

| <b>Société Belge des Professeurs de Mathématique<br/>d'expression française</b>                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Secrétariat :</b> <i>M.-C. Carruana</i> , Rue du Onze novembre 24, B-7000 Mons (Belgique). Tél. : 32.(0)65.31.91.80; courriel : <a href="mailto:sbpm@sbpm.be">sbpm@sbpm.be</a> .<br>Site internet : <a href="http://www.sbpm.be">http://www.sbpm.be</a>                                                                                                  |                                                                                                                                  |
| <b>Conseil d'administration :</b> <i>B. Baudelet, M. Denis-Pecher, É. Deridiaux, B. Desaeleer, P. Dupont, D. Foucart, M. Frémal, Chr. Géron, M. Goffin, R. Gossez-Ketels, M. Herman, J.-P. Houben, R. Lesplingart-Midavaine, M. Machtelings, Chr. Michaux, J. Miewis, N. Miewis-Seronveaux, Ch. Randour-Gabriel, R. Scrève, Ph. Skilbecq, G. Troessaert</i> |                                                                                                                                  |
| <b>Président,<br/>Olympiades Internationales :</b><br><i>G. Troessaert</i> , Sur le Chêne 58,<br>6800 Libramont, Tél. 061.22.42.01                                                                                                                                                                                                                          | <b>Vice-Président,<br/>Portefeuille de lecture :</b><br><i>M. Herman</i> , Rue Rafhay 95,<br>4630 Soumagne, Tél. 087.26.70.23    |
| <b>Administrateur délégué :</b><br><i>Chr. Michaux</i> , Rue Brigade Piron<br>290, 6061 Montignies-sur-Sambre,<br>Tél. 065.35.47.06                                                                                                                                                                                                                         | <b>Congrès, Publicité :</b><br><i>M. Denis-Pecher</i> , Rue de la Ferme<br>11, 5377 Noisieux (Somme-Leuze),<br>Tél. 086.32.37.55 |
| <b>Trésorier, Site internet :</b><br><i>R. Scrève</i> , Rue du Corbeau 146,<br>6200 Châtelet, Tél. 071.40.27.34                                                                                                                                                                                                                                             | <b>Secrétaire :</b><br><i>M. Frémal</i> , Rue W. Jamar 311/51,<br>4430 Ans, Tél. 04.263.68.17                                    |
| <b>Olympiades nationales :</b><br><i>Cl. Festraets-Hamoir</i> , Rue J.-B.<br>Vandercammen 36, 1160 Bruxelles<br>Tél. 02.673.90.44                                                                                                                                                                                                                           | <b>Contact Presse :</b><br><i>N. Miewis-Seronveaux</i> , Avenue de<br>Péville 150, 4030 Grivegnée<br>Tél. 04.343.19.92           |
| <b>Math-Jeunes Junior :</b><br><i>A. Paternotte</i> , Rue du Moulin 78,<br>7300 Boussu, Tél. 065.78.50.64                                                                                                                                                                                                                                                   | <b>Math-Jeunes Senior :</b><br><i>G. Noël</i> , Chemin de la procession 396,<br>7000 Mons, Tél. 084.38.72.89                     |
| <b>SBPM-Infor :</b><br><i>R. Gossez</i> , Albert I Laan 13,<br>1560 Hoeilaart, Tél. 02.657.98.92                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                  |
| <b>Mathématique et Pédagogie :</b><br><i>P. Dupont</i> , Rue du Stampia 77, 1390 Grez-Doiceau, Tél. 010.84.11.99<br><b>Comité de lecture :</b> <i>J. Bair, A.-M. Bleuart, M. Denis-Pecher, V. Henry, M. Herman, J.-P. Houben, Chr. Michaux, J. Miewis, J. Navez, G. Noël, Ph. Skilbecq, Cl. Villers</i>                                                     |                                                                                                                                  |

Photo de couverture : *Empilement de sphères... menaçantes ?* (Rye, Sussex, avril 2007)  
— Photo P. Dupont



# *Mathématique et Pédagogie*

## *Sommaire*

### *Articles*

- Sylvain Courtois, Francis Denis, *Un problème à la mémoire d'Alan Turing* 3
- Francis Buekenhout, *La gauche et la droite en géométrie élémentaire* 13
- Claudine Festraets, *Les billards* 31
- Bernard Honclaire, *Songe d'un matin d'hiver* 41

### *Rubriques*

- C. Festraets, *Problèmes* 59
- Cl. Festraets, *Olympiades* 63
- R. Scrève, *Le coin du trésorier* 68

## NOTE

- Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse :  
Pascal Dupont, Rue du Stampia 77, B - 1390 Grez-Doiceau.  
Courrier électronique : `pascal.dupont@ulg.ac.be`
- Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique *stricto sensu*, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques, &c.
- Les auteurs sont responsables des idées qu'ils expriment. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.
- Les auteurs sont invités à envoyer leurs articles encodés sur un CD-rom ou par courrier électronique. L'usage de  $\text{\LaTeX}$  est vivement recommandé ; d'autres traitements de texte ne devraient être utilisés que pour des textes ne comportant pas de formules ; dans ce cas, le format « texte seul » est finalement encore préférable. À défaut, les textes seront dactylographiés. *Les textes devant être réencodés risquent de voir leur délai de parution allongé de manière appréciable.*
- Si l'article en contient, la qualité des figures est extrêmement importante. Elles devraient être réalisées selon l'une des modalités suivantes, dans l'ordre des préférences décroissantes : l'usage, dans le texte, de l'environnement « tikzpicture » (défini dans le paquet « tikz ») ; l'inclusion de fichiers externes, au format PDF ou JPEG (éviter les compressions trop importantes) : le PostScript devra être converti ; dans le cas d'un article envoyé sur papier, des documents de bonne qualité et prêts à être scannés.
- L'auteur mentionnera dans l'article ses prénom, nom et adresse (personnelle ou professionnelle) ainsi que l'institution où il travaille.
- La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous.  
Pour les livres :  
DIEUDONNÉ J., *Foundations of Modern Analysis*, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pp.  
Pour les articles :  
GRIBAUMONT A., Les structures de programmation, *Mathématique et Pédagogie*, **36** (1982), 53–56.
- Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée ; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour corriger cette épreuve et la renvoyer à la rédaction.
- MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

©SBPMef Toute reproduction partielle ou totale est interdite sans autorisation.  
Éditeur responsable : Pascal Dupont, Rue du Stampia 77, 1390 Grez-Doiceau.

Publié avec l'appui de l'Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Service général du Pilotage du système éducatif.

# Un problème à la mémoire d'Alan Turing

SYLVAIN COURTOIS, FRANCIS DENIS  
Inspecteurs honoraires

## 1. Introduction

### 1.1. *Enigma*

La machine électromécanique de cryptage utilisée par l'armée allemande durant la Deuxième Guerre Mondiale, connue sous le nom d'*Enigma*, se compose d'un clavier des 26 lettres de l'alphabet relié par un câblage secret à un tableau d'affichage formé aussi de 26 lettres. La machine a déjà été abondamment décrite.

Le plus élémentaire cryptage consiste à établir une correspondance bijective entre le clavier et le tableau, soit une permutation des 26 lettres :  $26!$  possibilités, théoriques, car toutes ne conviennent pas au cryptage. Au lieu de ces substitutions simples, aisées à déchiffrer grâce aux propriétés statistiques de la langue (fréquences des lettres), la substitution polyalphabétique choisie par *Enigma* consiste à changer la clé de codage après chaque chiffrement d'une lettre ; de cette manière les fréquences des lettres ne sont plus aussi apparentes. Le codage aurait été tel qu'aucune lettre n'était jamais chiffrée par elle-même.

Année 1939. Les Britanniques, confrontés à la guerre, recrutent de jeunes mathématiciens — dont Alan Turing — et les installent dans une enceinte secrète à Bletchley Park pour décoder les messages à tout prix...

---

Adresses des auteurs : Sylvain Courtois, Raatshovenstraat, 83, 3400 Landen ; courriel : [sylvain.courtois4@yucom.be](mailto:sylvain.courtois4@yucom.be) ; Francis Denis, rue Duchêne, 9, 4120 Neupré ; courriel : [f.h.denis@tele2allin.be](mailto:f.h.denis@tele2allin.be).

## 1.2. Qui est Alan Turing ?

Turing naît à Londres en 1912 et, à l'école secondaire, il est réputé timide, gauche, mais très intéressé par les sciences. En 1931, Turing est admis à Cambridge. Il y passe des années heureuses ; outre ses succès académiques, il se trouve dans un environnement tolérant. Suite aux travaux du logicien Kurt Gödel, Turing écrit un article *On computable numbers*. Il imagine ensuite toute une série de machines, chacune destinée à effectuer une opération particulière : diviser, factoriser... Il imagine finalement une « Universal Turing Machine » capable d'effectuer toutes ces opérations et capable de répondre à toutes les questions auxquelles une réponse logique peut être donnée. Il s'agit de l'ordinateur programmable ; la base théorique élaborée par Turing est solide, mais la technologie n'existe pas encore pour la mettre en pratique.

## 1.3. Alan Turing et *Enigma*

Affecté au Service de décryptage, Turing imagine une machine pouvant essayer toutes les combinaisons possibles jusqu'à trouver une séquence de lettres ayant un sens, deviné à l'avance : la recherche du mot probable. Il y réussit à décrypter *Enigma*. Alan Turing était un militaire britannique mal soigné ; ses parents ignoraient comme tout le monde la particularité de sa tâche de *codebreaker*.

Turing chercha durant toute la guerre, à concevoir avec sa vision de la programmation et de la hiérarchie des sous-routines, un ordinateur universel capable de jouer aux échecs ou aux puzzles, de faire preuve d'intelligence. Après la guerre, tout le personnel de Bletchley Park fut dispersé et tous les papiers brûlés.

## 1.4. Les dernières années de Turing

Alan Turing ne vécut pas assez longtemps pour obtenir une quelconque reconnaissance, car sa réussite à propos d'*Enigma* fut tenue secrète. Il fut poursuivi en 1952 pour homosexualité et mis sous surveillance. Le 7 juin 1954, on le trouva mort dans sa chambre près d'un flacon de cyanure, après qu'il eut mordu dans une pomme trempée dans le poison. L'enquête officielle conclut à un suicide.

Turing, intéressé aux sciences de la nature, avait décrit les formes et la croissance des plantes et cherché à la comprendre. Il écrivit, avant sa mort en 1954, un dernier travail relatif à la morphogenèse des plantes, qui ne fut publié qu'en 1991 : *A Diffusion Reaction Theory of Morphogenesis in Plants*.

### 1.5. Un problème à sa mémoire

Sachant que le nombre de permutations d'un alphabet à 26 éléments est de  $26!$ , recherchons le nombre  $p(26)$  de permutations d'un alphabet à 26 éléments dans lesquelles aucune lettre n'est appliquée sur elle même, ainsi que son rapport à  $26!$ .

## 2. Les permutations d'un ensemble ne laissant aucun élément fixe.

La suite de Fibonacci  $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots)$  est définie par

$$f_1 = 1, f_2 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}.$$

Une matrice  $2 \times 2$  opérant sur les termes  $f_{n-1}$  et  $f_n$  fournit les termes  $f_n$  et  $f_{n+1}$  ; cette matrice pourrait s'appeler « Matrice de Fibonacci »

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n + f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}.$$

### 2.1. Exemples de permutations sans point fixe

Notons  $p(n)$  le nombre de permutations d'un ensemble à  $n$  éléments, n'ayant aucun élément fixe.

- $\{a\}$  n'admet pas de permutation sans élément fixe ;  $p(1) = 0$ .
- $\{a, b\}$  admet  $p(2) = 1$  permutation sans élément fixe (échange de  $a$  et  $b$ ).
- $\{a, b, c\}$  admet  $p(3) = 2$  permutations sans élément fixe ( $a$  va en  $b$  et  $b$  en  $c$  ;  $a$  va en  $c$  et  $c$  va en  $b$ ).
- Permutations de  $\{a, b, c, d\}$  :  $p(4)$  s'obtient à partir des deux précédents  $p(3)$  et  $p(2)$ . Supposons que  $a \mapsto b$  ; restent trois éléments  $b, c, d$  à appliquer sur  $a, c, d$ .

- Ou bien  $b$  est échangé avec  $a$  : il reste  $c, d$  à appliquer sur  $c, d$ . Aux notations près, il s'agit du cas déjà traité,  $p(2) = 1$ .
- Ou bien  $b$  n'est pas échangé avec  $a$  : il reste à appliquer  $b, c, d$  sur  $a, c, d$ , sachant que  $b$  ne peut être appliqué sur  $a$ . Il s'agit du cas  $p(3) = 2$  vu plus haut.

Ce raisonnement s'applique trois fois selon que  $a$  est appliqué sur  $b, c$  ou  $d$  ; dès lors,

$$p(4) = (p(3) + p(2)) \times 3 = (2 + 1) \times 3 = 9.$$

Cette expression qui s'apparente à la suite de Fibonacci est généralisée au point suivant.

[Pour rappel, la suite de Fibonacci  $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots)$  est définie par

$$f_1 = 1, f_2 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}.$$

Une matrice  $2 \times 2$  opérant sur les termes  $f_{n-1}$  et  $f_n$  fournit les termes  $f_n$  et  $f_{n+1}$  ; cette matrice pourrait s'appeler « Matrice de Fibonacci »

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n + f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}.]$$

## 2.2. Une formule : $p(n+1)$ en fonction de $p(n)$ et $p(n-1)$

Elle consiste à prouver que  $p(n+1) = (p(n) + p(n-1)) \cdot n$ .

Sachant que  $p(1) = 0$  et  $p(2) = 1$ , posons  $p(n) = \alpha$ ,  $p(n-1) = \beta$ . Les  $n+1$  éléments de  $A$  sont notés  $\{a, b, c, d, \dots, z\}$ . Supposons que  $a \mapsto b$  ; il reste à appliquer les  $n$  éléments  $\{b, c, d, \dots, z\}$  sur les  $n$  éléments  $\{a, c, d, \dots, z\}$  ; le premier ensemble étant  $A$  privé de  $a$  et le second étant  $A$  privé de  $b$ .

- Ou bien  $b$  est échangé avec  $a$ , alors il reste à appliquer les permutations (sans élément fixe) des  $n-1$  éléments restants ; leur nombre est connu :

$$p(n-1) = \beta.$$

- Ou bien  $b$  n'est pas échangé avec  $a$ , alors  $b$  est appliqué sur un élément de  $A$  autre que  $a$  et forcément autre que  $b$  ; on retrouve une valeur connue,

$$p(n) = \alpha.$$

Comme  $a$  peut s'appliquer de  $n$  manières sur un élément de  $A$  autre que  $a$ , on peut conclure :

$$p(n+1) = (p(n) + p(n-1)) \cdot n.$$

La suite des  $p(n)$  s'écrit :

$$0, 1, 2, 9, 44, 265 \dots$$

La section 2.5 donne un calcul matriciel des éléments de cette suite.

