans quelle mesure dépend-elle du style du prof ? Comment pouvons-nous entrer en contact avec les professeurs qui se posent déjà ce genre de questions et font déjà des expériences ? Est-ce que c'est la bonne voie ?

6. Que pouvons-nous faire pour soutenir les enseignants à tous les niveaux ?

Élever le niveau des mathématiques grâce à l'éducation est un noble objectif. Le travail des animateurs de compétitions mathématiques, de camps mathématiques et de Cercles de math n'est généralement pas reconnu à sa juste valeur par les institutions auxquelles appartiennent ces animateurs et est une charge qui vient s'ajouter à celle de leurs activités professionnelles. Les enseignants de l'école secondaire sont soumis à des exigences qui vont bien au-delà de leur enseignement des mathématiques, et ont souvent des journées de travail ridiculement longues et fragmentées. Le plus souvent, il y a très peu d'occasions pour prendre le temps de réfléchir et de faire des expériences. Malgré cela, il est étonnant de voir un nombre croissant d'enseignants déterminés et passionnés qui cherchent à faire mieux. Que peut-on leur offrir comme soutien ?

En ce qui me concerne, cela m'a beaucoup aidé de découvrir que je n'étais pas tout seul à faire cette recherche. Établir des contacts entre des enseignants qui ont le même objectif est vraiment fécond et profitable. Les discussions entamées à la conférence se poursuivent par courriel et dans des forums de discussion locaux, et les idées et approches nouvelles sont explorées activement. Je suis heureux que cette conférence soit la première d'une série de conférence que le MSRI a l'intention d'organiser sur le thème des Cercles de math et des Olympiades.

Certaines questions fondamentales sont restées sans réponse. Certains participants se demandent, par exemple, si le modèle des Cercles de math est destiné à rester un modèle local et périscolaire. D'autres essaient d'incorporer les idéaux des Cercles de math directement dans leurs classes. On est en train de créer un site sur la toile, avec le soutien du MSRI, qui offre des conseils, des plans, des ressources matérielles à ceux qui sont disposés à

explorer ces idées. Nous devrions examiner comment aider les profs à poursuivre ce travail. Est-ce que la constitution d'un groupe qui s'intéresse aux Cercles de math et aux compétitions mathématiques aux sein des sociétés mathématiques professionnelles est envisageable ?

Mary Fay-Zenk, professeur-ressource pour les mathématiques dans le *Cupertino Union School District*, en Californie, qui a rencontré beaucoup de succès en utilisant les compétitions mathématiques pour motiver les élèves, suggère de constituer un Cercle de math pour les profs du secondaire inférieur et supérieur. Un certain nombre de personnes soutiennent cette idée. Matthias Beck, de l'Université de l'État à San Francisco, et Paul Zeitz, de l'Université de San Francisco, ont créé avec le soutien du MSRI et de la fondation McKesson un nouveau Cercle de math pour jeunes élèves de la région de la baie en même temps qu'un cours de type Cercle de math pour leurs professeurs. Le *St. Mark's Institute of Mathematics* à Southborough, Massachussets, en collaboration avec la *Northeastern University School of Education*, a mis en route un programme analogue. De tels programmes vont disséminer les idées et les principes d'enseignement des Cercles de math et permettront d'établir un réseau de soutien et d'échanges.

Le MSRI organise plusieurs ateliers pour explorer et analyser certaines des questions soulevées lors de la conférence de décembre 2004. Par exemple, l'atelier « Connaissances mathématiques pour l'enseignement », du 25 au 28 mai 2005, a réuni des enseignants de la maternelle à la fin du secondaire, des chercheurs en éducation mathématique, des mathématiciens, et des décideurs pour examiner ce que l'on sait des connaissances requises pour enseigner les mathématiques.

Cela suffit-il d'amener les grandes idées « là-bas » ? Peut-être que le seul chemin pour réussir à « imposer » ces idées est d'offrir des forums de discussion et de compter sur la dissémination locale des idées. (Cette voie-là fonctionne certainement pour le Cercle de math de Boston, par exemple. Le recrutement se fait uniquement par le bouche-à-oreille et le programme attire régulièrement 120 participants.) Certaines institutions rechignent à rédiger un « programme » à partager, non pas parce qu'ils refusent de partager les idées — loin s'en faut — mais plutôt parce que la nature de l'exploration créative est génétique et non-linéaire et ne peut pas être prescrite. D'autre part, on peut objecter qu'il est certainement préférable d'avoir quelque chose d'écrit à partager, même si l'utilisation qui en est faite n'est pas celle qui était prévue. (Au passage, merci aux Kaplan qui se sont attelés à la rédaction d'un livre ; *Out of the Labyrinth : Mathematics Set Free* sera publié par Oxford University Press à la fin de l'année.)

Je dois dire que le livre de Dmitri Fomin, Sergey Genkin, et Ilia Itenberg, *Mathematical Circles (Russian Experience)*, AMS, Providence, 1996, m'a beaucoup influencé dans la manière de diriger un Cercle de math. (Pour des expériences plus structurées, on peut consulter [6] qui regroupe sept ans de notes de cours du Cercle de math de Berkeley et [2] pour une collection impressionnante de conférences données dans le cadre des « Bay Area Mathematical Adventure Series », un programme intimement lié aux Cercles de math de San Francisco Bay Area.)

Peut-être que la clé est d'arriver à faire comprendre que les mathématiques sont en définitive un effort créatif humain et peut-être devrions-nous nous efforcer d'offrir, aussi bien aux profs qu'aux élèves, les moyens de l'expérimenter. Pouvons-nous communiquer (enseigner ?) aux éducateurs de tous les niveaux de ne pas craindre de s'engager et d'explorer le processus créatif, d'abandonner l'idée de vouloir tout le temps tout maîtriser ? Sommes-nous capables d'encourager les gens à faire confiance à l'expérience mathématique même si l'on ne peut pas identifier ce que la classe va en faire à un moment précis (jour ? semaine ?) ? Sommes-nous capables d'encourager les profs à se sentir en confiance avec le processus même s'il ne reste pas beaucoup de temps, même s'il y a un examen la semaine prochaine, même si le Doyen de la Faculté demande des preuves de succès visibles ? Devrions-nous l'être ?

Références

- [1] CAVALIERI R. & HARTENSTINE D., Math. circle : An outreach program at the University of Utah, *FOCUS*, 25(1) (2005), p. 6-8.
- [2] HAYES D. & SHUBIN T., Eds., *Mathematical Adventures for Students and Amateurs*, Mathematical Association of America, Washington DC, 2004.
- [3] KAPLAN R., The math circle, *Notices of the American Mathematical Society*, 42(9) (1995), p. 976-978.
- [4] KENNEDY S., The math circle, *Math Horizons*, Avril 2003, p.9-10, 27-28.
- [5] TANTON J., Young students approach integer triangles, *FOCUS*, 22(5) (2002), p. 4-6.
- [6] <http://mathcircle.berkeley.edu>
- [7] <http://www.themathcircle.org>
- [8] <http://www.mathematicaladventures.org/>

QUELLE CALCULATRICE POUR QUELLE CLASSE ?

NIVEAU	ECOLE PRIMAIRE	TECHNIQUE ET PROFESSIONNEL	ENSEIGNEMENT SECONDAIRE						ENSEIGNEMENT SUPERIEUR		
			1 ^{er} degré		2 ^{ème} degré		3 ^{ème} degré		NON SCIENTIFIQUE	ECO./FIN	SCIENTIFIQUE
CALCULATRICE			1	2	3	4	5	6			
FX Junior											
FX 92 Collège 2D											
FX 3650 P											
GRAPH 25+											
GRAPH 35+											
GRAPH 65											
GRAPH 85 SD											
GRAPH 100+											
ClassPad 300 Plus											

Ce tableau est donné à titre indicatif. Les adéquations calculatrices/classes peuvent varier selon les sections et les établissements scolaires.

Calculatrice parfaitement adaptée au niveau d'étude

4

Calculatrice complète pour des sections mathématiques 4 périodes/semaine

6

Calculatrice complète pour des sections mathématiques 6 périodes/semaine

GRAPH 35+

La plus polyvalente !