Un tableur fournit dans la troisième colonne la suite des valeurs recherchées ; en colonne 2 à titre de comparaison les valeurs correspondantes de la suite de Fibonacci.

|     | Fibonacci                       | Perm. sans point fixe              |
|-----|---------------------------------|------------------------------------|
| $n$ | $p(n+1) =$<br>$= p(n) + p(n-1)$ | $p(n+1) =$<br>$= n[p(n) + p(n-1)]$ |
| 1   | 1                               | 0                                  |
| 2   | 1                               | 1                                  |
| 3   | 2                               | 2                                  |
| 4   | 3                               | 9                                  |
| 5   | 5                               | 44                                 |
| 6   | 8                               | 265                                |
| 7   | 13                              | 1854                               |
| 8   | 21                              | 14 833                             |
| 9   | 34                              | 133 496                            |
| 10  | 55                              | 1 334 961                          |
| 11  | 89                              | 14 684 570                         |
| 12  | 144                             | 176 214 841                        |

TAB. 1 –

### 2.3. Une deuxième formule :

$p(n+1)$  en fonction de  $n$  et de  $p(n)$

De la formule précédente  $p(n+1) = n(p(n) + p(n-1))$ , découle une nouvelle formule qui donne la valeur d'un terme quelconque connaissant son rang et son prédécesseur :

$$p(n+1) = (n+1) \cdot p(n) + (-1)^{n+1}.$$

La démonstration s'établit par récurrence.



- Pour les petites valeurs de  $n$ , le résultat est clair :  $p(1) = 0$  ;  $p(2) = 1$  ;  $p(3) = 2$ .
- Supposons ensuite que  $p(n) = n \cdot p(n-1) + (-1)^n$  ; comme  $n \cdot p(n-1) = p(n+1) - n \cdot p(n)$ , il vient  $p(n) = p(n+1) - n \cdot p(n) + (-1)^n$  et de là

$$p(n+1) = (n+1) \cdot p(n) + (-1)^{n+1}.$$

Cette formule permet de déterminer un terme connaissant son prédécesseur et son rang.

Le tableau 2 fournit (col. 2) les premiers termes de la suite de Fibonacci, (col. 3) la suite des nombres de permutations sans point fixe, (col. 4) la suite des nombres de permutations et enfin en (col. 5) le rapport entre (col. 4) et (col. 3).

| $n$      | $f_n$              | $n!$                      | $p(n)$                       | $n!/p(n)$     |
|----------|--------------------|---------------------------|------------------------------|---------------|
|          | Suite de Fibonacci | Permutations              | Permutations sans point fixe | Rapport       |
| 1        | 1                  | 1                         | 0                            | —             |
| 2        | 1                  | 2                         | 1                            | 2             |
| 3        | 2                  | 6                         | 2                            | 3             |
| 4        | 3                  | 24                        | 9                            | 2,666 666 667 |
| 5        | 5                  | 120                       | 44                           | 2,727 272 727 |
| 6        | 8                  | 720                       | 265                          | 2,716 981 132 |
| 7        | 13                 | 5040                      | 1854                         | 2,718 446 602 |
| 8        | 21                 | 40 320                    | 14 833                       | 2,718 263 332 |
| 9        | 34                 | 362 880                   | 133 496                      | 2,718 283 694 |
| 10       | 55                 | 3 628 800                 | 1 334 961                    | 2,718 281 658 |
| 11       | 89                 | 39 916 800                | 14 684 570                   | 2,718 281 843 |
| 12       | 144                | 479 001 600               | 176 214 841                  | 2,718 281 827 |
| 13       | 233                | 6 227 020 800             | 2 290 792 932                | 2,718 281 829 |
| 14       | 377                | 87 178 291 200            | 32 071 101 049               | 2,718 281 828 |
| 15       | 610                | $1,307 67 \times 10^{12}$ | $4,810 67 \times 10^{11}$    | 2,718 281 828 |
| $\vdots$ | $\vdots$           | $\vdots$                  | $\vdots$                     | $\vdots$      |
| 24       | 46 368             | $6,204 48 \times 10^{23}$ | $2,2825 \times 10^{23}$      | 2,718 281 828 |
| 25       | 75 025             | $1,551 12 \times 10^{25}$ | $5,706 26 \times 10^{24}$    | 2,718 281 828 |
| 26       | 121 393            | $4,032 91 \times 10^{26}$ | $1,483 63 \times 10^{26}$    | 2,718 281 828 |

TAB. 2 –

Les valeurs dans la 5<sup>e</sup> colonne invitent à étudier ce rapport.

## 2.4. Une troisième formule : $p(n)$ en fonction de $n$

Partons de la formule du paragraphe 2.3. :

$$p(3) = 1 \times 3 - 1$$

$$p(4) = (1 \times 3 - 1) \times 4 + 1$$

$$p(5) = ((1 \times 3 - 1) \times 4 + 1) \times 5 - 1$$

$$p(6) = (((1 \times 3 - 1) \times 4 + 1) \times 5 - 1) \times 6 + 1$$

$$p(7) = (((((1 \times 3 - 1) \times 4 + 1) \times 5 - 1) \times 6 + 1) \times 7 - 1.$$

Après réduction, nous obtenons successivement :

$$p(4) = 1 \cdot 3 \cdot 4 - 4 + 1$$

$$p(5) = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - 1 \cdot 4 \cdot 5 + 1 \cdot 5 - 1$$

$$p(6) = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 - 1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1 \cdot 5 \cdot 6 - 1 \cdot 6 + 1$$

$$p(7) = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 - 1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + 1 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 - 1 \cdot 6 \cdot 7 + 1 \cdot 7 - 1$$

$$= 7! \left( \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} \right),$$

et en général

$$p(n) = n! \sum_{k=2}^n \left( \frac{(-1)^k}{k!} \right) = n! \sum_{k=0}^n \left( \frac{(-1)^k}{k!} \right).$$

Cette expression correspond à un développement en série de Taylor de  $e^x$  dans lequel on donne à  $x$  la valeur  $-1$ .

Reprenons l'exemple ci-dessus ; à l'aide du logiciel *Derive*, on obtient successivement :

$$7! \cdot [\text{TAYLOR}(\hat{e}^x, x, 0, 7)]$$

$$7! \cdot \left[ \frac{x^7}{7!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!} + 1 \right]$$

$$7! \cdot \left[ \frac{(-1)^7}{5040} + \frac{(-1)^6}{720} + \frac{(-1)^5}{120} + \frac{(-1)^4}{24} + \frac{(-1)^3}{6} + \frac{(-1)^2}{2} + (-1) + 1 \right]$$

$$7! \cdot \left[ \frac{103}{280} \right]$$

1854

On obtient aussi :

$$26! \cdot [\text{TAYLOR}(\hat{e}^x, x, 0, 26)]$$

$$148362637348470135821287825$$

Le nombre de permutations  $p(n)$  d'un ensemble à  $n$  éléments, ne laissant aucun élément fixe, s'obtient avec une bonne approximation, par l'arrondi à l'unité la plus proche du quotient de  $n!$  par  $e = 2,718\,281\,8\dots$ , pour les valeurs de  $n$  supérieures à 2.

Exemples :

| Nb d'éléments | 3    | 4    | 5     | 6      | 7       | 8         | 9          |
|---------------|------|------|-------|--------|---------|-----------|------------|
| Approximation | 2,21 | 8,83 | 44,15 | 264,87 | 1854,11 | 14 832,90 | 133 496,09 |
| Valeur exacte | 2    | 9    | 44    | 265    | 1854    | 14 833    | 133 496    |

Bonne nouvelle pour les décodeurs : le nombre des permutations de l'alphabet sans lettre inchangée vaut moins de 37 % du nombre total des permutations possibles de l'alphabet. Mais il reste considérable :  $1,4836 \times 10^{26}$  au lieu de  $4,0329 \times 10^{26}$ .

## 2.5. La matrice de Fibonacci

Vue d'un point de vue géométrique, dans  $\mathbf{R}^2$ , elle est la composée de la symétrie axiale d'axe  $y = x$  et de direction  $y = -x$ , suivie du cisaillement (axe  $Ox$ ).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elle fournit ainsi les termes de la suite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Ce résultat général donne un terme quelconque de la suite, connaissant son rang. (*Dérive* est utile au calcul de la puissance de la matrice...)

La première formule donnant le nombre de permutations sans point fixe,

$$p(n+1) = (p(n) + p(n-1)) \cdot n,$$

est une variante de celle de Fibonacci : géométriquement, la matrice  $F$  est multipliée par la matrice d'un étirement de rapport  $n$ .

$$\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} n & n \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p(n) \\ p(n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n(p(n) + p(n-1)) \\ p(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(n+1) \\ p(n) \end{pmatrix}.$$

## Bibliographie

- [1] À propos de la machine Enigma et de Alan Turing, voir Math Jeunes n° 100s, 3–6, 2005.
- [2] *Turing and ‘a kind of miracle’ in mathematical logic*, in The Mathematical Gazette, Number 511, March 2004, 1936 Post.
- [3] A. CATTIEUW et P. HEBRARD, *De la mécanique à l’ordinateur*, in Dossier Pour la Science, Juillet–Octobre 2002.
- [4] S. SINGH, *The Code Book*, Ted Smart, London, 1999 ; ISBN 0 00763 574 5.



# Enseignement de la Province de Hainaut

## Région Mons-Borinage

Direction Générale Régionale Mons-Borinage  
065/40.80.80



Haute Ecole Provinciale de Mons-Borinage-Centre  
Catégorie Economique à Mons (065/88.12.28)

Haute Ecole Provinciale de Mons-Borinage-Centre  
Catégorie Paramédicale à Mons (065/22.12.60)

Lycée Technique  
Provincial Richard  
Stiévenart à Hornu  
(065/61.39.40)

Lycée Provincial  
d'Enseignement  
Technique du Hainaut  
à Saint-Ghislain  
(065/71.42.11)

Institut d'Enseignement  
Secondaire Provincial  
à Mons (065/39.93.40)

Institut d'Enseignement  
Secondaire  
Paramédical Provincial  
à Mons (065/32.89.00)

Ecole  
Fondamentale  
Provincial  
Victor Mirguet à  
Mons (065/  
32.05.53)

Centre d'Education et  
de Formation en  
Alternance de l'Athénée  
Provincial Jean  
d'Avesnes à Mons  
(065/40.01.08)

Lycée Provincial Albert  
Libiez à Colfontaine  
(065/61.33.99)

Athénée Provincial  
Jean d'Avesnes  
à Mons  
(065/40.01.01)

Académie des Métiers,  
des Arts et des Sports  
à Mons (065/39.89.79)

Haute Ecole Provinciale de Mons-Borinage-Centre  
Catégorie Pédagogique à Mons (065/32.04.90)

Haute Ecole Provinciale de Mons-Borinage-Centre  
Catégorie Artistique à Saint-Ghislain (065/71.42.11)

Institut Provincial d'Enseignement de Promotion sociale Mons-Formations à Mons (065/35.38.13)

Centre Provincial d'Enseignement de Promotion sociale du Borinage à Hornu (065/76.76.18)

Ecole Industrielle Supérieure Provinciale à Mons (065/39.89.39)

Cours des Métiers d'Arts du Hainaut (065/84.96.32)

Conseiller en informations scolaires à Mons (065/40.80.80)

# La gauche et la droite en géométrie élémentaire

FRANCIS BUEKENHOUT  
ULB, Académie Royale de Belgique

ABSTRACT — The notions relative to the left-right duality emerge with an extraordinary power in several domains over 50 years at least according to my subjective experience. In mathematics, questions regarding orientation are omnipresent. The same holds true in chemistry and in biochemistry where one rather speaks about chirality. These are but two examples. In mathematical education, the orientation of figures remains a great absent. My goal is twofold.

- To illustrate and underline the scientific importance of the subject ;
- To present a theoretic model which is simple, performing and powerful and that ought to catch the attention of all concerned parties.

MOTS CLÉS — Chiralité. Orientation. Déplacement. Retournement. Espace de Klein. Rotation. Vissage. Figure orientée. Figure non orientée. Hélice. Double hélice.

KEYWORDS — Chirality. Orientation. Motion. Reversal. Klein space. Rotation. Screw motion. Oriented figure. Non-oriented figure. Helix. Double helix.

## 1. Introduction

Les notions relatives à la dualité gauche-droite émergent avec une puissance extraordinaire dans divers domaines depuis 50 ans au moins selon mon expérience subjective. Bien entendu, une histoire précise remonterait

---

Adresse de l'auteur : Drève des deux bois 26, B-1490 Court-Saint-Étienne ; courriel : [fbueken@ulb.ac.be](mailto:fbueken@ulb.ac.be).

notamment aux travaux fondamentaux du début de carrière de Louis Pasteur au XIX<sup>e</sup> siècle et, en théorie des groupes, on peut se référer par exemple à Jordan (1870). Mon but dans ce qui précède est d'exprimer une explosion, pas une naissance.

En mathématiques pures et appliquées, les questions d'orientation sont omniprésentes. Il en va de même en chimie et en biochimie où on parle plutôt de chiralité.

En éducation mathématique, ces questions sont absentes !

## 1.1. Biochimie

Un témoignage d'omniprésence scientifique. J'ai sous les yeux un rapport du BACAS (Belgian Academy Council of Applied Science), constitué de sommités de la science et de l'industrie belges [1]. Une demi-page est consacrée à l'explication de « Chiralité et biocatalyse ». Je cite.

La chiralité signifie qu'une substance chimique existe sous deux formes, i.e. une « gauche » et une forme « droite ». Sans aller dans trop de détail, celles-ci peuvent être comparées aux mains humaines réparties en mains gauches et droites qui sont identiques dans tous les autres aspects. Ceci s'applique aussi à certaines molécules chimiques de sorte que leur action biologique peut différer fortement selon qu'elles sont « gauche » ou « droite ». Un exemple conventionnel de cette chiralité de molécules se trouve dans le médicament « softenon ». Ce médicament fut utilisé dans les années 1960 pour lutter contre les vomissements de femmes enceintes. Malheureusement, l'autre forme chirale également présente dans le médicament a provoqué des dommages sérieux à la naissance (ce qu'on a appelé les bébés softenon). Le monde biologique est fondamentalement chiral de sorte que la chiralité des molécules est d'importance majeure pour leur action biologique.

Typiquement, les catalyses chimiques ne peuvent pas distinguer ces formes chirales et elles catalysent la réaction chimique des deux formes. Spécialement dans le cas de synthèse de substances actives qui interviennent dans le monde biologique comme les médicaments et les pesticides, il est typique qu'une seule forme soit active. Au mieux, l'autre forme est inoffensive et peut être considérée comme une simple perte mais dans le pire

des cas l'autre forme peut être très nocive comme il a été tristement démontré par le cas du softenon. Dans ce cas, la forme nocive doit être séparée ce qui n'est pas facile du tout au plan technologique. De plus, ceci conduit à une réduction considérable de l'efficacité et génère des déchets dangereux.

La biocatalyse utilise des enzymes, des catalyses d'origine biologique qui peuvent manier de telles réactions avec beaucoup plus d'efficacité. Elles sont presque toujours sélectives en chiralité et synthétisent une seule des deux formes. Il y a une forte poussée pour utiliser de telles molécules spécialement dans les industries pharmaceutiques et agro-chimiques. De ce fait, il n'est pas surprenant que la biocatalyse possède à présent le niveau de pénétration le plus élevé dans la synthèse chimique de médicaments, de produits agro-chimiques et de produits intermédiaires.

## **1.2. La gauche et la droite, tout de même biologiquement indiscernables ?!**

Les questions de chiralité au sens mathématique et scientifique émergent de la symétrie bilatérale de notre corps. Cette symétrie est fondamentale et porte sur notre structure. Celle-ci se présente de manière identique de deux points de vue différents. La gauche et la droite sont à cet égard indiscernables.

Mais nous les discernons tout de même. Pourquoi ? Parce que la symétrie de la gauche et de la droite n'est pas totale. Elle est brisée par des « détails » comme :

- Le système circulatoire,
- La structure interne du cerveau,
- La forme de la molécule d'ADN qui est le constituant génétique de notre identité personnelle.

Un enfant met des années à distinguer la gauche et la droite. Bon nombre d'adultes parviennent très difficilement à cette distinction. Ceci n'est-il pas la meilleure preuve de l'indiscernabilité de fond ? Je ne poursuis pas plus longuement les développements biologiques et psychologiques. Il existe une « bible » sur le sujet dont j'ai eu connaissance par Charlotte Bouckaert. Ce livre merveilleux est dû au psychologue McManus [5]. Vous y découvrirez que le sujet a été abordé sérieusement par Emmanuel Kant au XVIII<sup>e</sup> siècle.



Vers 1830 un jeune philosophe se plaignait du fait qu'on ne pouvait toujours pas définir la gauche et la droite. Il s'agissait de... Karl Marx.

### 1.3. Pour une mathématisation

En géométrie élémentaire classique, la gauche et la droite sont indiscernables en raison d'automorphismes qui portent le nom de miroir ou réflexion ou symétrie bilatérale ou symétrie orthogonale (ceci en Belgique). Ces automorphismes sont le modèle mathématique simplifié de la symétrie du corps humain et d'autres êtres biologiques ou non.

Mon but n'est pas historique et n'est pas didactique. Mon but est de présenter un *modèle théorique simple et performant* qui devrait s'imposer à l'attention des mathématiciens, physiciens, chimistes, biologistes et j'en passe. Sans oublier les amateurs d'art et les didacticiens.

### 1.4. De Paul Libois à Jean Dieudonné

Dans son enseignement que j'ai suivi à partir de 1956, d'abord comme étudiant puis comme assistant, Paul Libois insistait souvent sur les mains, sur l'orientation et sur les transformations-automorphismes qui conservent celle-ci.

J'étais imbibé de ces notions. Les déplacements ou isométries directes voire positives, l'orientation du plan, de l'espace, de la sphère, de la droite projective, du plan conforme et bien d'autres situations analogues faisaient partie de mes habitudes quotidiennes. J'éprouvais néanmoins un malaise dû à mon incapacité de définition générale d'un concept.

Ce terrain fut fécondé par un texte de Jean Dieudonné dont je ne retrouve pas la référence. Il y avait une petite phrase éclairante et surprenante que je reproduis en substance.

Au fond, l'orientation n'est rien d'autre que la donnée d'un groupe muni d'un sous-groupe d'indice deux.

Elle mettait fin au malaise. Je m'en suis emparé et elle m'a toujours inspiré depuis.

Dans mon cours de première candidature de 1971 partagé avec Jean Doyen à partir de 1972, cette idée est développée avec insistance dans le chapitre « Ensembles structurés et groupes de symétrie » [2]. Il y avait aussi

une belle section sur l'orientation dans le chapitre « Espaces euclidiens » [3]. Jean Doyen y avait introduit des exercices de grande classe inspirés de la chronique tenue par Martin Gardner dans le *Scientific American*. Cette section a disparu dans des éditions ultérieures. Je n'en suis pas fier. La matière fut reprise pour un cours du secondaire de cinquième que j'ai mis au point avec Monique Frédérickx en 1986 et qui constitue un compagnon au présent texte [4]. Cette matière a été constamment enseignée par Monique Frédérickx depuis 1986 avec le plus grand succès. Ce fut un incitant essentiel pour le présent travail.

Aujourd'hui, je constate que tout cela n'est pas vraiment connu des nombreux intéressés. J'ai raconté cette histoire à Charlotte Bouckaert qui s'est montrée très intéressée et qui m'a encouragé à persévérer.

Pour en revenir à l'essentiel, mon exposé se permet de modifier quelque peu la phrase de Jean Dieudonné. En vérité, mes bien chers frères et sœurs de la gauche-droite,

L'orientation n'est rien d'autre qu'un groupe de transformations muni d'un sous-groupe d'indice deux.

Tout cela est proche du mode de pensée de Bourbaki ce qui n'est pas étonnant quand on se souvient de l'appartenance de Jean Dieudonné. Mon point de vue se situe également dans la tradition du *Programme d'Erlangen* de Felix Klein.

## 1.5. Remerciements

Je remercie J. Chris Fisher (University of Regina, Canada) pour le commentaire suivant sur mon texte de 2004 :

I very much liked your essay on “right and left”. It was especially nice to see for once a clear explanation. I'm among those who have trouble with the notion of chirality — not the concept so much as the terminology! Among other things, there is something psychologically wrong with the word: it's essentially a negative property (= not symmetric) so that achiral is a double negative. In fact these words have the opposite meaning to what I had guessed the first time I heard them used! Moreover, it's not easy to learn the definition because dictionaries don't seem to get the details quite right. The Oxford English Dictionary presents Lord Kelvin's original 1894 definition, which provides

an example of my point (which, of course, was *your* point): according to Kelvin, *chiral* means “not superposable on its mirror image”. The irony is that the Greek root of the word means “hand”, but when we clap we superpose one hand on its mirror image! Of course, they might have had a different way of clapping in the 19th century.

Je tiens aussi à remercier Paul van Praag pour de nombreuses conversations stimulantes au fil des années et quelques occasions de développer les idées présentées ici. Je lui dois de nombreuses corrections de mon texte initial de 2004. Je remercie également Christian Michaux qui a bien voulu m’inviter et m’accueillir en 2004 pour des leçons dans le cadre de son cours de Didactique de Mathématiques à l’Université de Mons-Hainaut.

## 2. Sous-groupes d’indice deux

Je veux préparer le terrain géométrique en le quittant d’abord. Je m’adresse à des personnes habituées à la notion de groupe et à celle de sous-groupe. Soit  $G$  un groupe dont l’opération est notée de manière multiplicative. Pensons aux isométries de l’espace ou aux similitudes de l’espace ou aux affinités du plan ou... Soit  $G_+$  un sous-groupe de  $G$ . Pensons aux déplacements de l’espace ou aux similitudes positives de l’espace ou aux affinités directes du plan.

Nous y pensons pour nourrir notre intuition mais, foi de Dieudonné, tout ce qu’il faut connaître à cet instant est la notion de groupe et de sous-groupe. Ici, le sous-groupe n’est pas constitué de tous les éléments de  $G$  qui conservent telle ou telle chose. Le sous-groupe  $G_+$  est supposé connu. Permettez-moi de dire que ses éléments sont les « déplacements ». Et *d’indice deux* ? Nous devons considérer l’ensemble  $G_-$  des éléments de  $G$  qui ne sont pas des « déplacements ». Nous les appelons des « retournements ». Voici la définition : pour que  $G_+$  soit appelé *d’indice deux*, il faut et il suffit que le produit de tout « retournement » et de tout « retournement » soit un « déplacement », et qu’il existe un « retournement » (ou encore que  $G_-$  soit non vide).

EXERCICES :

1. Le produit d’un « déplacement » et d’un « retournement » est un « retournement ». Et de même pour le produit d’un « retournement » et d’un « déplacement ».

2. Le produit d'un nombre pair de « retournements » est un « déplacement ». Le produit d'un nombre impair de « retournements » est un « retournement ».
3. La réciproque d'un « retournement » est un « retournement ».

Remarquons que la donnée d'un groupe et d'un sous-groupe d'indice deux est équivalente à celle d'un groupe et d'un homomorphisme sur le groupe d'ordre deux. Chaque élément du groupe est muni d'un label prenant deux valeurs qui sont des noms ou des symboles et cette labélisation obéit à une règle de multiplication que nous avons énoncée plus haut à l'aide des labels « déplacement » et « retournement ». Un conseil. Chaque fois que vous rencontrez un groupe, demandez vous s'il a un ou plusieurs sous-groupes d'indice deux. Pour chacun de ceux-ci, il y a de l'orientation dans l'air.

Un bel exemple est le groupe d'ordre 48 des symétries du cube. Il a trois sous-groupes d'indice deux. Un autre exemple est le groupe d'ordre 8 du carré qui possède lui aussi trois sous-groupes d'ordre deux. Examiner la signification chirale de ces six exemples est un thème que je recommande.

**Proposition 1.** *Soit  $r$  un « retournement ». Alors tout « retournement » est dans  $rG_+$  (et dans  $G_+r$ ).*

DÉMONSTRATION. Soit  $s$  un « retournement ». Alors  $sr^{-1}$  est un « déplacement »  $d$  dans  $G_+$  et  $s = dr$  donc  $s$  est dans  $G_+r$ . CQFD

### 3. Espace de Klein

Pour nourrir l'intuition partons d'un espace  $E$  qui peut être « le » plan, la sphère, le cylindre illimité ou tout autre objet favori. Nous supposons connues les symétries ou automorphismes de  $E$  qui constituent un groupe  $G$ . Dans  $E$ , nous distinguons une foule de figures, foule variable selon notre expérience et nos goûts du moment. Ayant une figure  $f$ , nous voyons sa famille  $G(f) = F$  constituée de toutes les figures « pareilles » à  $f$ , ou « semblables » ou « isométriques ». Ces derniers qualificatifs à vrai dire très ambigus s'expliquent simplement et clairement quand on veut bien faire appel à  $G$ . Une figure  $f$  et une autre  $f'$  ont la même famille si et seulement s'il existe un élément  $g$  de  $G$  tel que  $g(f) = f'$ . En mathématique, on utilise plutôt le terme d'*orbite* que celui de famille. Si  $F$  désigne la famille-orbite de  $f$ , on dit que  $G$  est *transitif* sur  $F$ . Il faudrait des petits rappels ou compléments sur les orbites.

L'exemple qui nous importe le plus est celui de l'espace euclidien et de son groupe d'isométries. Nous y considérons une main géométrique  $m$  expliquée puis définie comme drapeau. La famille ou orbite de  $m$  est constituée de toutes les répliques isométriques de  $m$ , sans distinction de gauche ou de droite.

Franchissons un pas dans l'abstraction, la précision et la modélisation. Oublions l'espace  $E$  ci-dessus qui est demeuré très vague et certainement pas facile à préciser. J'appelle *espace de Klein* un ensemble non vide  $F$  d'éléments appelés *figures*, muni d'un groupe  $G$  de transformations de  $F$ . Chacune des orbites de  $G$  dans  $F$  est une famille de figures.

Intuitivement, nous pouvons penser à la famille des points, à celle des sphères, à celle des drapeaux, à celle des cubes, etc. Les éléments de  $G$  sont appelés *automorphismes* ou *symétries*. Pour l'intuition de ce qui suit, je préfère les appeler isométries.

## 4. Espace de Klein orientable

Soit  $E = (F, G)$  un espace de Klein et soit  $G_+$  un sous-groupe d'indice deux de  $G$  à propos duquel nous parlons de « déplacements » et de « retournements » comme auparavant. Nous dirons que le triple  $E = (F, G, G_+)$  est un *espace de Klein orientable*.

Considérons une orbite  $O$  de  $G$ . Deux situations se présentent. La première situation est le cas où  $G_+$  est transitif sur  $O$ . Dans ce cas, nous disons que les membres de  $O$  sont des figures *non orientées*. Des exemples ? Notre stock d'exemples classiques est bien pourvu. Si  $E$  représente l'espace euclidien,  $O$  pourrait être l'ensemble des points, l'ensemble des cylindres illimités, l'ensemble des dodécaèdres réguliers, ..., en supposant que  $G$  soit le groupe des similitudes et  $G_+$  le groupe des similitudes directes.

**Théorème 1.** *Pour toute figure non orientée  $f$  il existe un « retournement » conservant  $f$ .*

DÉMONSTRATION. Il existe un « retournement »  $r$ . Soit  $r(f)$ . Il existe un « déplacement »  $d$  tel que  $d(f) = r(f)$ . La composée  $r^{-1}d$  est un « retournement » et il conserve  $f$ . CQFD

La deuxième situation est celle où  $G_+$  n'est pas transitif sur  $O$ . La distinction gauche-droite peut naître. Nous dirons que les membres de  $O$  sont des figures *orientées*.

**Théorème 2.** *Si  $O$  est une famille-orbite de figures orientées, le groupe  $G_+$  des « déplacements » possède deux orbites dans  $O$ .*

DÉMONSTRATION. Comme  $G_+$  n'est pas transitif sur  $O$ , il possède au moins deux orbites  $M$  et  $N$ . Il existe  $m$  dans  $M$  et  $n$  dans  $N$ . Il existe  $g$  dans  $G$  tel que  $g(m) = n$ . Il est exclu que  $g$  soit un « déplacement ». Donc  $g$  est un « retournement ». Supposons par l'absurde qu'il existe une troisième orbite de  $G_+$ , soit  $P$ , et considérons une figure  $p$  de  $P$ . Il existe  $h$  dans  $G$  tel que  $h(p) = m$ . Le raisonnement fait pour  $g$  s'applique à  $h$ . Donc  $h$  est un « retournement ». La composée  $gh$  est un « déplacement » et celui-ci transforme  $p$  en  $n$ . De ce fait  $p$  et  $n$  sont à la fois dans  $P$  et  $N$  donc  $P = N$ . CQFD

**Théorème 3.** *Si  $O$  est une famille-orbite de figures orientées et si  $M, N$  sont les orbites de  $G_+$  dans  $O$ , tout « retournement » transforme  $M$  en  $N$  et  $N$  en  $M$ .*

DÉMONSTRATION. Il existe un « retournement »  $r$  qui transforme  $M$  en  $N$ . Par la proposition 1, tout « retournement » est dans  $rG_+$ . Dès lors, tout « retournement » transforme  $M$  en  $N$ . CQFD

**Théorème 4.** *Une figure  $f$  est non orientée si et seulement s'il existe un « retournement » qui conserve  $f$ .*

DÉMONSTRATION. Si  $f$  est non orientée, le théorème 1 s'applique. Si  $f$  est orientée,  $f$  est par exemple dans l'orbite  $M$  de  $G_+$  citée dans les théorèmes 2 et 3. Par le théorème 3,  $f$  n'est conservée par aucun « retournement ». CQFD

## 5. Commentaires

1. Dans la situation formalisée dans la section 4, les deux orbites  $M$  et  $N$  incarnent une famille de figures orientées réparties en forme gauche et forme droite. La gauche et la droite ainsi modélisées sont indiscernables. Étant donné une de ces figures dans l'espace de Klein orientable supposé connu et rien d'autre, rien ne permet de dire qu'elle est gauche ou qu'elle est droite. Il est permis de décider qu'elle est orientée en appliquant le théorème 4.