La calculatrice graphique la plus adaptée au programme de mathématiques du 2^{ème} et 3^{ème} degré. Ses performances et sa simplicité lui permettent d'accompagner les étudiants dans toutes les situations

Inclus

Câble
Graph-Graph

LE LIEN AVEC LES PROFESSEURS
DE MATHÉMATIQUES :



ASSISTANCE CONSOMMATEURS

TEL : +32 2 333 73 33

E-MAIL : info.belgium@dexxon.com

INTERNET : www.cas-bel.com

Enseigner des Mathématiques : un compromis entre sens et formalisme. Quelques réflexions en la matière

ANDRÉ PÉTRY
Haute École Rennequin Sualem

Au départ de quelques exemples simples issus de l'enseignement d'un cours d'Analyse (en première et seconde bachelier Ingénieur industriel) je voudrais envisager la dualité sens-formalisme dans l'enseignement des Mathématiques. Je voudrais ici faire part de quelques interrogations, apporter quelques éléments de réponse, sans prétendre bien entendu que ces réponses soient valables pour tout niveau et tout public. J'aimerais surtout contribuer à un débat en la matière.

Ce texte fait suite à un exposé que j'ai fait au département de Mathématiques de l'Université de La Rochelle en avril 2006.

1. Fonctions, variables

Le formalisme nous donne un cadre, des règles pour exprimer les sujets étudiés. Envisageons le problème de la représentation des fonctions. Peut-on écrire

« La fonction $\sin(2x)$..., $\sqrt{x^2 - 1}$ est dérivable dans... »

ou doit-on nécessairement être plus complet et par exemple dire

« La fonction $x \mapsto \sin(2x)$..., la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ est dérivable dans... » ?

Adresse de l'auteur : André Pétry, ISIL, Haute École R. Sualem, Quai Gloesener 6, 4020 Liège; courriel : apetry@prov-liege.be.

En général les directives officielles préconisent la deuxième façon de faire ; la raison est sans doute le souci de marquer la différence entre la fonction en tant qu'objet mathématique et les valeurs de la fonction. Et pourtant... , si on consulte les ouvrages mathématiques les plus sérieux du XIX^e siècle mais aussi de nombreux traités réputés de la première moitié du XX^e siècle, on voit que leurs auteurs n'hésitent pas à utiliser la première formulation. Cela étant dit, il est clair que la première façon de faire peut être imprécise : c'est certainement le cas si l'expression définissant la fonction contient plusieurs variables. Ainsi, que signifie « *la fonction* $\sin(x + u)$ », s'agit-il de la fonction $x \mapsto \sin(x + u)$ dépendant du paramètre u , de la fonction $u \mapsto \sin(x + u)$ dépendant du paramètre x , ou encore de la fonction de deux variables $(x, u) \mapsto \sin(x + u)$?

Ce sujet nous renvoie à la question traditionnelle de savoir ce qu'est une fonction. L'histoire de la notion de fonction est longue et jalonnée de débats, rappelons brièvement quelques étapes importantes. La notion de fonction est introduite par Leibniz et Johann Bernoulli. Longtemps elle se limite à des relations analytiques utilisant des fonctions élémentaires, c'est Dirichlet (1837) qui à l'occasion de l'étude des séries de Fourier étend la notion de fonction à d'autres dépendances. Il faut attendre la fin du XIX^e siècle pour arriver à la définition ensembliste d'une fonction. Dès le début du XX^e siècle, dans son article « *Was ist eine Function ?* » G. Frege distingue explicitement deux façons de concevoir une fonction :

- La voie *extensionnelle* : c'est la version ensembliste ; la fonction est alors identifiée à son graphe, à un ensemble f de couples tels que $(x, y) \in f$ et $(x, y') \in f$ entraînent $y = y'$;
- La voie *intensionnelle* (avec un « *s* ») : la fonction $y = f(x)$ est déterminée par la règle permettant de calculer y au départ de x ; d'un point de vue plus actuel, la fonction est définie par le programme permettant d'obtenir y au départ de x .

Et ce n'est pas fini, car se pose alors la question de savoir quand une fonction est bien définie, ce qui ouvre la porte à différentes questions relatives notamment au constructivisme et à l'intuitionisme.

Cette histoire est particulièrement intéressante (voir par exemple [3], [5], des textes originaux de Cauchy ([2]), Lebesgue ([6]),...). Il me semble qu'elle doit aussi nous inviter à la prudence au niveau de l'enseignement. Limiter la notion de fonction à sa version extensionnelle me semble non approprié du point de vue pédagogique de par le niveau d'abstraction demandé, mais aussi non fondé car cela ignore la voie intuitive, la version intensionnelle. Celle-ci me semble bien plus accessible et aussi plus naturelle. On peut évidemment

formuler cette approche de plusieurs façons, mais le retour à la tradition me semble là aussi bien adapté à l'enseignement : retourner à la tradition, c'est ici rendre à la notion de variable une place centrale. Pour A. Cauchy, une *quantité variable* est censée *recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres*, ici on pourrait simplement dire qu'une variable est un symbole pouvant *a priori* prendre plusieurs valeurs différentes. Considérer une variable, c'est aussi considérer un ensemble : une variable n'est complètement déterminée que si on connaît l'ensemble de toutes ses valeurs. Variables et ensembles peuvent donc très bien cohabiter dans un même discours. Alors nous pourrions dire qu'une fonction f est déterminée par une règle, une loi qui à chaque valeur d'une variable x associe une et une seule valeur d'une variable y , la valeur de y associée à x étant notée $f(x)$, libre à celui qui le juge nécessaire de préciser explicitement que les valeurs de x sont prises dans un ensemble donné. Bien entendu la variable x est dite indépendante et la variable y est qualifiée de dépendante. La remise en valeur de la notion de variable permet de simplifier de nombreuses écritures et notamment de revenir au formalisme différentiel de Leibniz, on ne peut ici que conseiller l'ouvrage [8] de F. Pham qui développe ce point de vue. Signalons que cette approche différentielle est particulièrement naturelle en Analyse non standard.

Revenons à la question de départ : peut-on écrire

« La fonction $\sin(2x) \dots, \sqrt{x^2 - 1}$ est dérivable dans... » ?

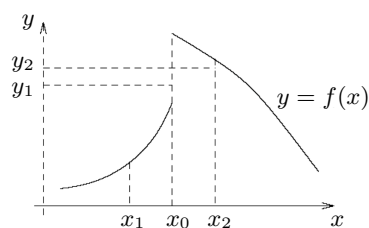
Pour ma part, je n'y vois pas d'inconvénient quand, comme ci-dessus, il n'y a pas d'ambiguïté. Cela n'empêche pas qu'une formulation plus complète soit utilisée à d'autres moments, pour lever toute ambiguïté ou pour mieux mettre en évidence la variable indépendante. Mais pourquoi ne pas formuler les choses simplement quand cela ne présente pas de danger ? Le formalisme est certainement indispensable pour clarifier des situations ambiguës ou complexes, mais est-il là pour compliquer gratuitement des situations simples ?

2. Utilisation du « dessin »

Envisageons la continuité d'une fonction réelle f . On ne peut éviter de parler de l'interprétation graphique de la continuité :

Si $f(x)$ est continue dans un intervalle I , alors le graphe de $f(x)$ pour x dans I se trace d'un seul trait.

Cela se montre aisément : si lors du tracé du graphe en x_0 on « levait la pointe du crayon », alors, en se référant au dessin ci-dessous



pour x' dans $[x_1; x_0[$ et x'' dans $]x_0; x_2]$ on aurait $f(x') < y_1 < y_2 < f(x'')$, ce qui entraînerait que les limites à droite et à gauche de f en x_0 diffèrent, contredisant la continuité de f en x_0 . Au vu des critères actuels de rigueur, il ne s'agit pas là d'une démonstration. Le raisonnement est-il sans intérêt pour autant ? Je pense que non, c'est l'occasion de lier une notion formelle et son contenu intuitif. Les concepts mathématiques tirent-ils leur intérêt, leur existence de leur contenu formel, ou de leur contenu intuitif et applicatif, ou des deux ? Pour ce qui est de l'intérêt, l'aspect intuitif et applicatif prime certainement sur l'aspect formel, pour ce qui est de l'existence la réponse est plus nuancée car il faut sans doute alors tenir compte des deux aspects.

Mais que peut-on faire de l'interprétation graphique de la continuité ? Peut-on par exemple l'utiliser pour « démontrer » le Théorème des valeurs intermédiaires ? S'il s'agit d'effectuer une « vraie démonstration », la réponse d'aujourd'hui est non (mais en 1821, dans [2], A. Cauchy démontre ainsi ce résultat...). De toute façon il est bien tentant d'utiliser l'interprétation graphique pour se convaincre du Théorème des valeurs intermédiaires. On pourrait ainsi avoir un point de vue plus nuancé. On pourrait d'abord préciser que tracer le graphe d'une fonction peut être compliqué voire même impossible. Ici on pense immédiatement à la fonction de Dirichlet valant 1 en tout rationnel et 0 en tout irrationnel, mais cet exemple n'est sans doute pas suffisamment convaincant du fait de son caractère peu constructif et du fait aussi qu'il s'agit là de l'archétype d'une fonction non continue. Aussi on peut penser à d'autres fonctions : à la fonction f définie dans $\mathbf{R}_0$ par

$$f(x) = \sin \frac{1}{x},$$

qui est continue dans $\mathbf{R}_0$ et n'admet pas de limite en 0, ou mieux encore à la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

qui elle est continue dans $\mathbf{R}$ tout entier. Les oscillations de ces deux fonctions devenant de plus en plus rapprochées lorsqu'on se rapproche de 0, on ne voit pas comment on pourrait tracer le graphe complet de f et de g dans $]0; 1]$. Ces précisions étant apportées concernant le tracé du graphe d'une fonction, on peut montrer une première version allégée du Théorème des valeurs intermédiaires :

Si $f(x)$ est continue dans $[a; b]$ et si on peut tracer le graphe de $f(x)$ pour x dans $[a; b]$, alors si M est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe c dans $[a; b]$ tel que $M = f(c)$.

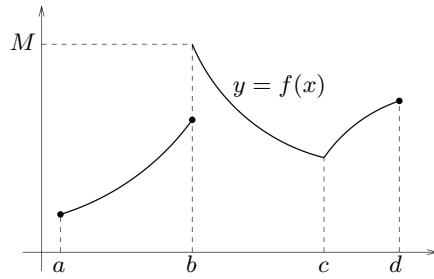
En effet, s'il n'existait pas un tel c , lors du tracé du graphe on devrait lever la pointe du crayon pour passer des points d'ordonnée $< M$ aux points d'ordonnée $> M$. De nouveau il ne s'agit pas là d'une démonstration répondant aux critères de la rigueur contemporaine, mais cela n'est pas le plus important : il s'agit d'un raisonnement faisant le lien entre aspect formel et aspect intuitif. On pourrait par la suite revenir à la version complète du Théorème des valeurs intermédiaires et éventuellement la démontrer.

Mais les dessins peuvent aussi permettre de faire de « vraies » démonstrations ! À ce sujet on peut notamment consulter les contributions éclairantes de C. Bernardi (voir par exemple [1]) ainsi que l'ouvrage [7] de R. B. Nelsen. Voici un autre exemple relatif à la continuité. On suppose connu le résultat suivant :

Si une fonction f est monotone dans un intervalle I et si l'image de cet intervalle par la fonction f est aussi un intervalle, alors () f est continue dans I .*

Envisageons l'exercice suivant :

Déterminons où la fonction f dont le graphe est tracé ci-dessous est continue (convenons de marquer d'un point plus gros les extrémités de ce graphe).



Solution. En utilisant le résultat (*) ci-dessus, on obtient que f est continue dans $[a; b]$, dans $]b; c]$ et $[c; d]$. Il s'ensuit que f est continue en c et donc continue dans $]b; d]$. Mais f n'est pas continue en b . En effet : considérons la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} M & \text{si } x = b, \\ f(x) & \text{si } b < x \leq c, \end{cases}$$

d'après le résultat (*), la fonction g est continue dans $[b; c]$, mais on a aussi $g(x) = f(x)$ dans $]b; c]$, il s'ensuit

$$\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} g(x) = g(b) = M \neq f(b),$$

ainsi la fonction f n'est pas continue en b et $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = M$.

3. Utiliser des notions ayant une existence intuitive

Envisageons la situation suivante : $f(x)$ est continue et ≥ 0 dans $[a; b]$, désignons par $\mathcal{D}$ la surface sous le graphe entre les abscisses a et b . Comment parler de l'aire de $\mathcal{D}$? La réponse mathématique est claire : on peut *définir* l'aire de $\mathcal{D}$ comme étant l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$. Cela nécessite évidemment de définir l'intégrale de Riemann auparavant.

Se pose ici une nouvelle question : *la notion d'aire a un contenu intuitif évident, est-il opportun de négliger cela pour formellement redéfinir l'aire ?* Plus généralement, *dans quelle mesure peut-on utiliser au niveau de notre enseignement des notions qui ont une existence intuitive évidente ?*

Personnellement, plutôt que de définir l'aire, je préfère maintenant dire que je calcule l'aire. Pour ce faire, en l'encadrant bien entendu par deux sommes de Riemann, je prouve qu'elle est égale à l'intégrale. Mais ne pourrait-on aller plus loin et définir l'intégrale au moyen de la notion d'aire ? Cette approche est évidemment soumise aux restrictions déjà mentionnées concernant le tracé des graphes. Elle n'en reste pas moins tentante pour une première étude rapide des intégrales. À mon avis la réponse peut certainement varier suivant le niveau et le « confort » d'enseignement dans lequel on se trouve. On pourrait esquisser une telle définition comme suit : *si f est continue dans $[a; b]$, si on peut tracer le graphe de f dans $[a; b]$ (de sorte que la fonction change un nombre fini de fois de signes), alors l'intégrale de f dans $[a; b]$ est la somme des aires des surfaces comprises entre l'axe des abscisses et le graphe de f situées au-dessus de cet axe moins la somme des aires des surfaces comprises entre l'axe des abscisses et le graphe de f situées en-dessous de cet axe, étant entendu qu'on limite ces surfaces aux abscisses entre a et b .* Il faut noter que définir l'intégrale au départ de la notion d'aire permet d'effectuer des démonstrations : pour autant qu'on admette que la notion d'aire est additive (ce qui intuitivement est clair), on peut démontrer la propriété d'additivité des intégrales

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx, \quad (1)$$

le Théorème de la moyenne et ensuite le Théorème fondamental.

Cette façon de définir l'intégrale est certainement restrictive mais elle respecte le sens de l'intégrale, même si elle ne met pas explicitement en évidence le fait que l'opération d'intégration correspond à une opération de sommation. Elle ne sera donc pas en conflit avec une étude ultérieure plus approfondie de l'intégrale.

Il faut aussi ajouter que dans notre enseignement nous nous basons sur des notions considérées comme évidentes (entiers, réels, droite, ...); dès lors admettre telle ou telle notion comme pouvant être utilisée pour introduire d'autres concepts, peut également apparaître comme relevant d'un certain arbitraire, et peut donc être soumis à la réflexion.

Mais on sait aussi que parfois on définit l'intégrale de f dans $[a; b]$ comme étant la variation $F(b) - F(a)$ où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$. Personnellement je ne souscris pas à cette façon de faire car cela ne respecte pas le sens de l'intégrale, elle ignore l'opération réelle d'intégration pour ne voir que l'opération de dérivation. De la sorte la notion d'intégrale est vidée de sa substance et qui plus est, on passe à côté du Théorème fonda-

mental dont on ne peut plus percevoir l'intérêt essentiel. Définir l'intégrale au moyen des primitives ne présente qu'un intérêt calculatoire, très relatif d'ailleurs quand on sait que de très nombreuses intégrales se calculent de façon numérique (c'est-à-dire en utilisant l'intégrale comme une *somme*), ... très illusoire aussi quand on voit ce qui, auprès des étudiants, reste des méthodes de primitivation après quelque temps.