Étant donné deux figures orientées d'une même famille et rien d'autre, il devient possible de détecter qu'elles ont une même orientation ou la même chiralité ou qu'elles ont une orientation (chiralité) différente. Mais rien ne distingue une gauche d'une droite ; à vrai dire, ces qualificatifs demeurent vides de sens. Si le qualificatif « gauche » est attribué à une figure  $m$  dans  $M$ , chaque figure de sa famille est aussitôt affublée

du qualificatif « gauche » (figures dans  $M$ ) ou du qualificatif « droite » (figures dans  $N$ ).

2. Une figure orientée est dite chirale et réciproquement. Elle n'est jamais dite orientable : ne confondons pas le passé et le futur. Une figure non orientée est dite achirale. En fait, elle est orientable. Je vais y revenir proprement.
3. La théorie des espaces de Klein orientables est particulièrement souple. Elle convient notamment aux espaces euclidiens de toutes dimensions. Cette théorie contribue entre autres à « voir » en dimension quatre et plus.
4. Je veux insister sur le caractère relatif de la chiralité ou de l'achiralité d'une figure  $f$ . Cette propriété dépend certes de la figure mais aussi de l'espace de Klein  $(F, G)$  auquel elle appartient. Pour être précis, c'est le triple  $(F, G, f)$  qui est orienté ou non orienté et pas le singleton  $\{f\}$ .  
Un exemple plus concret. Dans le plan euclidien considéré comme espace de Klein orientable avec ses isométries et ses déplacements, il y a beaucoup de figures orientées notamment les triangles scalènes. Si nous considérons ces figures planes dans un autre espace de Klein qui est l'espace euclidien de dimension trois avec ses isométries et ses déplacements, chacune d'elles est non orientée car conservée banalement par un retournement à savoir la réflexion dont l'axe est son plan. Cet exemple mérite une extension : toute figure orientée dans l'espace euclidien de dimension trois est non orientée dans l'espace euclidien de dimension quatre et l'explication est très simple avec notre approche.
5. Le théorème 4 permet de comprendre un fait essentiel : la très vaste majorité des figures de l'espace euclidien sont orientées. Dans l'enseignement et dans la vie courante, nous nous attachons le plus souvent à des figures non orientées. C'est un autre reflet de la symétrie de fond de notre corps.

## 6. Un défaut des espaces de Klein et sa correction

Reprenons un espace de Klein orientable  $E = (F, G, G_+)$  et l'idée que toute figure  $f$  non orientée est orientable. Pour en faire un théorème 5, il faudrait disposer d'un triple  $(F_f, G_f, G_{+f})$  déterminé par  $E$  et  $f$  qui soit un espace de Klein orientable. Le choix de  $G_f$  s'impose : c'est le sous-groupe de

$G$  constitué par tous les éléments de  $G$  qui conservent  $f$  ou encore le stabilisateur de  $f$  dans  $G$ . Le choix de  $G_{+f}$  s'impose également : c'est l'intersection de  $G_+$  et de  $G_f$  ou encore, l'ensemble des « déplacements » de  $E$  qui conservent  $f$ . Ce sous-groupe est-il d'indice deux dans  $G_f$  ? Oui ! Du fait que  $f$  est non orientée il existe un « retournement » dans  $G_f$  (théorème 4). Il est clair que le produit de deux « retournements » de  $G_f$  est un « déplacement » de  $G_f$ . Tout semble donc limpide. Le seul ennui de fait est de définir  $F_f$ . Dans notre approche formalisée,  $f$  est un élément d'un ensemble  $F$ . Formellement, rien ne permet de parler des figures de cette figure  $f$ . Nous ne disposons pas d'une notion d'inclusion de figures.

La correction n'est pas difficile et coule de source. Au moment de définir un espace de Klein, nous demanderons que  $F$  soit un ensemble ordonné ou encore que  $E$  est un triple  $E = (F, \leq, G)$  où  $(F, \leq)$  est un ensemble ordonné et  $G$  est un groupe d'automorphismes de  $(F, \leq)$ . Je propose de dire que cette notion est un *espace de Klein à inclusion*. La suite de la théorie développée dans la section 4 se recopie mot pour mot. Nous avons une notion d'espace de Klein orientable à inclusion. Cette fois, la définition de  $F_f$  coule de source aussi : c'est l'ensemble des  $e$  appartenant à  $F$  tels que  $e \leq f$ . Et nous avons le théorème 5.

**Théorème 5.** *Soit  $E = (F, \leq, G, G_+)$  un espace de Klein orientable à inclusion et  $f$  une figure non orientée de  $E$ . Alors  $E_f = (F_f, \leq_f, G_f, G_{+f})$  est un espace de Klein orientable à inclusion.*

La démonstration a été donnée avant l'énoncé et par bribes. Il aurait fallu expliquer que  $G_f$  est un groupe d'automorphismes de  $(F_f, \leq_f)$ . Il y a là une nouvelle faille sérieuse exigeant une nouvelle adaptation. En effet, il se pourrait que deux éléments distincts de  $G$  conservant  $f$  induisent le même automorphisme dans  $F_f$ . Deux suivis possibles : ajout d'une hypothèse dans l'énoncé pour empêcher le défaut ou modification de la notion d'espace de Klein. Je ne développe pas. Ce n'est pas très difficile si on adopte la première voie.

## 7. Variations

Reprenons la notion d'espace de Klein orientable constitué d'un triple  $(F, G, G_+)$ . Ces trois composantes sont des « variables » et la géométrie élémentaire a besoin de leurs « variantes ».



### 7.1. L'ensemble $F$ des figures. Figures à antennes

Un des buts de l'enseignement devrait être d'enrichir sans cesse cet ensemble. C'est le plus souvent le contraire qui se produit. Dès qu'on le permet, l'imagination naturelle de l'être humain donne lieu à des créations de figures. Donnez une forme fixée comme un tétraèdre régulier. Autorisez l'assemblage de tétraèdres face à face et vous êtes conduit à un déluge de formes. Dans notre modèle de théorie, toutes les figures sont traitées sur un pied d'égalité. C'est la réalité simplifiée. En vérité, toutes les figures vraies, celles de votre espace favori, n'ont pas le même statut d'importance. Ainsi, le rectangle importe plus que le carré dans la vie courante. Le carré importe plus en mathématique : il est le plus symétrique des rectangles. Une idée créative de figures est d'agrandir, d'étendre des figures existantes connues. C'est une approche de conquête mathématique d'un espace. On pousse la figure dans des retranchements qui ne sont jamais les derniers. Prenons un cube. En l'un de ses huit sommets, je considère un segment dirigé vers l'extérieur du cube. C'est ce que j'appelle un cube avec antenne. Cette figure est-elle orientée ? Chacun voit bien que j'aurais pu être plus précis dans la description du cube avec antenne. La figure est orientée pour une antenne quelconque. La figure est non orientée si et seulement si l'antenne se situe dans un plan de symétrie du cube. Pouvez-vous le prouver ?

### 7.2. Anti-horlogique

Tout est-il figure ? C'est une question provocante. Je ne dis pas oui. Une question plus innocente : toute rotation est-elle une figure ? Une rotation  $r$  est un ensemble de couples de points et si j'effectue une transformation  $g$ , cet ensemble de couples de points est transformé en un ensemble  $g(r)$  de couples de points. Si  $g$  est une isométrie (et même si  $g$  est une similitude), nous pouvons nous persuader que  $g(r)$  est une rotation. Remarquons au passage le théorème :  $g(r) = grg^{-1}$  (lire de droite à gauche).

Ce type de démarche est capital en théorie élémentaire des groupes et même en géométrie car il conduit à une classification objective des transformations les plus courantes. Une transformation telle que  $r$  possède un double visage : elle agit sur autrui et elle subit une action. En quoi ceci importe-t-il ? Une question intéressante surgit : la rotation est-elle une figure orientée ? Dans le plan, toute rotation  $r$  qui n'est pas d'ordre deux ou un, est orientée. Ceci se démontre rigoureusement. Vous prouvez qu'il n'y a pas de retournement  $g$  du plan tel que  $g(r) = r$ . Vous constaterez que

la dernière égalité revient à écrire  $gr = rg$ . Et que  $g$  doit fixer le centre de  $r$ . Etc. On est amené à prouver que si  $r$  est bien une figure (le plus dur à accepter), alors la famille de  $r$  consiste en toutes les rotations de même angle  $a$  que  $r$ . Ensuite, cette famille se décompose en deux orbites  $M$  et  $N$  sous l'action du groupe des déplacements. Nous obtenons une explication purement mathématique du fait qu'il y a des rotations dans deux sens, comme on dit. Prenez un manuel parlant des angles : il est douteux qu'il explique « horlogique » ou « antihorlogique » sans subterfuge physique voire psychologique.

### 7.3. Anti-horlogique dans l'espace

Et dans l'espace ? Plaçons-nous dans l'espace euclidien  $E$  de dimension trois. Considérons la rotation plane  $r$  dans cet espace. Comme nous l'avons vu avant, toute figure plane est non orientée dans  $E$ . Donc, dans  $E$  il n'y a pas d'« antihorlogique » semble-t-il ? On s'accroche. Il y a peut-être une faille dans la présente démarche. Prenons un être plus simple que la rotation plane : un angle orienté déterminé par un couple de demi-droites de même origine (non alignées). Observez l'usage du mot « orienté » dans ce contexte. Dans l'espace, cet angle est une figure non orientée ! On se dit que ça doit se « réparer ».

On considère cette fois, dans  $E$ , une rotation  $r$  de  $E$  ayant une droite de points fixes  $A$ . Traitons-la comme une figure, c'est-à-dire un ensemble de couples de points. Nous voyons, après l'effort requis, que  $r$  est non orientée. Une symétrie  $s$  d'axe plan perpendiculaire à  $A$  transforme  $r$  en elle même. Un transparent peut être de grande utilité. On regarde la rotation plane au-dessus puis en-dessous ce qui revient à « retourner » (au sens du plan...) la feuille.

Bref, dans l'espace  $E$ , tourner à gauche ou tourner à droite n'a, c'est le cas de le dire, pas de sens. Pourtant nous le faisons et souvent à bon escient. C'est qu'il intervient un repère, peut-être un plan comme en ville et sûrement plus encore, notre corps-cerveau longuement éduqué pour distinguer la gauche et la droite. La figure constituée par la rotation *et* par notre corps est orientée. Une piste mathématique intéressante pour exprimer le constat précédent est d'équiper l'axe de rotation  $A$  d'une orientation interne à cet axe, (une translation, une flèche). Alors,  $s$  ne peut plus agir. On se persuade qu'aucun retournement ne peut conserver  $r$  augmenté de la flèche sur  $A$ . Cette figure est orientée et il naît deux orbites  $M$  et  $N$

comme avant. Mais,  $M$  et  $N$  demeurent indiscernables. Remarquons au passage que la « rotation plus flèche » est une notion indispensable à la compréhension des rudiments de l'électromagnétisme et qu'il appartient à la géométrie de préciser cette notion. Avec ou sans l'aide heuristique du bonhomme d'Ampère.

En conclusion de cette section, il convient de porter un regard critique sur l'orientation de rotations dans l'espace euclidien de dimension trois.

## 7.4. Hélice

Voici une courbe d'importance majeure et qui ne possède pas de nom incontesté dans la culture générale. On parle de colimaçon, de spirale. Le terme « hélice » est incontesté en mathématique. Comment décrire cette courbe sans équation et surtout sans geste du bras tenant lieu de discours ? Quelques images ? Vue de haut ? De profil ? Faut-il une construction ou une définition ? Ce n'est pas facile.

Cette courbe est en quelque sorte un amalgame très précis du cercle et de la droite. Mais encore ? Dans ma foi, il faut introduire une notion de « groupe à un paramètre » et une orbite de celui-ci. Dans ma foi, la droite est une orbite de groupe de translations à un paramètre et le cercle est une orbite de groupe de rotations à un paramètre. Ensuite, l'hélice est une orbite de groupe à un paramètre de vissages. L'ennui est que je ne dispose pas d'une définition de groupe à un paramètre qui soit élémentaire et qui me donne satisfaction.

Je me borne donc à montrer des hélices pour des personnes qui n'y sont pas ou guère habituées. Ensuite, je peux donner une construction plus mathématique. Pour des personnes qui sont rompues à ce langage, le plus rapide est de donner les équations paramétriques de l'hélice. Le plus souvent, on ne donne pas son groupe dans ce contexte mais c'est facile à faire.

Tout ceci touche à une des questions les plus délicates de la géométrie scolaire : l'enroulement de la droite réelle sur le cercle. À mon sens, et à la suite d'un didacticien du Freudenthal Instituut dont le nom m'échappe à cet instant, il est didactiquement judicieux de voir d'abord le cercle  $C$  bien sûr, puis l'hélice « suspendue » au-dessus de  $C$ . Et puis, viennent l'enroulement de la droite réelle sur  $C$ , les fonctions trigonométriques, la mesure des angles. . . Je ne développe pas ce thème qui m'écarte de mon sujet. Quel est le groupe  $H$  de l'hélice ? D'abord, observons que l'hélice peut être orientée

de deux manières comme la droite. Un élément du groupe conserve ces deux « sens » ou les renverse, les échange. Les éléments qui conservent chaque sens constituent un sous-groupe  $H_+$  qui est strictement transitif sur les points de l'hélice. Ce sont des vissages comprenant des translations. Ce groupe est isomorphe au groupe additif des réels. Il est recommandé de visualiser cet isomorphisme en appliquant les translations sur les nombres entiers. Ce groupe est d'indice deux dans  $H$ . Quels sont les éléments qui jouent le rôle de « retournements » ? Ce sont des déplacements de l'espace ! Si  $p$  est un point de l'hélice, considérons la perpendiculaire  $P$  à l'axe de l'hélice passant par  $p$ . Le demi-tour d'axe  $P$  est une rotation qui conserve l'hélice. Nous l'observons. Nous ne le démontrons pas, faute d'avoir défini rigoureusement l'hélice. Mais c'est simple si on dispose des équations paramétriques. Il n'est pas difficile de prouver que  $H$  ne contient aucun autre élément que les vissages et translations conservant chaque sens et les demi-tours qui renversent le sens. En résumé, l'hélice est une figure chirale.

## 7.5. Double hélice

La double hélice est-elle chirale ? On le dit. Comment s'en convaincre ? Partons d'une hélice  $L$  et de son axe  $A$ . Le demi-tour (rotation)  $r$  d'axe  $A$  transforme  $L$  en une hélice  $K$ . La double hélice est la réunion de  $L$  et  $K$ . Quel en est le groupe ? Observons physiquement que  $K$  est en quelque sorte le « milieu » de  $L$  et réciproquement. Le groupe  $H$  obtenu comme groupe de l'hélice  $L$  est également le groupe de  $K$ . Il est d'indice deux dans le groupe  $2H$  de la double hélice. Les éléments de  $2H$  qui échangent  $L$  et  $K$  sont ceux de la classe gauche  $rH$ . Il y a des vissages et des translations. Il y a des demi-tours qui sont les produits de  $r$  et des demi-tours conservant  $L$ . En fin de compte, le groupe  $2H$  de la double hélice ne contient aucun retournement de l'espace. Donc, la double hélice est une figure orientée, chirale.