Faut-il privilégier la rigueur formelle au risque de démontrer des propriétés qui peuvent paraître évidentes ? Envisageons le scénario suivant : on définit « sérieusement » l'intégrale au moyen des sommes de Riemann ; un étudiant à qui on demande de démontrer la propriété (1) effectue cette démonstration en utilisant la propriété d'additivité des aires ; que faut-il penser de la réponse, comment faut-il évaluer la compréhension de l'étudiant... ? Répondre à cette question pose de nouveau la question de l'équilibre entre sens et formalisme.

J'ai envisagé ci-dessus quelques cas qui me semblent assez exemplaires des terrains que peuvent occuper formalisme, intuition et sens. Chacun peut certainement trouver d'autres situations semblables. De tels choix ne sont d'ailleurs pas absolus, la notion de formalisme pouvant varier suivant les individus et suivant les niveaux d'enseignement.

Je n'ai pas traité ici des places à réserver à l'écriture formelle et à la langue naturelle. Par exemple faut-il préférer $\forall x \dots$ à « pour tout x , ... », ou inversement ? Ou encore faut-il écrire formellement les propositions de telle sorte à faire apparaître explicitement les opérations logiques ? Le débat se situe alors à un autre niveau, celui du langage utilisé, ce qui n'enlève rien à l'importance de ces questions.

Les sujets traités ici relèvent aussi de l'appréciation personnelle. Les pratiques d'enseignement ne peuvent être isolées des personnalités des intervenants, enseignés et enseignants, elles peuvent donc varier suivant ceux-ci. Dès lors je ne crois pas aux réponses intransigeantes et autres ukases. Mais, de façon générale, il me semble que nos méthodes d'enseignement peuvent, et dans certains cas doivent, simplifier l'environnement de travail, tendre à diminuer l'aspect formel, mais elles doivent toujours respecter le sens des notions étudiées et si possible le promouvoir.

Bibliographie

- [1] C. BERNARDI, *How formal should a proof be in teaching mathematics*,

- dans « Logique dans l'enseignement des Mathématiques », Belgian Mathematical Society, vol. 5, n° 5, supplément, 7–18.
- [2] A.-L. CAUCHY, *Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique, première partie : Analyse algébrique*, édité par U. Bottazzini, Éd. CLUEB, Bologna, 1990, 603 pp.
- [3] A. DAHAN-DALMENICO et J. PEIFFER, *Une histoire des mathématiques, route et dédales*, Éd. Seuil, 1986, 309 pp.
- [4] G. FREGE, *Was ist eine Funktion ?*, Festschrift L. Boltzmann gew. z. 60 Geburtstag (1904), 656–666 ; traduction française de C. Imbert : *Qu'est-ce qu'une fonction ?*, dans « Écrits logiques et philosophiques », Éd. Seuil, 1971, 160–169.
- [5] E. HAIRER et G. WANNER, *L'analyse au fil de l'histoire*, Springer, 2001, 371 pp.
- [6] H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Éd. Gauthier-Villars, 1928, réédition Éd. J. Gabay, 1989, 340 pp.
- [7] R.B. NELSEN, *Proofs without words*, Mathematical Association of America, 1993.
- [8] F. PHAM, *Fonctions d'une ou deux variables, des fonctions élémentaires aux fonctions implicites : chemins de découverte*, Éd. Dunod, 2003, 394 pp.



**POLYTECH
MONS**

FACULTÉ POLYTECHNIQUE DE MONS

PORTES OUVERTES 2007

Bachelier en sciences
de l'Ingénieur (3 ans)

Master en sciences
de l'Ingénieur (2 ans)

A MONS : le 12 mai de 9 à 13 h
amphithéâtre R. Stiévenart, 53 rue du Joncquois

A CHARLEROI : le 25 avril et le 27 juin
de 14 à 18 h • 38-40 bd Joseph II

INGÉNIEUR CIVIL EN

- Architecture
- Chimie et Science
des matériaux
- Electricité
- Informatique et
gestion
- Mécanique
- Mines et Géologie



La 1^{ère} année du grade de bachelier est aussi organisée à Charleroi.
Formation identique à celle de Mons.

Renseignements :

Secrétariat des Etudes - 9, rue de Houdain - 7000 MONS

Tél.: 065/37 40 30 à 32 | Fax: 065/37 40 34 | secretu@fpms.ac.be | <http://www.fpms.ac.be>

La Polytech est membre de l'Académie Universitaire Wallonie-Bruxelles

Cabri-Géomètre et les sections coniques (2^e partie)

JEAN-PAUL HOUBEN
Université Catholique de Louvain

Dans l'article précédent nous avons construit une conique comme section d'un plan avec un cône. Nous continuons aujourd'hui avec des constructions qui vont nous donner l'équation de cette section conique.

Pour ce faire nous allons successivement :

- Rabattre le plan de section dans le plan de la base du cône ;
- Relever la conique dans un plan frontal pour en avoir la vraie grandeur ;
- Translater la conique pour la rapporter au système d'axes de Cabri ;
- Écrire son équation.

Nous allons traiter le cas de l'ellipse-hyperbole en reprenant le fichier CONIE.HY.fig, obtenu dans l'article précédent ⁽¹⁾. Prenons le cas de l'ellipse ⁽²⁾, et agrandissons l'image pour ne pas avoir des points trop près les uns des autres. Nous aurons l'image de la figure 1.

Rabattement

Relions le point Y au point X . La droite YX forme avec la droite YO un angle qui donne l'angle dièdre entre le plan de la base du cône et le plan de section. Il suffit de faire une rotation des cinq points de la conique de section autour de l'arête du dièdre qui passe par Y . Pour chacun des cinq

Adresse de l'auteur : Jean-Paul Houben, Rue de l'Église 78, 1301 Bierges ; courriel : houbenjp@versatelads1.be.

⁽¹⁾ Cabri-Géomètre et les sections coniques, *Mathématique et pédagogie*, 158 de Septembre - Octobre 2006, pp. 51–58

⁽²⁾ Nous prenons le cas de l'ellipse plutôt que celui de l'hyperbole pour la bonne raison que la feuille sur laquelle nous dessinons avec Cabri-Géomètre n'a qu'un mètre carré de surface et que, pour une hyperbole, certains points peuvent ne pas s'y trouver. On peut d'ailleurs le vérifier, en fin de l'article, en déplaçant la section : l'équation devient impossible.

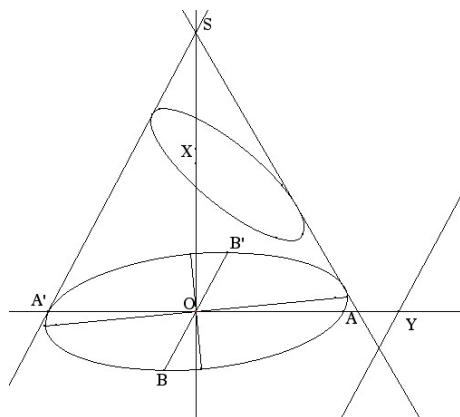


FIG. 1 –

points qui définissent la section, traçons une parallèle à XY . Recherchons l'intersection de chacune de ces parallèles avec l'arête du dièdre qui passe par Y . Ce point d'intersection sera le centre de la rotation. On relie enfin les cinq points images par ces rotations ⁽³⁾, pour obtenir la conique dans le plan de la base du cône. Cette conique est vue en perspective cavalière (figure 2).

Dans ce dessin le rabattement a été matérialisé en traçant les deux cercles de centre Y et passant par les extrémités du diamètre. Sur ces cercles on a placé un point entre le point et son image pour la rotation. On peut alors tracer l'arc défini par ces trois points du cercle. Le cercle est ensuite caché.