## 7.6. Et un vissage ?

Considérons un déplacement de l'espace qui est un vissage  $v = rt = tr$  où  $t$  est une translation non identique et  $r$  une rotation non identique d'axe  $A$  invariant par  $t$ . La droite  $A$  est conservée par  $v$ . C'est la seule (prouvez-le). Sur  $A$ , le vissage induit une translation qui est  $t$ . Le vissage  $v$  est-il une figure orientée ou non ? Considérons un retournement —hypothétique—  $h$  de l'espace qui conserve  $v$ . Alors  $h$  conserve  $A$ . De plus,  $h$  conserve  $t$ . Donc

$h$  conserve  $r$ . En raison de la conservation de  $r$ , nos méthodes permettent de montrer que  $h$  est la composée d'une rotation  $q$  d'axe  $A$  et d'une symétrie bilatérale  $s$  d'axe perpendiculaire à  $A$ . Comme  $q$  conserve  $r$ ,  $t$  et  $v$ , on voit que  $s$  conserve  $r$  et  $v$ . Alors  $s$  conserve  $t$ . Ceci est contradictoire. Donc aucun retournement  $h$  ne conserve  $v$ . En résumé, tout vissage  $v$  est orienté.

Nous avons expliqué un des faits les plus mals connus de la chiralité spatiale : une rotation est non orientée mais un vissage est orienté.

## 8. Des déplacements aux similitudes et aux affinités

Un défaut du modèle élaboré est d'être lié à un seul groupe. Dans la réalité de la géométrie nous voulons certainement expliquer les formes gauche et droite d'une famille de figures isométriques. Mais, en outre, nous aimerions être en mesure de comparer des figures semblables.

### 8.1. Similitudes

Une approche modélisée du besoin précédent est de partir des isométries et déplacements comme ci-dessus et d'y substituer ensuite un groupe plus grand que j'appelle groupe  $H$  des « similitudes » et qui est accompagné d'un sous-groupe d'indice deux,  $H_+$ , dont les éléments sont appelés « similitudes positives » de telle sorte que  $G$  soit sous-groupe de  $H$  et que  $G_+$  soit l'intersection de  $G$  et  $H_+$ .

J'ai sous-entendu que l'ensemble  $F$  des figures demeure le même, c'est-à-dire que  $H$  est un groupe de transformations de  $F$ . Bien entendu, pour une figure  $f$  la famille de  $f$  pourrait devenir plus grande sous l'action de  $H$  qu'elle ne l'était sous l'action de  $G$ . Il faut donc pousser cette analyse plus loin en imaginant deux familles pour  $f$ , que chacune d'elles se décompose en deux sous l'action de  $G_+$  et en deux sous l'action de  $H_+$  et que le tout ait une cohérence non précisée à cet instant.

### 8.2. Affinités

Reprenons le cas de l'espace euclidien en supposant  $F$  connu de même que le groupe  $G$  des isométries et le groupe  $G_+$  des déplacements. Suppo-

sons connu également le groupe  $H$  des similitudes qui n'est autre que le groupe des automorphismes de l'espace de Klein  $(F, G, G_+)$ . Il y a des figures orientées, des éléments de  $F$  qui ont une particularité remarquable : celle d'avoir exactement la même orbite-famille sous l'action de  $G$  et sous celle de  $H$ .

Des exemples sont les drapeaux constitués d'un point  $p$ , d'une demi-droite  $D$  d'origine  $p$ , d'un demi-plan  $P$  de bord contenant  $D$  et d'un demi-espace  $S$  de bord contenant  $P$ . Un autre exemple est le trièdre orthogonal ordonné constitué de trois demi-droites de même origine deux à deux perpendiculaires. Ces figures méritent le qualificatif de *basique*. Les deux exemples que je viens de donner ont une propriété supplémentaire (de « rigidité ») que je ne veux pas exploiter ici mais que j'énonce. Si  $f$  est une telle figure, toute similitude qui conserve  $f$  est l'identité. Si nous connaissons  $(F, G, G_+)$  ainsi que les orbites  $M$  et  $N$  de  $f$  sous l'action de  $G_+$  et  $H$ , nous maîtrisons toute la chiralité correspondant à  $H$ . En effet, nous pouvons définir une similitude positive comme une similitude conservant  $M$  et  $N$ . Ensuite, nous pouvons démontrer un « théorème 6 » à savoir que les similitudes positives constituent un sous-groupe  $H_+$  d'indice deux de  $H$ . Dans ce cas, l'espace de Klein  $(F, G, G_+)$  détermine l'espace de Klein  $(F, H, H_+)$ .

Mieux encore : si  $F$  se réduit aux drapeaux et à leurs constituants : points, demi-droites, demi-plans, demi-espaces et à leurs inclusions, le groupe des automorphismes de cette structure est bien plus grand que le groupe des similitudes. C'est le groupe des affinités. Dès lors, nous contrôlons également les affinités positives et l'orientation affine.

Nous voyons que des notions « basiques » incluant les drapeaux, les déplacements et les similitudes permettent la définition et le contrôle de la géométrie affine et de son orientation. Elles permettent aussi, mais c'est une autre histoire, le contrôle sur la géométrie euclidienne, sur les homothéties positives et négatives, sur la géométrie des nombres réels et bien d'autres choses. J'ai oublié d'expliciter le fait que les drapeaux et les déplacements livrent le contrôle des isométries par le biais des similitudes d'ordre deux.

Enfin, il convient d'insister sur le fait que c'est la main du paléolithique qui, par abstraction, conduit au drapeau et de répéter qu'un groupe, celui des déplacements, conduit à un groupe plus grand, celui des affinités, et à l'orientation correspondante.

## Bibliographie

- [1] BACAS (Belgian Academy Council of Applied Science), *Industrial Biotechnology and sustainable chemistry*, January 2004 (32 pp.).
- [2] Francis BUEKENHOUT, Jean DOYEN, *Ensembles structurés et groupes de symétries*, Université Libre de Bruxelles, Service de Géométrie, 1988.
- [3] Francis BUEKENHOUT, Jean DOYEN, *Espaces euclidiens*, Université Libre de Bruxelles, 1976.
- [4] Francis BUEKENHOUT, Monique FRÉDERICKX, Orientation, *Mathématique & Pédagogie*, **162** (2007), 3–11.
- [5] Chris MCMANUS, *Right hand, left hand*, Phoenix, London, 2002.

# Les billards

## CLAUDINE FESTRAETS

Dans cet article, je me propose d'examiner quelques propriétés des billards mathématiques. Une partie de ce texte est accessible à de jeunes élèves : elle n'utilise que les notions d'angle et de symétrie ; le reste demande un peu de trigonométrie et éventuellement l'une ou l'autre notion plus élaborée. C'est à vous de voir ce qui est utilisable dans vos classes.

Ici, la boule de billard est assimilée à un point, son trajet est rectiligne et elle rebondit sur le bord du billard en respectant les lois de la réflexion : l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion. Si le billard est curviligne,

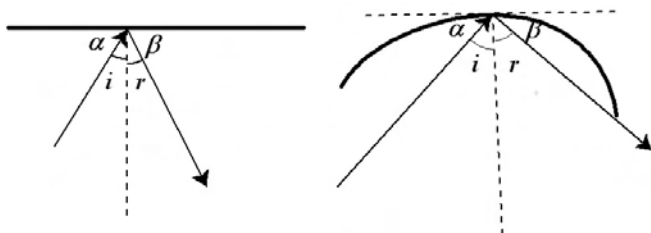


FIG. 1 –

ces angles sont ceux de la trajectoire avec la normale à la courbe au point de contact de la trajectoire avec la courbe. Il est clair que si  $i = r$ , on a aussi  $\alpha = \beta$  et réciproquement.

### 1. Billard rectangulaire

Sur le billard  $ABCD$ , ma boule se trouve en  $P$  et je veux frapper une deuxième boule qui se trouve en  $Q$ . Mais il y a une contrainte : ma boule doit d'abord rebondir sur un des bords du billard.

Adresse de l'auteur : Rue J.-B. Vandercammen 36, B-1160 Bruxelles ; courriel : hamoircl@brutele.be.



- Si la droite  $PQ$  est parallèle à un des bords du billard, il suffit de tracer la médiatrice de  $[PQ]$  : elle coupe  $AB$  en  $R$  et le trajet de la boule est  $PRQ$ . Comme la médiatrice de  $[PQ]$  est axe de symétrie de  $PRQ$ , on a bien  $i = r$ .

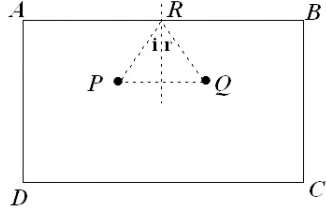


FIG. 2 –

- Si la droite  $PQ$  n'est pas parallèle à un des bords du billard, on construit le symétrique  $Q'$  de  $Q$  par rapport à la droite  $AB$ . La droite  $PQ'$  coupe  $AB$  en  $R$  et le trajet de la boule est  $PRQ$ . En effet, les

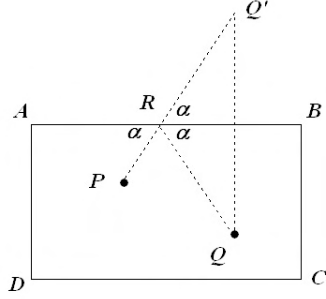


FIG. 3 –

angles  $\widehat{ARP}$  et  $\widehat{Q'RB}$  sont opposés par le sommet et ont donc même amplitude  $\alpha$ ; la symétrie d'axe  $AB$  applique  $\widehat{QRB}$  sur  $\widehat{Q'RB}$ ; ces deux angles ont donc aussi même amplitude  $\alpha$ . L'angle d'incidence est bien égal à l'angle de réflexion. (Ce cas englobe bien sûr le précédent.)

Remarquons que le trajet  $PQR$  est plus court que tout autre trajet de  $P$  vers  $Q$  en passant par un point  $S$  de  $[AB]$ . Dans le triangle  $PSQ'$ ,  $|PS| + |SQ'| > |PQ'| = |PR| + |RQ'|$ , or la symétrie axiale conserve les longueurs, donc  $|SQ'| = |SQ|$  et  $|RQ'| = |RQ|$ , donc  $|PS| + |SQ| > |PR| + |RQ|$ .

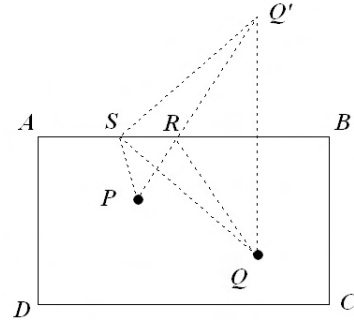


FIG. 4 –

Si maintenant on impose à la boule de rebondir sur deux côtés consécutifs  $AB$  et  $BC$  avant d'atteindre  $Q$ , il faudra effectuer deux symétries axiales, l'une par rapport à  $AB$ , l'autre par rapport à  $BC$  :

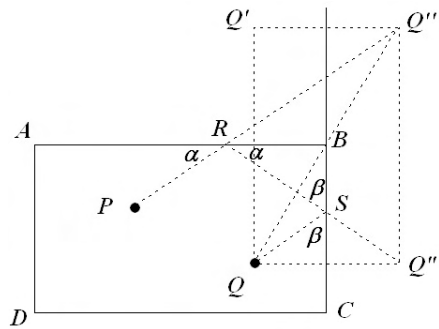


FIG. 5 –

Il est facile de vérifier que les angles  $\widehat{ARP}$  et  $\widehat{BRS}$  ont même amplitude  $\alpha$  et que les angles  $\widehat{BSR}$  et  $\widehat{CSQ}$  ont même amplitude  $\beta$ . En passant, remarquons que la composée de deux symétries d'axes perpendiculaires est une symétrie centrale, donc que  $Q'''$  est le symétrique de  $Q$  par rapport au centre  $B$ .

Un petit problème : sur le billard  $ABCD$  se trouve une seule boule en  $P$ . Existe-t-il un trajet de la boule qui revienne en  $P$  après avoir rebondi sur  $AD$ ,  $DC$ ,  $CB$  et  $BA$ ? Si oui, on a la situation que voici :

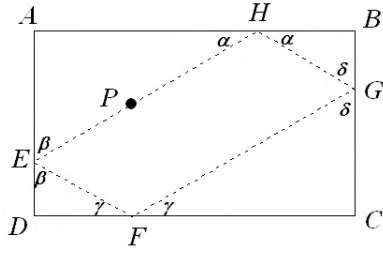


FIG. 6 –

Dans le triangle rectangle  $HAE$ ,  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , dans le triangle rectangle  $HBG$ ,  $\alpha + \delta = 90^\circ$  et dans le triangle rectangle  $EDF$ ,  $\beta + \gamma = 90^\circ$ , d'où  $\beta = \delta$  et  $\alpha = \gamma$ . Les droites  $EF$  et  $HG$  sont donc parallèles, de même que les droites  $EH$  et  $FG$ . Ainsi le quadrilatère  $EFGH$  est un parallélogramme.

Mais comment le construire ?

Puisque  $EFGH$  est un parallélogramme, on a  $|EF| = |GH|$ . Les triangles  $EDF$  et  $GBH$  sont donc isométriques et on a  $|ED| = |BG|$ .

Sur la demi-droite opposée à  $[BC]$ , construisons le point  $G'$  tel que  $|GB| = |BG'|$ . Traçons la droite  $BD$  diagonale du rectangle  $ABCD$ . On

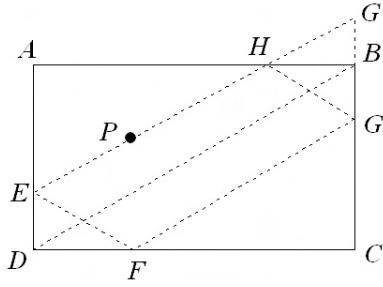


FIG. 7 –

a  $\widehat{GHB} = \widehat{BHG'}$  car  $HB$  est un axe de symétrie du triangle  $GHG'$ . On a aussi  $\widehat{GHB} = \widehat{EHA} = \alpha$ . D'où  $\widehat{BHG'} = \alpha$  et la droite  $EH$  passe par  $G'$ .

Le quadrilatère  $EDBG'$  est un parallélogramme car ses côtés  $[ED]$  et  $[G'B]$  sont parallèles et de même longueur. D'où  $EH$  est parallèle à  $DB$ . De même,  $EF$  est parallèle à  $AC$ .

Pour construire le trajet de la boule qui part de  $P$ , rebondit successivement sur les côtés consécutifs du rectangle  $ABCD$  et revient en  $P$ , il faut et il suffit de tracer un parallélogramme dont un côté passe par  $P$  et dont les côtés sont parallèles aux diagonales du rectangle  $ABCD$ . On obtient ainsi deux solutions, pour autant que le point  $P$  ne soit ni au centre ni sur un bord du rectangle  $ABCD$ .

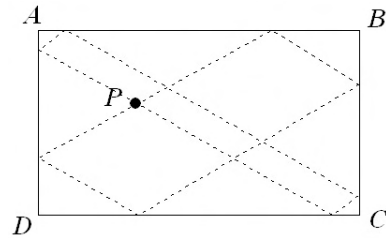


FIG. 8 –

## 2. Billard circulaire

Ma boule est en  $P$  et après un rebond sur le bord du billard je dois toucher la seconde boule qui est en  $Q$ .

Examinons quelques cas particuliers.

- Si les points  $P$  et  $Q$  sont symétriques par rapport à un diamètre  $TR$  du cercle, le rebond se fait en  $T$  ou en  $R$ . En vertu de la symétrie, on

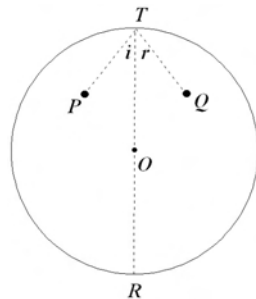


FIG. 9 –

- a bien  $\widehat{PTO} = \widehat{OTQ}$ , donc  $i = r$  et de même en  $R$ .
- Si  $P$  et  $Q$  sont tous deux sur le cercle, ils sont forcément symétriques par rapport à un diamètre du cercle et on est ramené au premier cas envisagé ci-dessus.
  - Si  $P$  et  $Q$  sont situés sur un même rayon  $[OR]$ , la droite  $OR$  coupe le cercle en  $R$  et  $T$ . Supposons que  $Q$  soit situé entre  $P$  et  $R$ , alors le trajet de la boule sera  $PTQ$ , et si  $Q$  est situé entre  $O$  et  $P$ , le trajet sera  $PRQ$ .

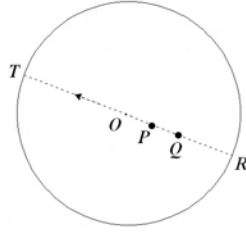


FIG. 10 –

- Si  $P$  et  $Q$  sont situés sur un même diamètre  $[SS']$  du cercle, de part et d'autre du centre  $O$ , remarquons tout d'abord qu'il existe une solution

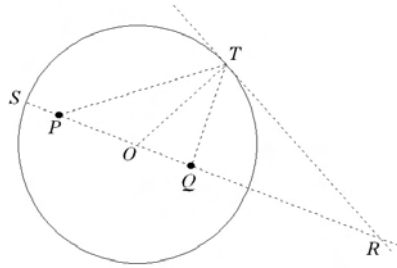


FIG. 11 –

immédiate où le rebond se fait en  $S$ .

S'il existe une autre possibilité, analysons le problème en supposant qu'une solution est construite avec le rebond qui se fait en  $T$ . Les droites  $TO$  et  $TR$  sont les deux bissectrices de l'angle  $\widehat{PTQ}$ , donc les

points  $P$ ,  $Q$ ,  $O$  et  $R$  forment un quaterne harmonique :

$$\frac{\overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{OQ}} : \frac{\overrightarrow{RP}}{\overrightarrow{RQ}} = -1.$$

Si l'on peut construire  $R$ , le point d'intersection du cercle de centre  $O$  et du cercle de diamètre  $[OQ]$  nous fournit le point  $T$  et le trajet de la boule est  $PTQ$ .

On connaît trois des quatre points du quaterne :  $P$ ,  $O$  et  $Q$ . Il existe diverses méthodes pour construire  $R$ , conjugué harmonique de  $O$  par rapport à  $P$  et  $Q$ . En voici deux. Dans la figure de gauche, on trace

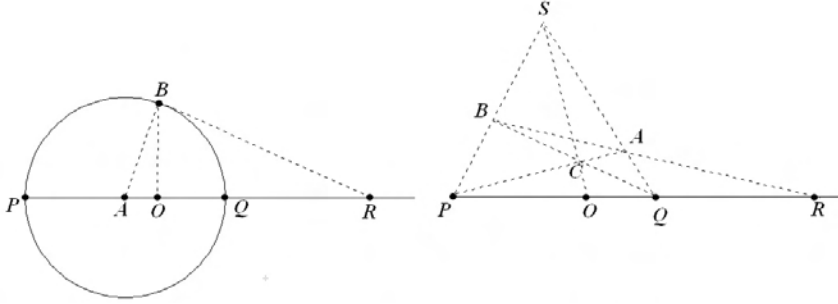


FIG. 12 –

successivement le cercle de diamètre  $[PQ]$  et de centre  $A$ , la perpendiculaire  $[OB]$  à  $PQ$ , le rayon  $[AB]$  et la perpendiculaire  $BR$  à ce rayon. Le point  $R$  ainsi déterminé est le pôle de la droite  $OB$  par rapport au cercle de centre  $A$  et on a bien  $(PQOR) = -1$ .

Dans la figure de droite, on joint  $P$ ,  $O$  et  $Q$  au point  $S$  non situé sur la droite  $PQ$ , on mène  $PA$  et  $QB$  quelconques mais se coupant en  $C$  sur  $SO$ , le point d'intersection des droites  $AB$  et  $PQ$  est  $R$ . Dans le quadrilatère complet  $SBCA$ , on a bien  $(PQOR) = -1$ .

Reste à traiter le cas général, dans lequel les points  $P$  et  $Q$  n'occupent aucune des positions particulières envisagées ci-dessus.

Considérons (fig. 13) un cercle de rayon 1 et un système  $(O, x, y)$  d'axes orthonormés dont l'origine  $O$  est le centre du cercle. Posons  $(a, b)$  les coordonnées de  $P$ ,  $(c, 0)$  celles de  $Q$  et  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  celles d'un point  $T$  du cercle.

Le trajet de la boule est  $PTQ$  si et seulement si la droite  $OT$  est une bissectrice de l'angle  $\widehat{PTQ}$ , si et seulement si la distance de  $O$  à la droite  $PT$  est égale à la distance de  $O$  à la droite  $QT$ . Écrivons l'équation de  $PT$

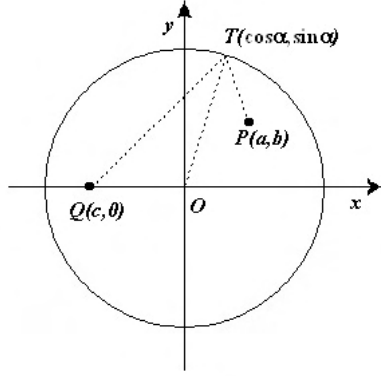


FIG. 13 –

sous sa forme normale :

$$\begin{aligned}
 y - b &= \frac{\sin \alpha - b}{\cos \alpha - a}(x - a) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x(b - \sin \alpha) - y(a - \cos \alpha) + a \sin \alpha - b \cos \alpha = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{x(b - \sin \alpha) - y(a - \cos \alpha) + a \sin \alpha - b \cos \alpha}{\sqrt{(b - \sin \alpha)^2 + (a - \cos \alpha)^2}} = 0.
 \end{aligned}$$

Écrivons l'équation de  $QT$  sous sa forme normale :

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - c}(x - c) \Leftrightarrow x \sin \alpha + y(c - \cos \alpha) - c \sin \alpha = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{x \sin \alpha + y(c - \cos \alpha) - c \sin \alpha}{\sqrt{(c - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha}} = 0.
 \end{aligned}$$

Exprimons que les distances de  $O$  aux droites  $SP$  et  $SQ$  sont égales :

$$\left| \frac{a \sin \alpha - b \cos \alpha}{\sqrt{(b - \sin \alpha)^2 + (a - \cos \alpha)^2}} \right| = \left| \frac{-c \sin \alpha}{\sqrt{(c - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha}} \right|.$$

En élevant les deux membres au carré, on obtient finalement :

$$(a \sin \alpha - b \cos \alpha)^2 ((c - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha) = (c \sin \alpha)^2 ((b - \sin \alpha)^2 + (a - \cos \alpha)^2).$$

Connaissant  $a$ ,  $b$  et  $c$ , cette équation permet de déterminer  $\alpha$ , mais ce n'est évidemment pas facile par un procédé algébrique élémentaire, l'équation étant du quatrième degré en  $\cos \alpha$  (ou en  $\sin \alpha$ ). En prenant  $a = b = 0,5$  et  $c = -0,6$ , j'ai obtenu pour  $\alpha$  les quatre valeurs (exprimées en degrés et au centième près) : 53,79, 130,34, 157,62 et 296,30. Voici la figure avec l'ensemble des solutions.

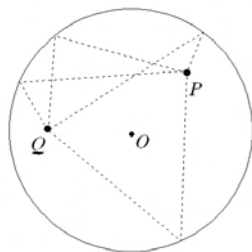


FIG. 14 –

Le problème du billard circulaire a été formulé pour la première fois par Ptolémée, astronome et astrologue grec qui vécut à Alexandrie entre les années 90 et 170 (environ). Il s'est aussi intéressé aux mathématiques, à la géographie, à l'optique et même à la musique. Il est surtout resté célèbre pour son traité d'astronomie connu sous le nom de l'*Almageste*.

Ce problème a été appelé problème d'Alhazen, d'après le nom du mathématicien persan Alhazen (980–1040), connu principalement pour ses travaux d'optique. Il ne peut être résolu par des constructions n'utilisant que la règle et le compas puisqu'il nécessite la résolution d'une équation du quatrième degré.

Pour terminer cet article, je vous propose un petit problème, celui du lapin et des choux. Il n'a rien d'original, mais j'avoue ne plus en connaître la source. J'en publierai une solution dans un prochain numéro de *M&P*, mais j'espère que de nombreux lecteurs m'enverront leurs solutions.

Considérons un rectangle  $n \times p$  comportant  $N = n + 1$  rangées de  $P = p + 1$  choux chacune (les choux sont donc disposés aux sommets d'un réseau carré). Un lapin part d'un sommet du rectangle suivant une droite faisant un angle de  $45^\circ$  avec les côtés du rectangle. Son trajet respecte les lois de la réflexion sur les bords du rectangle et il mange tous les choux situés sur son trajet. Lorsque le lapin termine son trajet en sortant par un des sommets du rectangle, combien a-t-il mangé de choux ?

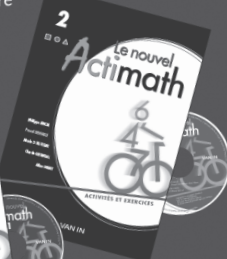
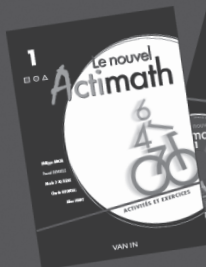


**Vous utilisez Actimath au premier degré ?  
Vous adorerez**

# **Le nouvel Actimath !**

**Au premier degré, Le nouvel Actimath se compose :**

- > des 2 cahiers Activités et exercices avec leur CD-Rom
- > du référentiel Théorie du premier degré



*Encouragés  
par le formidable  
accueil que vous  
avez réservé l'an dernier  
au nouvel **Actimath 1**,  
nous vous présentons aujourd'hui  
la **collection complète pour le premier degré**.*

**Le nouvel Actimath**  
*le même mais en mieux  
car arrivé à pleine maturité !*



**VAN IN**  
EDITIONS

**[www.actimath.be](http://www.actimath.be)**

# Songe d'un matin d'hiver

BERNARD HONCLAIRE

## 1. Rêve ou réalité ?

C'était un de ces matins où l'on s'éveille en se disant : « ... trop tôt pour se lever... trop tard pour se rendormir... » ! Que faire ! Sinon se laisser aller à de douces rêveries !

Mes préoccupations de l'époque portant sur le logiciel *Apprenti Géomètre* (<http://www.enseignement.be/geometre>) et plus particulièrement sur les figures de son kit *Standard* (Fig. 1), c'est vers la famille du triangle équilatéral que mes pensées se dirigèrent !

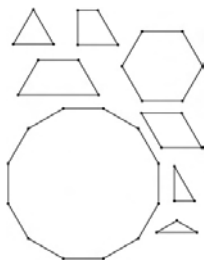


FIG. 1 –

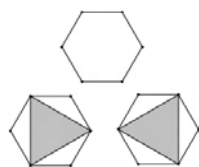


FIG. 2 –

Et cette évidence m'apparut : Les triangles équilatéraux grisés (Fig. 2) valent la moitié de l'hexagone régulier ! Cette propriété élémentaire avait mis 60 ans avant de me toucher de plein fouet...

### Énoncé

*Les deux triangles équilatéraux déterminés par trois sommets d'un hexagone régulier ont une aire égale à la moitié de l'aire de cet hexagone !*

Adresse de l'auteur : Gaston Lejeunestraat 13a/403, 8670 Koksijde; courriel : [bhonclaire@yahoo.fr](mailto:bhonclaire@yahoo.fr).

Il est élémentaire de construire un carré double d'un carré donné.

Et par conséquent, il est tout aussi simple de construire un triangle équilatéral double d'un triangle équilatéral donné. Le carré est une machine

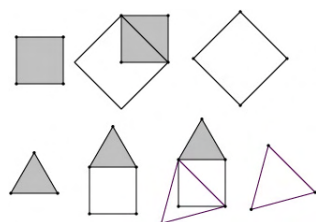


FIG. 3 –

à doubler ! Je me suis toujours basé sur cette évidence pour sensibiliser de jeunes élèves (12 ans) à l'arrivée de  $\sqrt{2}$ .

Je trouve, maintenant, élémentaire de construire un triangle équilatéral, triple d'un triangle équilatéral donné et... donc un carré triple d'un carré

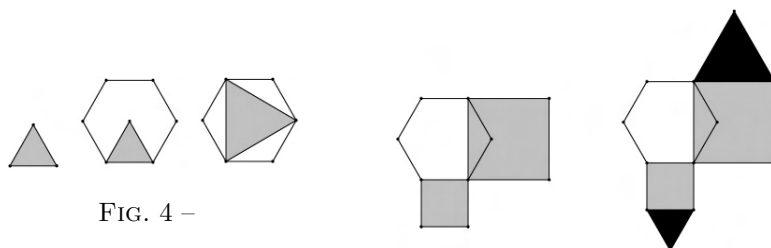


FIG. 4 –

FIG. 5 –

donné ! Ce qui permettrait d'introduire simplement  $\sqrt{3}$  ! L'hexagone régulier aurait vraiment mérité de s'appeler « machine à tripler » !

À contempler ! Juste pour le plaisir des yeux !

Une question s'est posée à moi dès le début :

*Existe-t-il d'autres hexagones qui possèdent la propriété précédente (cadre grisé page 41) ?*

Je compte (évidemment !) utiliser *Cabri* pour faciliter ma recherche.

## 2. Tâtonnements avec *Cabri*

Les ajustements successifs effectués sur *Cabri* me font rapidement percevoir qu'il existe une multitude de solutions !