Cachons maintenant les constructions et passons à l'étape suivante qui va nous permettre d'avoir une vraie grandeur de la conique.

Relèvement

Pour remettre la conique dans un plan frontal, nous devons faire la construction inverse de celle que nous avons faite pour obtenir la perspective cavalière de la base du cône. Pour obtenir cette perspective cavalière nous avons utilisé le triangle rectangle isocèle passant par B et O . Pour chaque'un des cinq points de l'ellipse nous devons :

- Tracer une parallèle à l'hypoténuse de triangle rectangle en O ;

⁽³⁾ **Application/ Rotation**

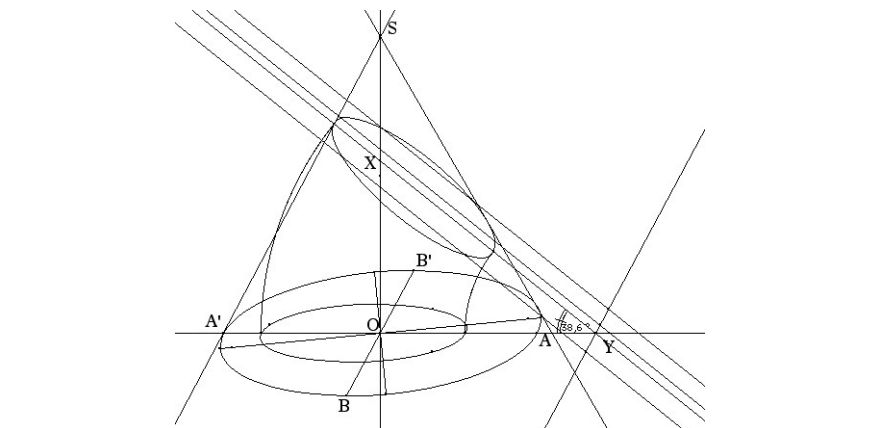


FIG. 2 –

- Tracer une parallèle à BO ;
- Rechercher l'intersection de cette dernière parallèle avec le diamètre de l'ellipse ;
- Par le point d'intersection obtenu, tracer la parallèle à la hauteur du cône ;
- Rechercher l'intersection de la première parallèle avec la dernière.

On trace la conique qui passe par les cinq points obtenus. Ce qui donne l'épure de la figure 3.

Avant de passer à la dernière étape, il est préférable d'avoir une figure plus dépouillée. On cache donc les constructions, pour obtenir la figure 4.

Translation ... et l'équation de la conique

Dans cette figure cherchons le milieu du diamètre. Ensuite montrons ⁽⁴⁾ les axes. Déplaçons l'origine des axes pour le placer plus à droite dans le dessin afin ne pas superposer les images. Traçons le vecteur ayant pour origine le milieu du diamètre et pour extrémité l'origine du système d'axes ⁽⁵⁾.

Recherchons l'image de l'ellipse pour la translation définie par le vecteur ⁽⁶⁾.

(⁴) **Aspect** / *Montrer les axes*

(5) **Droite** / *Vecteur*

(6) **Application / Translation**

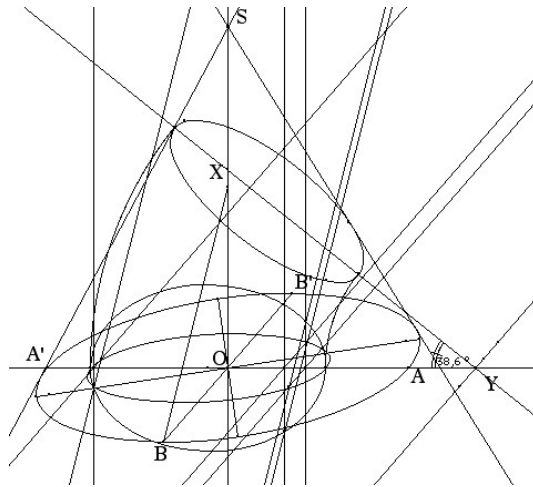


FIG. 3 –

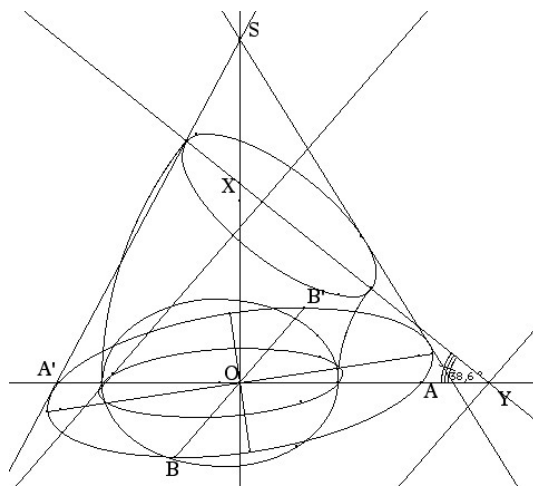


FIG. 4 —

Enfin demandons l'équation de l'ellipse translatée ⁽⁷⁾.

Pour que cette équation soit bien lisible, nous pouvons changer la taille de la police et même l'écrire en gras.

Le résultat est visible sur la figure 5.

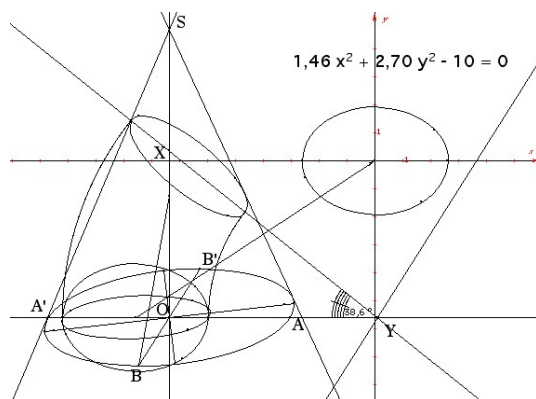


FIG. 5 –

C'est cette construction, mais plus élaborée, qui a été présentée au congrès de la SBPMef en août 2002 à Soignies. La différence est qu'à Soignies les différentes étapes de la construction étaient organisées avec un interrupteur multiple.

On trouvera sur le site de la SBPM : www.sbp.be, le fichier Cabri qui permet d'obtenir les sections ellipse-hyperbole de la dernière figure : SEC_CON.FIG.

Il y aura aussi le fichier Cabri présenté à Soignies en 2002 : SECON.FIG

Ce dernier fichier ne donne que les sections elliptiques, le cône utilisé n'ayant qu'une seule nappe pour ne pas avoir d'hyperboles.

⁽⁷⁾ **Mesure** / Coord. ou équation

Problèmes

Claudine Festraets ⁽¹⁾

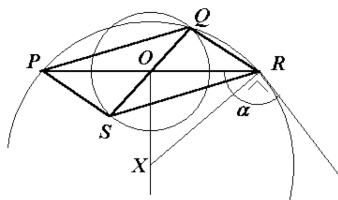
Pour les deux problèmes suivants, les constructions élémentaires à la règle et au compas (milieu d'un segment, perpendiculaire à une droite en un point, parallèle à une droite, déplacement d'un angle donné, ...) sont considérées comme connues.

Parallélogramme

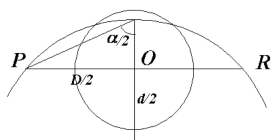
problème n° 322 de Mathématique et Pédagogie n° 155

Construire à la règle et au compas le parallélogramme dont sont connus les longueurs d et D des diagonales ainsi qu'un angle.

Solution de J. OOMS de Chimay



1. Fixer PR tel que $|PR| = D$, $D > d$.
2. On obtient un troisième sommet Q du parallélogramme à l'intersection du cercle de centre O et de rayon $\frac{d}{2}$ avec l'arc de segment capable de l'angle α construit sur PR comme corde. Le 4^e sommet S est le symétrique de Q par rapport à O .



⁽¹⁾ Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à Cl. FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles ou à l'adresse e-mail hamoircl@brutele.be

Il y a deux solutions symétriques par rapport à OX ssi $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} > \frac{D}{d}$ et une seule solution ssi $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{D}{d}$.