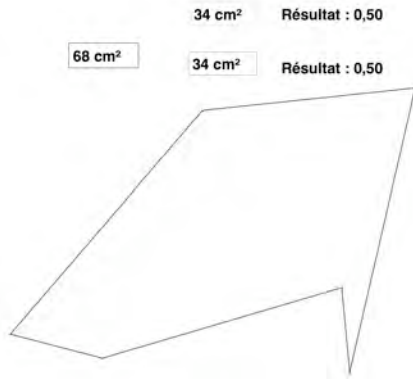


FIG. 6 –

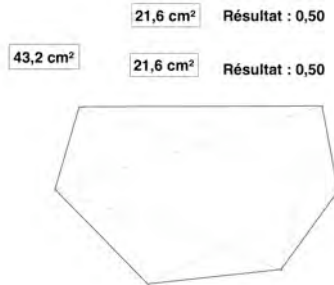


FIG. 7 –

C'est de peu d'intérêt et géométriquement peu maîtrisable !

## 3. Rebondissement

*Le fait que l'hexagone admette un centre de symétrie redonne-t-il de l'intérêt au problème ?*

Dans le cas très particulier où le centre de symétrie forme des parallélogrammes avec trois sommets consécutifs de l'hexagone, la connaissance

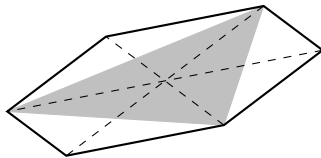


FIG. 8 –

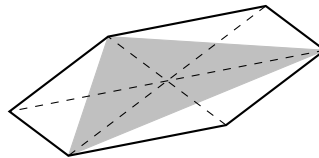


FIG. 9 –

élémentaire du rôle joué par une diagonale de parallélogramme permet de

démontrer le fait que les deux triangles ont une aire moitié de celle de l'hexagone.

Par contre, dans le cas général, la démonstration n'est pas aussi immédiate : nous entrons dans le domaine des démonstrations nécessitant une construction. Le fait de construire un point formant des parallélogrammes avec trois sommets consécutifs ramène la démonstration au cas précédent.

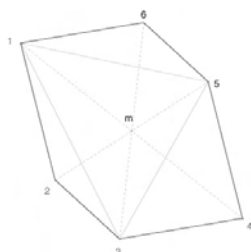


FIG. 10 –

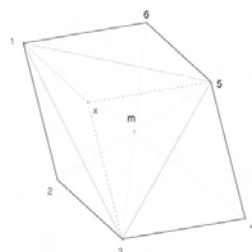


FIG. 11 –

### Énoncé

*Si  $ABCDEF$  est un hexagone admettant un centre de symétrie, alors les triangles  $ACE$  et  $BDF$  ont une aire qui vaut la moitié de celle de l'hexagone.*

L'usage de logiciels de géométrie ne permettant plus d'éviter les anciens démons de la géométrie élémentaire : concaves, croisés, aplatis, dégénérés... (bien évidemment, je parle des polygones !), je vous sou mets les deux figures suivantes et vous donne rendez-vous à l'annexe 5.

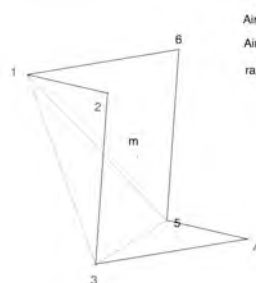


FIG. 12 –

Aire de l'hexagone : 20,71 cm<sup>2</sup>  
Aire du triangle : 10,36 cm<sup>2</sup>  
rapport : 0,50

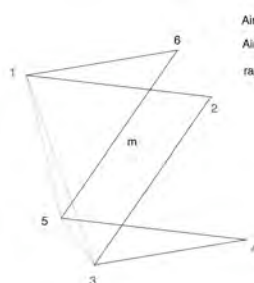


FIG. 13 –

Aire de l'hexagone : 17,28 cm<sup>2</sup>  
Aire du triangle : 1,97 cm<sup>2</sup>  
rapport : 0,11

## 4. Renversement de situation

*Dans la situation précédente, comment construire l'hexagone centré en partant du triangle ?*

1. Considérons les sommets du triangle comme les sommets 1, 3 et 5 de l'hexagone centré.

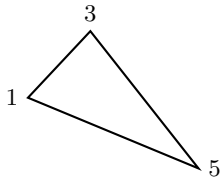


FIG. 14 –

2. Choisissons le deuxième sommet comme point libre dans le plan.

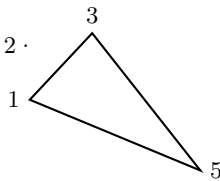


FIG. 15 –

3. Le centre de symétrie  $M$  est le milieu de  $[2\ 5]$ .

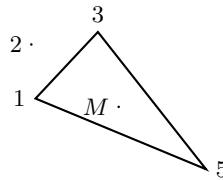


FIG. 16 –

4. Il reste à déterminer les sommets 4 et 6 par symétrie.

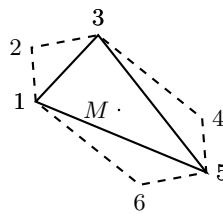


FIG. 17 –

Le fait que le deuxième sommet soit libre signifie qu'il y a une infinité de solutions.

*L'image d'un hexagone non centré se réinstalle en moi !*

Je me mets à imaginer la construction d'un hexagone dont l'aire est double de celle d'un triangle donné ! Si la recherche élaborée en début d'article (section 2) me donnait déjà des réponses (... sans intérêt !), un cas particulier s'est avéré plus intéressant !

Pourquoi ne pas construire les symétriques d'un point intérieur (dans la suite, je prendrai le centre de gravité) par rapport aux côtés du triangle donné 135 (Fig. 18) ? Un pas en avant !

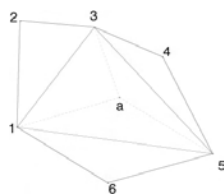


FIG. 18 –

Je considère le triangle en pointillé, image du triangle 135 par l'homothétie de centre  $G$  et de rapport 2.

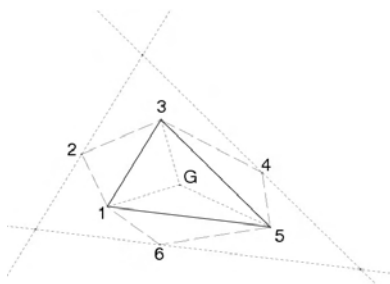


FIG. 19 –

Les points 2, 4 et 6 peuvent être choisis comme points libres sur les côtés (droites) de ce triangle. Simple utilisation de la propriété des triangles de même base et de même hauteur !

L'animation des points 2, 4 et 6 permet d'imaginer un autre problème ! Il semble possible d'aligner des points et d'envisager un triangle 246, double du triangle 135 et donc moitié du grand triangle ! Les tâtonnements et ajustements successifs font apparaître deux solutions (Fig. 20 et 21) !

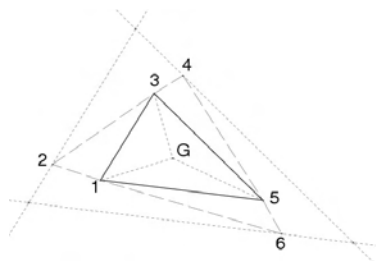


FIG. 20 –

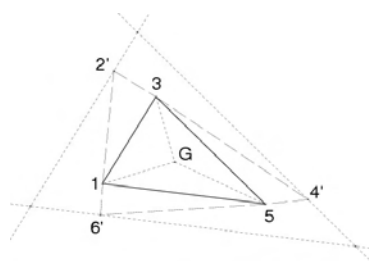


FIG. 21 –

Quelques particularités peuvent être vérifiées avec *Cabri* : les points 2 et 2', 4 et 4', 6 et 6' semblent symétriques par rapport aux milieux des côtés sur lesquels ils se trouvent ; de plus, les points 2, 4 et 6, de même que 2', 4' et 6', semblent occuper des positions identiques sur leurs côtés respectifs !

## 5. Fini de jouer ! Place aux maths !

Le problème suivant se pose à moi :

*Étant donné un triangle, comment construire un triangle moitié de celui-ci tel que ses sommets soient sur les côtés du triangle donné et y occupent la même position ?*

Mon premier réflexe est d'effectuer des calculs !

Une convention (abusive ? !) et un rappel vont me permettre de les simplifier au maximum.

Si je décide que l'aire du grand triangle vaut 1, alors l'aire du triangle

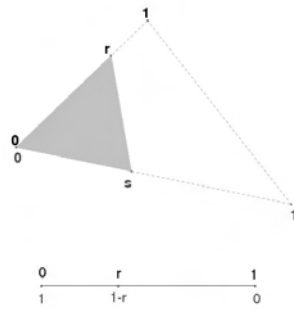


FIG. 22 –

grisé vaut  $rs$ . Si l'abscisse d'un point est  $r$  dans un repère  $(A, B)$ , elle vaut  $1 - r$  dans le repère  $(B, A)$ .

Revenons au problème : si  $x$  est l'abscisse des points  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  respectivement dans les repères  $(C, A)$ ,  $(A, B)$  et  $(B, C)$  (Fig 23) et si on décide que l'aire de  $ABC$  vaut 1, alors  $3x(1 - x) = \frac{1}{2}$  exprime que la somme des aires  $AXY$ ,  $BYZ$  et  $CZX$  (ou l'aire  $XYZ$ ) doit valoir  $\frac{1}{2}$ , ce qui donne



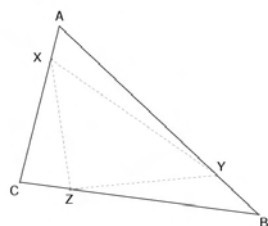


FIG. 23 –

$x = \frac{1}{6}(3 + \sqrt{3})$  ou  $x = \frac{1}{6}(3 - \sqrt{3})$ . Les deux solutions correspondent manifestement à des points symétriques par rapport aux milieux des côtés, ce que montre encore mieux un léger changement d'écriture :  $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}$  ou  $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}$ .

Il reste à effectuer la construction ! Heureusement, grâce à sa calculatrice, *Cabri* permet d'intégrrer des résultats de calculs dans les constructions ! La figure 24 illustre une des deux solutions.

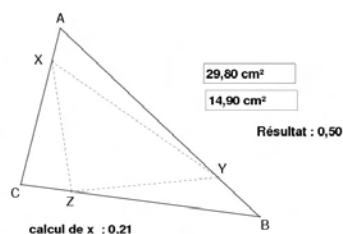


FIG. 24 –

La géométrie peut-elle se contenter d'une telle solution ? Comment obtenir ce résultat par des constructions géométriques « classiques » ?

*Il suffit de résoudre le problème pour un triangle équilatéral, les affinités font le reste !*

Cette remarque de Guy Noël, suite à quelques échanges sur le sujet, me relance dans une phase de tâtonnements (avec *Cabri*, évidemment !).

J'applique donc la même technique sur un triangle équilatéral.

L'essai d'un cercle centré au milieu d'un côté me semble justifié par la symétrie des solutions ! Quand il passe par les points solutions (Fig. 25), il

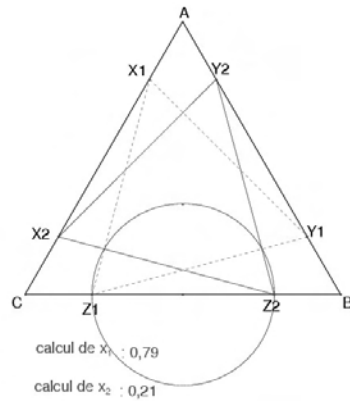


FIG. 25 –

semble passer par le centre de gravité... ! Mais, c'est bien sûr !  $\frac{\sqrt{3}}{6}$ , c'est le tiers de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1 !

Il reste à effectuer une construction. Et cette fois, sans utiliser la calculatrice ! Tout est devenu lumineux (Fig. 26) !

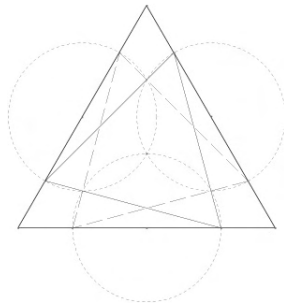


FIG. 26 –

Ayant souvent pratiqué ce type d'activités avec mes élèves, je ne peux m'empêcher d'imaginer une figure ouverte (une suite de constructions est effectuée ; les élèves suggèrent ensuite des propositions et les justifient, seuls ou avec le groupe classe).

*Une figure ouverte.*

*ABC est un triangle équilatéral; G est son centre de gravité; M, N et O sont les milieux des côtés. On trace les trois cercles  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  de centres M, N et O et passant par G.*

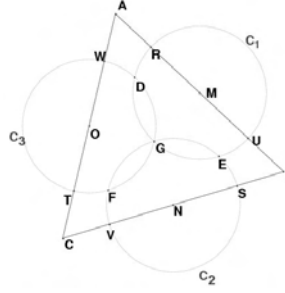


FIG. 27 –

Quelques propositions qui peuvent surgir (ou qu'on peut provoquer!). Elles sont immédiates ou relativement simples à justifier :

- Des alignements de points :  $C, F, G$  et  $M$ ;
- Des triangles équilatéraux :  $FGN, FDE, TRS, \dots$ ;
- Des losanges :  $ODGF, \dots$ ;
- Des droites perpendiculaires :  $AN$  et  $BC, OM$  et  $DG, \dots$ ;
- Des droites parallèles :  $OF, DG$  et  $ME, \dots$ ;
- $ODMENF$  est un hexagone régulier;
- $F$  est le milieu de  $[CG]$ ;
- $FE \parallel CB$  et  $|FE| = \frac{1}{2}|CB|$ ;
- $DMNF$  est un rectangle
- $FED = \frac{1}{4}ABC$

La justification de l'alignement des points  $T, D$  et  $R$  ne semble pas aussi élémentaire! Alternes-internes, angle dans un demi-cercle, rectangle, triangle isocèle et symétrie permettent de déterminer les angles en  $D$  (Fig. 28).

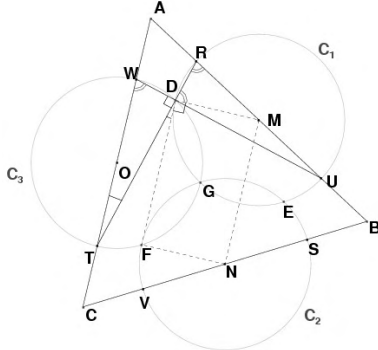


FIG. 28 –

Plus... si affinités!

Il est maintenant facile de passer à un triangle quelconque! On pourrait construire un triangle équilatéral sur *chacun* des côtés du triangle quelconque...! Mais l'utilisation de Thalès permet une construction plus économique (Fig. 29)!

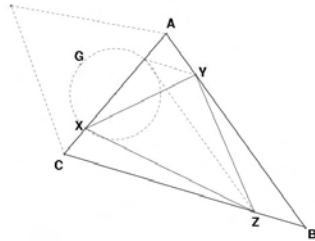


FIG. 29 –

Cette construction m'a permis de construire deux macros avec lesquelles des suites peuvent aisément être réalisées.