Bonnes solutions de J. ANSEEUW de Roeselare, S. DESCHAUER de Dresden, Y. DURAND de Mons, J. FINOULST de Diepenbeek, C. KHALID de Bruxelles, J. RASSE de Méan et M. VERHEYLEWEGHEN de Bruxelles.

Trapèze

problème n° 323 de Mathématique et Pédagogie n° 155

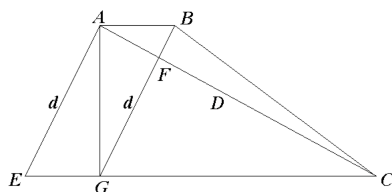
Construire à la règle et au compas le trapèze rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires et de longueurs données d et D . En calculer le périmètre et l'aire en fonction de d et D .

Solution de J. RASSE de Méan

On construit un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent respectivement d et D .

On trace AG perpendiculaire à EC et on construit le parallélogramme $AEGB$.

$ABCG$ est le trapèze demandé.



Calcul de l'aire

L'aire d'un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires vaut la moitié du produit des longueurs des deux diagonales : $\frac{D \cdot d}{2}$.

Calcul du périmètre

$$EC = \sqrt{d^2 + D^2}$$

$$AC^2 = GC \times EC, \text{ d'où } GC = \frac{D^2}{\sqrt{d^2 + D^2}}$$

$$AE^2 = EG \times GC, \text{ d'où } EG = \frac{d^2}{\sqrt{d^2 + D^2}} = AB$$

$$AG^2 = EG \times GC = \frac{d^2 D^2}{d^2 + D^2}, \text{ d'où } AG = \frac{dD}{\sqrt{d^2 + D^2}}$$

$$BC^2 = AG^2 + (EC - 2AB)^2 = \frac{d^2 D^2}{d^2 + D^2} + \left(\sqrt{d^2 + D^2} - \frac{2d^2}{\sqrt{d^2 + D^2}} \right)^2 =$$

$$\frac{d^2 D^2}{d^2 + D^2} + \left(\frac{D^2 - d^2}{\sqrt{d^2 + D^2}} \right)^2, \text{ d'où } BC = \sqrt{\frac{D^4 + d^4 - d^2 D^2}{d^2 + D^2}}$$

Le périmètre du trapèze vaut donc $\frac{d^2 + D^2 + dD + \sqrt{d^4 - d^2 D^2 + D^4}}{d^2 + D^2}$.

J. ANSEEUW de Roeselare, J. FINOULST de Diepenbeek, S. DES-CHAUER de Dresden, Y. DURAND de Mons, C. KHALID de Bruxelles, J.OOMS de Chimay et M. VERHEYLEWEGHEN de Bruxelles ont tous envoyé d'excellentes solutions.

Entre 10 et 99

problème n° 324 de Mathématique et Pédagogie n° 155

Déterminer tous les nombres n de deux chiffres (en base 10) multiples de 4 et tels que toute puissance entière de n se termine par n .

Solution de C.KHALID de Bruxelles

Les 22 nombres de deux chiffres multiples de 4 ont comme chiffres des unités 0, 2, 4, 6 et 8. Il s'agit de trouver parmi ces 22 nombres les nombres n tels que toute puissance n se termine par n .

Le cas de la puissance 1 est trivial.

Prenons la puissance 2. Il faut que le carré du chiffre des unités du nombre cherché donne un nombre dont le chiffre des unités est le même que celui du nombre cherché. Seuls les nombres dont le chiffre des unités est 6 satisfont à cette possibilité, ce sont 16, 36, 56, 76 et 96.

Prenons la puissance 3. Seul 76, parmi ces nombres, satisfait au fait que son cube se termine par 76.

Reste maintenant à démontrer que toute puissance entière naturelle non nulle p de 76 se termine par 76.

On a :

$$p = 1, 76^1 = 76 = 0 \cdot 10^2 + 76$$

$$p = 2, 76^2 = 5776 = 57 \cdot 10^2 + 76$$

$$p = 3, 76^3 = 438976 = 4389 \cdot 10^2 + 76$$

Supposons la propriété vraie pour p : $76^p = c \cdot 10^2 + 76$, où c est un naturel qui dépend de p .

Démontrons, par récurrence, qu'elle est aussi vraie pour $p + 1$. En effet :

$$76^{p+1} = 76^p \cdot 76 = (c \cdot 10^2 + 76) \cdot 76 = (76c + 57) \cdot 10^2 + 76.$$

On voit bien que 76^{p+1} se termine par 76. 76 est le seul nombre demandé. Il est facile de vérifier qu'il n'existe pas un nombre parmi les 22 nombres tel que toute puissance entière et négative de ce nombre se termine par celui-ci. Il suffit de calculer les inverses de ces nombres.

Bonnes solutions de J.ANSEEUW de Roeselare, S. DESCHAUER de Dresden, J. FINOULST de Diepenbeek, J. OOMS de Chimay, J. RASSE de Méan et J.G. SEGERS de Liège.

* *

*

Les solutions des problèmes que voici doivent me parvenir pour le 1^{er} avril 2007 au plus tard. Ces solutions peuvent être manuscrites, mais vous pouvez aussi les envoyer à mon adresse e-mail sous la forme d'un fichier $\text{\LaTeX}$ ou à défaut au format doc ou txt. Rédigez vos différentes solutions sur des feuilles séparées et n'oubliez pas d'indiquer votre nom sur chacune des feuilles.

331. Système

Résoudre dans $\mathbf{R}$ le système

$$\begin{cases} a\sqrt{x+z-y} \cdot \sqrt{x+y-z} = x\sqrt{yz} \\ b\sqrt{x+y-z} \cdot \sqrt{y+z-x} = y\sqrt{xz} \\ c\sqrt{z+y-x} \cdot \sqrt{z+x-y} = z\sqrt{xy}, \end{cases}$$

a, b, c étant des réels donnés non nuls.

332. Premier chiffre

Soient a et n des nombres naturels et $s = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n$. Démontrer que, en numération décimale, le chiffre des unités de s est 1 ssi le chiffre des unités de a et celui de n sont tous deux égaux à 1.

333. Polynômes

Déterminer tous les polynômes $P(x)$ à coefficients réels tels que

$$P(x) \cdot P(x+1) = P(x^2 + x + 1).$$

Olympiades

Claudine Festraets ⁽¹⁾

Voici tout d'abord les solutions des problèmes posés lors de la finale de l'Olympiade Mathématique Belge 2006. Ces solutions ont été choisies parmi les meilleures proposées par les élèves. Ensuite, vous trouverez les énoncés des problèmes posés lors de l'Olympiade Mathématique Internationale 2006.

MINI

1. Les nombres naturels sont écrits successivement pour former la suite

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 ...

- (a) Quel est le 2006^e chiffre de cette suite ?
- (b) Combien y a-t-il de chiffres 0 depuis le début de la suite jusqu'au 2006^e chiffre inclus ?

Solution de Arnaud Duvieusart, élève de 1^{re} année au Collège St Pierre à Uccle.

(a) De 0 à 9, il y a 10 chiffres. De 10 à 99, il y a 90 nombres de 2 chiffres, donc 180 chiffres. De 100 à 999, il y a 900 nombres de 3 chiffres, donc 2700 chiffres. Le 2006^e chiffre est donc dans un nombre compris entre 100 et 999. De 0 à 99, il y a $(180 + 10)$ chiffres, donc 190 chiffres. Il faut alors chercher le $(2006 - 190)^{\text{e}}$ chiffre à partir de 100. $2006 - 190 = 1816$. Le 1800^e chiffre est le troisième 9 de 699, car de 100 à 999 il n'y a que des nombres de trois chiffres, donc il faut diviser 1800 par 3, cela fait 600 et le 600^e nombre à partir de 100 est 699. Le 1815^e chiffre est dans $699 + 5 = 704$, c'est le 4 de 704. Le 2006^e chiffre de la série est donc le 7 de 705.

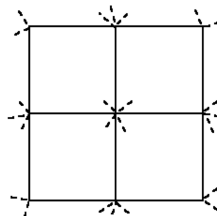
(b) De 0 à 9 : une fois le zéro, de 10 à 99 : neuf fois le zéro, de 100 à 199 : 20 fois le zéro, de 200 à 699 : $5 \times 20 = 100$ fois le zéro, de 700 à 704 : 6 fois le zéro. En tout : 136 fois le chiffre zéro.

2. Henriette possède 2006 morceaux de ficelle, tous de même longueur. Elle les noue l'un à l'autre afin de réaliser un grand filet carré à mailles carrées, chaque morceau de ficelle devient un côté d'une maille. Ci-dessous

⁽¹⁾ Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à Cl. FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles ou à l'adresse e-mail hamoircl@brutele.be

est représenté un petit filet 2×2 . À chaque nœud, dépassent 2, 3 ou 4 bouts de ficelle (dessinés en pointillés). Il lui faudra couper ces bouts de ficelle.

- (a) Si elle réalise un grand filet 15×15
- Combien de morceaux de ficelle devra-t-elle utiliser ?
 - Combien de bouts de ficelle qui dépassent devra-t-elle couper ?
- (b) Si elle réalise le plus grand filet carré possible avec ses 2006 morceaux de ficelle, combien de bouts de ficelle qui dépassent devra-t-elle couper ?



Solution de François Staelens, élève de 1^{re} année à l'Institut St Louis à Namur.

(a) i. Pour un filet de côté c , il y a c morceaux horizontaux sur une ligne qu'il faut multiplier par le nombre $c + 1$ de lignes. De même, pour les morceaux verticaux, donc il faut multiplier par 2. Le nombre total de morceaux est $c.(c + 1).2$.

Donc pour un filet de côté 15, il faut $15.(15 + 1).2 = 480$ morceaux de ficelles.

ii. On remarque qu'il y a deux bouts à couper par morceau de ficelle. Il suffit de multiplier par 2 le nombre de morceaux. Il y a $480.2 = 960$ bouts à couper.

(b) Pour un filet de côté c , le nombre total de morceaux est $c.(c + 1).2$. Donc pour 31 ce sera $31.(31 + 1).2 = 1984$ et pour 32 ce sera $32.(32 + 1).2 = 2112$ ce qui dépasse 2006, donc ce sera un filet de côté 31. Comme il y a deux bouts à couper par morceau, il y a $1984.2 = 3968$ bouts à couper quand on a réalisé le plus grand filet carré possible avec 2006 morceaux de ficelle.

3. Le triangle ABC est isocèle avec $|AB| = |AC|$. L'angle $\widehat{BAC}$ est aigu et tel que le cercle de centre B et de rayon $|BC|$ coupe $[AC]$ en D et $[AB]$ en E . Si les triangles BCD et BED sont symétriques par rapport à BD

- (a) que vaut, en degrés, l'amplitude de l'angle $\widehat{BAC}$? (justifier cette réponse)
- (b) prouver que le triangle AED est isocèle.

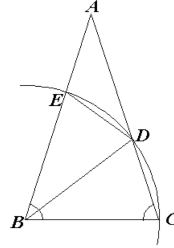
Solution de Sébastien Lévy, élève de 2^e année au Lycée Français à Uccle

(a) On sait que $[BC]$, $[BD]$ et $[BE]$ sont des rayons du cercle de centre B . Donc $|BC| = |BD| = |BE|$ et les triangles BCD et BDE sont isocèles en B . De plus on sait que ces triangles sont symétriques par rapport à BD . La symétrie orthogonale conserve les angles,

donc $\widehat{CBD} = \widehat{DBE} = \frac{1}{2}\widehat{CBA}$. Et de là, $\widehat{EBC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDB} = \widehat{BDE} = \widehat{DEB} = 2\widehat{DBE} = 2\widehat{DBC}$.

La somme des mesures des angles d'un triangle vaut 180° . D'où $180^\circ = \widehat{BCD} + \widehat{BDC} + \widehat{DBC} = 5\widehat{DBC}$ et $\widehat{DBC} = \frac{1}{5}180^\circ = 36^\circ$,

$\widehat{EBC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDB} = \widehat{BDE} = \widehat{DEB} = 2.36^\circ = 72^\circ$,
 $\widehat{BAC} = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 36^\circ$.

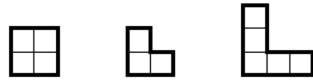


(b) On sait que $\widehat{BED}$ et $\widehat{DEA}$ sont supplémentaires, or $\widehat{BED} = 72^\circ$, donc $\widehat{DEA} = 108^\circ$.

De plus, on sait que $\widehat{BAC} = 36^\circ$.

Donc, $\widehat{ADE} = 180^\circ - 108^\circ - 36^\circ = 36^\circ$ et le triangle AED est isocèle en E .

4. On désire paver un rectangle en utilisant uniquement des pièces identiques à celles dessinées ci-dessous, formées de petits carrés de dimension 1×1 . Ce pavage doit s'effectuer sans laisser de trou dans le rectangle et sans superposer deux pièces.

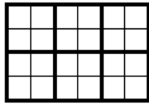


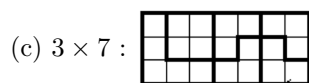
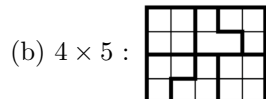
Ce pavage est-il possible si les dimensions du rectangle sont

- (a) 4×6 ?
- (b) 4×5 ?
- (c) 3×7 ?
- (d) $m \times n$ où m et n sont des naturels supérieurs à 2 ?

Solution de Laetitia Gelgras, élève de 2^e année à l'Athénée E. Bockstael à Laeken.

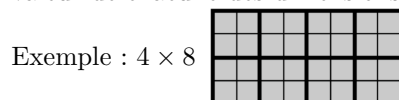
(a) 4×6 :



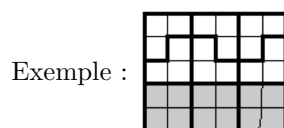


(d) la réponse est oui car

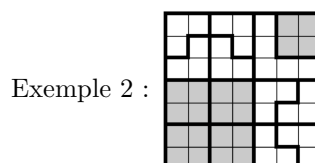
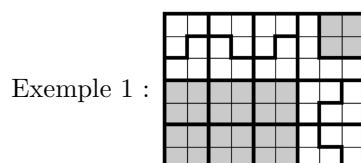
- Si les dimensions sont toutes deux multiples de 2, on utilise la figure  puisqu'on peut mettre un certain nombre de fois 2 dans la valeur de chacune des dimensions.



- Si une des dimensions (la largeur) est multiple de 2 et l'autre (la hauteur) pas, on divise la largeur en colonnes de largeur 2 et la hauteur en rangées de largeur 2 sauf la première qui sera de largeur 3. On forme alors une série de rectangles 2×3 et une série de carrés 2×2 , on utilise les figures  pour remplir les rectangles  et les figures  pour les carrés.



- Si aucune des dimensions n'est multiple de 2, on procède comme dans le cas précédent jusqu'à ce qu'il reste 3 carrés à l'un des côtés. À ce moment-là, on construit un carré 3×3 et on divise le segment pair ainsi obtenu en rectangles 2×3 . On divise le carré 3×3 comme suit :



La 47^e OMI s'est tenue du 6 au 18 juillet 2006 à Ljubljana. Les francophones de l'équipe belge s'y sont bien comportés puisque François Gonze (Institut de la Providence à Wavre) a obtenu une médaille de bronze, Numa Couniot (Collège St Joseph à Chimay) ainsi que Yves Debongnies (Collège du Christ Roi à Ottignies) ont tous deux obtenu une mention honorable. Sur 90 pays participants, la Belgique se classe 52^e. Les problèmes 1 et 4 étaient assez faciles, mais les quatre autres m'ont semblés fort difficiles. Je vous laisse en juger par vous-même.

Problème 1. Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. Un point P intérieur au triangle vérifie

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}$$

Montrer que $AP \geq AI$ et que l'égalité a lieu si et seulement si $P = I$.

Problème 2. Soit P un polygone régulier à 2006 côtés. Une diagonale de P est appelée *bonne* si ses extrémités partagent le contour de P en deux parties ayant chacune un nombre impair de côtés de P . Les côtés de P sont aussi appelés *bons*.

On suppose que P a été subdivisé en triangles par 2003 diagonales n'ayant deux à deux aucun point commun à l'intérieur de P . Trouver le nombre maximum de triangles isocèles ayant deux côtés bons qui peuvent apparaître dans une telle subdivision.

Problème 3. Trouver le plus petit réel M tel que l'inégalité

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

soit vérifiée pour tous nombres réels a , b et c .

Problème 4. Trouver tous les couples (x, y) d'entiers vérifiant

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$$

Problème 5. Soit $P(x)$ un polynôme à coefficients entiers, de degré $n > 1$ et k un entier strictement positif. On considère le polynôme

$Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots))$, dans lequel P apparaît k fois. Montrer qu'il existe au plus n entiers t tels que $Q(t) = t$.

Problème 6. À tout côté b d'un polygone convexe P on associe le maximum de l'aire d'un triangle contenu dans P et ayant b comme côté. Montrer que la somme des aires associées à tous les côtés de P est au moins le double de l'aire de P .

Le coin du trésorier

R. Scrève

Tarifs (Janvier 2006)

Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent *Mathématique et Pédagogie*, *SBPM-Infor* et les deux *Math-Jeunes*.

- Belgique :
 - Cotisation ordinaire : 24 € ;
 - Cotisation multiannuelle (5 ans) : 110 € ;
 - Cotisation familiale (réservée aux couples cohabitant ; les intéressés ne reçoivent qu'un exemplaire des publications, mais sont membres à part entière et participent donc aux élections) : 30 € ;
 - Cotisation réduite (réservée aux étudiants et aux sans-emploi) : 15 € ;
- Europe : 65 € (non-PRIOR), 72 € (PRIOR) ;
- Autres pays : 70 € (non-PRIOR), 79 € (PRIOR).

Abonnement à *Mathématique et Pédagogie*

- Belgique : 30 € ;
- Europe : 50 € (non-PRIOR), 54 € (PRIOR) ;
- Autres pays : 53 € (non-PRIOR), 58 € (PRIOR).

Anciens numéros :

- < 2005 : 0,75 €/n° + frais d'expédition.
- ≥ 2005 : 2,50 €/n° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : Belgique : 1,80 €, Europe : 4,50 €, Autres pays : 6 €.

Abonnement à *Math-Jeunes* ou *Math-Jeunes Junior*

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, supérieur et inférieur respectivement, sont idéalement pris de manière groupée par l'intermédiaire d'un professeur.

- Abonnements groupés (au moins 5) :
 - Abonnements groupés à une des revues (3 numéros) Belgique : 4 € ;
 - Abonnements groupés aux deux revues (6 numéros) Belgique : 8 €.

- Abonnements individuels :
 - Abonnements à une des revues (3 numéros)
Belgique : 6 € ;
France : 8 € (à prendre par l'intermédiaire de l'APMEP) ;
Europe : 18 € (non-PRIOR), 20 € (PRIOR) ;
Autres pays : 19 € (non-PRIOR), 22 € (PRIOR).
 - Abonnements aux deux revues (6 numéros)
Belgique : 12 € ;
France : 16 € (à prendre par l'intermédiaire de l'APMEP) ;
Europe : 24 € (non-PRIOR), 26 € (PRIOR) ;
Autres pays : 25 € (non-PRIOR), 28 € (PRIOR).

Anciens numéros :

- $\leq 2003-2004$: 0,25 €/n° + frais d'expédition.
- $\geq 2004-2005$: 0,50 €/n° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : Belgique : 1,50 €, Europe : 2,50 €, autres pays : 3 €.

Bulletin de l'APMEP

Les membres de la SBPMef peuvent, par versement à son compte, devenir membres de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (France). Le prix de l'abonnement est de 50 €. Ils recevront le *Bulletin* de l'APMEP, le BGV (*Bulletin à Grande Vitesse*) et *PLOT*.

Les membres de la SBPMef peuvent aussi commander par celle-ci les publications de l'APMEP ; ils bénéficient du prix « adhérents ».

Autres publications (brochures et CD-ROM)

Les prix indiqués sont les prix des publications ; les frais d'expédition (port et emballage) sont en sus. Les prix réduits sont réservés aux membres de la SBPMef ou de sociétés associées (comme l'APMEP) et aux étudiants. N'hésitez pas à consulter notre secrétariat ou à visiter notre site Internet.

Pour toutes nos publications non périodiques, à partir du dixième exemplaire, toute la commande bénéficie d'une réduction de 10 %.

Modalités de paiement :

Pour effectuer une commande, versez le montant indiqué sur un des comptes suivants :

- **Si vous habitez en Belgique** : Compte 000-0728014-29 de SBPMef.
- **Si vous habitez en France** : Compte CCP Lille 10 036 48 S de SBPMef.
- **Si vous habitez ailleurs** : Virement international sur l'un de nos deux comptes avec les références internationales suivantes :
CCP BELGIQUE : IBAN BE26 0000 7280 1429 / BIC BPOTBEB1
ou CCP LILLE :
IBAN FR68 2004 1010 0510 0364 8S02 683 / BIC PSSTFRPPLIL

	Prix plein	Prix réduit	Frais d'expédition
Séries RÉNOVER			
Série 1 (n° 12)	1 €	—	T ₁
Série 2 (n° 7–11 & 13)	5 €	—	T ₂
Série 3 (n° 14)	5 €	—	T ₂
Les 3 séries	7,50 €	—	T ₂
Dossiers d'exploration didactique			
Dossier 2 : <i>Autour du PGCD</i>	1,80 €	1,20 €	T ₁
Dossier 3 : <i>Isomorphisme et Dimension</i>	1,80 €	1,20 €	T ₁
Dossier 6 : <i>Statistique</i>	7,40 €	6 €	T ₁ ⁽¹⁾
Dossier 7 : <i>Vers les infiniment petits</i> (Simone TROMPLER et Guy NOËL)	6 €	—	T ₁
Dossier 8 : <i>La démonstration en géométrie plane dans les premières années l'enseignement secondaire</i> (Claude VILLERS et al.)	9 €	—	T ₂ ⁽²⁾
Dossier 9 : <i>Des démonstrations à la rencontre des compétences à travers de thèmes</i> (Claude VILLERS et al.)	9 €	—	T ₂ ⁽²⁾
Dossier 10 : <i>Narrations de recherche — De la théorie à la pratique dans les enseignements secondaire et supérieur</i> (Jacques BAIR, Jean-Claude DELAGARDELLE, Valérie HENRY)	6 €	—	T ₁
Jacques BAIR, <i>Mathématique et Sport</i>	5 €	3,70 €	T ₁
François JONGMANS, <i>Eugène Catalan, Géomètre sans patrie, ...</i>	12 €	9,50 €	T ₂
G. ROBERT, CD-ROM, logiciels mathématiques	5 €	—	T ₁
Recueils de questions des OMB			
Tome 5	6 €	—	T ₁ ⁽¹⁾
Tome 6	6 €	—	T ₁ ⁽¹⁾
Tomes 5 & 6 ensemble	10 €	—	T ₁ ⁽¹⁾

⁽¹⁾ 2–3 ex. : T₂; 4–6 ex. : T₃; 7–12 ex. : T₄; au-delà : consulter le secrétariat.
⁽²⁾ 2 ex. : T₃; 3–4 ex. : T₄; au-delà : consulter le secrétariat.

Frais d'expédition (non-PRIOR)			
	Belgique	Europe	Autres pays
Tarif 1	1,80 €	4,50 €	6 €
Tarif 2	3,50 €	8,50 €	12 €
Tarif 3	5 €		
Tarif 4	7 €		

Pour les expéditions PRIOR :
consulter le secrétariat.

Pour la définition d'« Europe »,
voir les tarifs postaux.

Pour tout problème,
consulter le secrétariat.