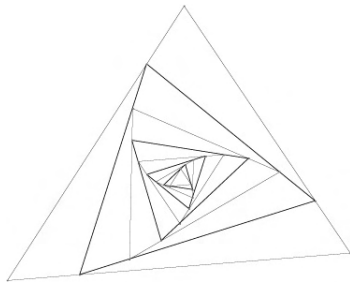


FIG. 30 –

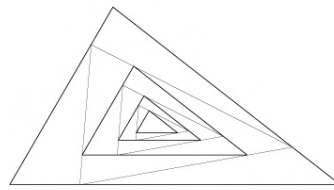


FIG. 31 –

Et pour vous remercier d'être arrivé à la fin de l'article, je ne peux m'empêcher de vous faire admirer ces quelques figures (Fig. 32 et 33)! À contempler par les amoureux des affinités! (dans ce cas, un étirement déterminé par un axe, une direction et un rapport)!

Je signale que les fichiers utilisés (*PowerPoint*, *Cabri II+* et *AG Version 1*) sont disponibles sur le site <http://www.sbp.m.be/>. Je vous invite également à parcourir les annexes ci-dessous.

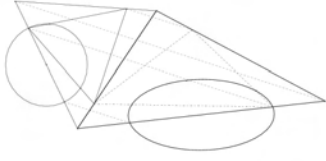


FIG. 32 –

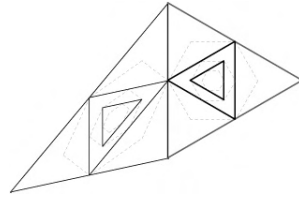


FIG. 33 –

## Annexes

### A.1. Cas général

Je choisis un point  $X$  sur  $[AC]$  et un point  $Y$  sur  $[AB]$ . Comment calculer la position d'un point  $Z$  (éventuel) sur  $[BC]$ , telle que l'aire du triangle  $XYZ$  soit la moitié de l'aire de  $ABC$  ?

Si  $x$  est l'abscisse de  $X$  dans le repère  $(C, A)$ ,  $y$  celle de  $Y$  dans le repère

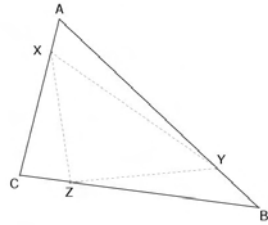


FIG. 34 –

$(A, B)$ ,  $z$  celle de  $Z$  dans le repère  $(B, C)$  (Fig. 34), et si je décide que l'aire du triangle  $ABC$  vaut 1, alors  $x(1 - z) + y(1 - x) + z(1 - y) = \frac{1}{2}$  exprime que l'aire de  $XYZ$  (ou  $XZC + XAY + YZB$ ) doit être égale à  $\frac{1}{2}$ .

Ce qui donne  $z = \frac{\frac{1}{2} - s + p}{1 - s}$  (avec  $s = x + y$  et  $p = xy$ ).

Si on exige que  $Z$  soit entre  $B$  et  $C$ , alors il faut que  $0 < z < 1$ . Une petite étude de signe et cela donne  $[s > 1 \text{ et } \frac{1}{2} < p < s - \frac{1}{2}]$  ou  $[s < 1 \text{ et } s - \frac{1}{2} < p < \frac{1}{2}]$ . Le cas où  $s = 1$  sera examiné à l'annexe 5.

Une construction utilisant la calculatrice de *Cabri* donne les Fig. 35 et 36.

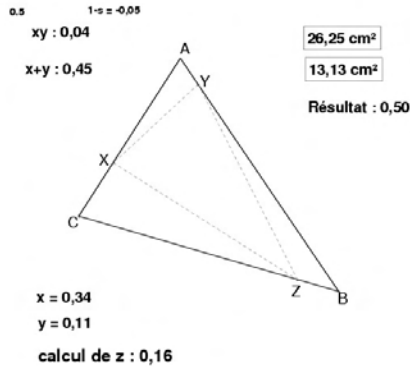


FIG. 35 –

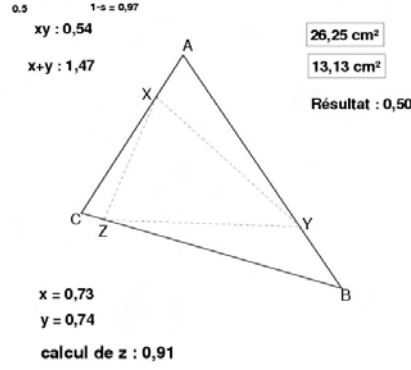


FIG. 36 –

## A.2. Pourquoi se limiter à un demi ? Cas des points $X$ , $Y$ et $Z$ de même abscisse

On sait déjà que si on prend le milieu de  $[AC]$  comme centre du cercle passant par  $G$ , le triangle  $XYZ$  vaut la moitié de  $ABC$ . Il est évident que si le centre du cercle est  $G'$ , symétrique de  $G$  par rapport à  $AC$ ,  $XYZ$  est alors confondu avec  $ABC$ . On peut donc conjecturer que si le point  $M$  d'abscisse  $k$  dans le repère  $(G, G')$  (Fig. 37) est le centre du cercle, alors l'aire de  $XYZ$  vaut  $k$  (il est bien entendu que l'aire de  $ABC$  est fixée à 1 !)

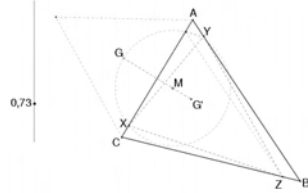


FIG. 37 –

Si on décide que le côté du triangle équilatéral vaut 1, alors  $r = k \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $x = \frac{1}{2} - y$ ,  $y^2 = r^2 - z^2$ ,  $z = \frac{\sqrt{3}}{6} - r$ ,  $y^2 = \frac{1}{3}k - \frac{1}{12}$ ,  $x = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{3}k - \frac{1}{12}}$  (Fig. 38).

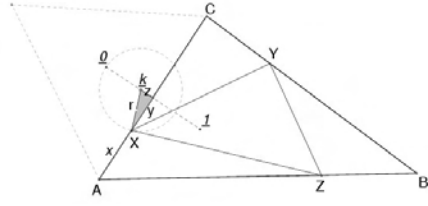


FIG. 38 –

Et si on décide que l'aire du triangle de départ vaut 1, alors l'aire de  $XYZ$  (pour rappel :  $1 - 3x(1 - x)$ ) vaut

$$1 - 3 \left( \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{3}k - \frac{1}{12}} \right) \left( \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{3}k - \frac{1}{12}} \right),$$

ce qui donne  $k$  après simplification.

### A.3. Pourquoi se limiter à un demi ? Cas général

Je choisis un point  $X$  sur  $[AC]$  et un point  $Y$  sur  $[AB]$ . Comment calculer la position d'un point  $Z$  (éventuel) sur  $[BC]$ , telle que l'aire du triangle  $XYZ$  soit égale à  $k$  fois l'aire de  $ABC$  ?

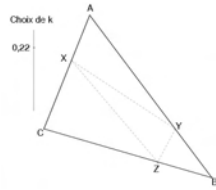


FIG. 39 –

$X$  et  $Y$  sont mobiles respectivement sur  $[AC]$  et  $[AB]$ ,  $k$  est choisi par un curseur (entre 0 et 1) et la position de  $Z$  est calculée ! Si  $x$  est l'abscisse de  $X$  dans le repère  $(C, A)$ ,  $y$  celle de  $Y$  dans le repère  $(A, B)$ ,  $z$  celle de  $Z$  dans le repère  $(B, C)$  et si je décide que l'aire du triangle  $ABC$  vaut 1, alors  $x(1 - z) + y(1 - x) + z(1 - y) = 1 - k$  exprime que la somme des trois petits triangles vaut  $1 - k$ .

Ce qui donne  $z = \frac{1 - k - s + p}{1 - s}$  (avec  $s = x + y$  et  $p = xy$ ).

Pour que  $Z$  soit sur  $[BC]$ , il faut que  $0 < z < 1$ , autrement dit  $[s > 1$  et  $k < p < s - (1 - k)]$  ou  $[s < 1$  et  $s - (1 - k) < p < k]$ .

#### A.4. Cas où $s = 1$

Cette condition signifie que  $XY$  est parallèle à  $BC$ . En effet si  $x$  est l'abscisse de  $X$  dans le repère  $(C, A)$  et  $1 - x$  celle de  $Y$  dans le repère  $(A, B)$ , les points  $X$  et  $Y$  ont même abscisse respectivement dans les repères  $(A, C)$  et  $(A, B)$ . Il reste à calculer  $x$ .

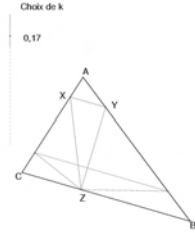


FIG. 40 –

L'égalité  $(1 - x)^2 + x(1 - z) + xz = 1 - k$  exprime que la somme des aires des triangles  $AXY$ ,  $CZX$  et  $ZYB$  vaut  $1 - k$ , autrement dit que l'aire de  $XYZ$  vaut  $k$ . (Il est évident que l'on décide toujours que l'aire de  $ABC$  vaut 1 !) Ce qui donne :  $x^2 - x + k = 0$ , soit  $x = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - 4k})$  ou  $x = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - 4k})$ . Ce qui montre que  $k$  doit être inférieur ou égal à  $\frac{1}{4}$ .

La valeur  $\frac{1}{4}$  pour  $k$  donne la situation bien connue du triangle déterminé par les milieux des côtés de  $ABC$ .

#### A.5. Une nouvelle ère pour les croisés

L'usage de logiciels comme *Cabri* ou *AG* fait qu'il devient inévitable de rencontrer des polygones concaves, des polygones croisés, des aplatis, ... ! Dans certains cas, le calcul de l'aire de *Cabri* (*Cabri 2*) fait disparaître la cohérence des propriétés !

Si on joint les milieux des côtés d'un quadrilatère, l'aire du parallélogramme ainsi déterminé vaut la moitié de celle du quadrilatère (Fig. 41 et 42).



8,99 cm<sup>2</sup>    aire orientée : 17,98 cm<sup>2</sup>    Résultat : 0,50  
 aire Cabri : 17,98 cm<sup>2</sup>    Résultat : 0,50

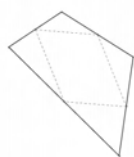


FIG. 41 –

1,74 cm<sup>2</sup>    aire orientée : 3,48 cm<sup>2</sup>    Résultat : 0,50  
 aire Cabri : 7,36 cm<sup>2</sup>    Résultat : 0,24

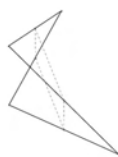
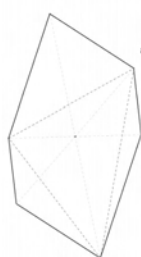


FIG. 42 –

Voici le cas de l'hexagone avec centre de symétrie et des triangles d'aire deux fois moindre (Fig. 43 et 44).

aire Cabri : 44,27 cm<sup>2</sup>    Résultat : 0,50  
 aire orientée : 44,27 cm<sup>2</sup>    Résultat : 0,50



aire du triangle : 22,13 cm<sup>2</sup>

FIG. 43 –

aire Cabri : 15,24 cm<sup>2</sup>    Résultat : 0,17  
 aire orientée : 5,32 cm<sup>2</sup>    Résultat : 0,50



aire du triangle : 2,66 cm<sup>2</sup>

FIG. 44 –

Pour rétablir cette cohérence, deux possibilités : utiliser la version *Cabri2Plus*, qui propose de donner l'aire algébrique, ou réaliser une macro « aire corrigée » !

## A.6. Une nouvelle aire pour les croisés

Le remplacement du quadrilatère  $ABCD$  par le triangle  $ADE$  donne une aire qui correspond à l'aire algébrique de *Cabri2Plus* (au signe près ! — Fig. 45). Ce remplacement peut évidemment être effectué pour tout polygone (Fig. 46).

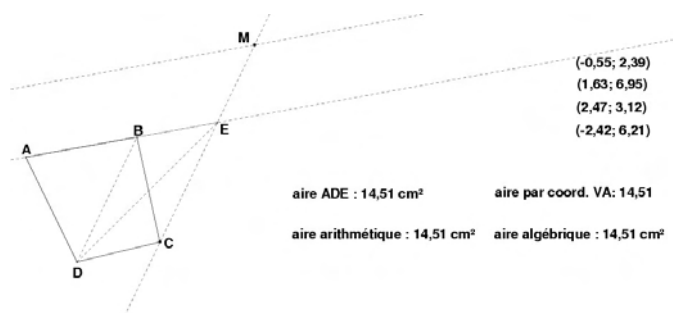


FIG. 45 –

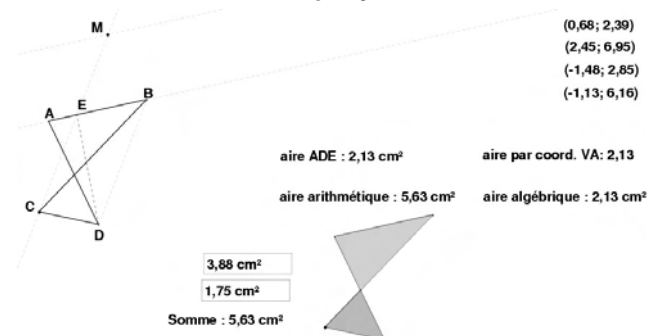


FIG. 46 –



**POLYTECH  
MONS**

# FACULTÉ POLYTECHNIQUE DE MONS

**Ingénieur civil, une vision d'avenir**

## **INSCRIPTION A L'EXAMEN D'ADMISSION**

**Année académique  
2007-2008**

**Session de juillet :  
avant le 27 juin 2007**

**Session de septembre :  
du 1<sup>er</sup> au 28 août 2007**

**du lundi au vendredi,  
de 8h à 12h et de 14h à 16h45**

**PORTES OUVERTES  
à Charleroi : le 27 juin 2007**

**de 14 à 18 h • 38-40 bd Joseph II**

**La 1<sup>re</sup> année du grade de bachelier est aussi organisée à Charleroi.  
Formation identique à celle de Mons.**



**ACADÉMIE  
UNIVERSITAIRE  
WALLONIE-  
BRUXELLES**

**Secrétariat des Études : 9, rue de Houdain – B 7000 Mons  
Tél : 065/37 40 30 à 32 | Fax : 065/37 40 34 | [secretu@fpms.ac.be](mailto:secretu@fpms.ac.be)**

**[www.fpms.ac.be](http://www.fpms.ac.be)**

## Problèmes

Claudine Festraets <sup>(1)</sup>

### Nombre parfait

Problème n° 328 de *M&P* n° 158

*Démontrer que le chiffre des unités de tout nombre parfait pair est 6 ou 8 (un nombre naturel est dit parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs propres, par exemple,  $6 = 3 + 2 + 1$ ).*

#### **Solution de R. Vidal, de Narbonne**

Il est connu, depuis Euclide, que si  $N$  est un nombre parfait, il est de la forme  $2^k(2^{k+1} - 1)$  avec  $2^{k+1} - 1$  premier.

Remarquons que  $k + 1$  est forcément premier, sinon on aurait  $k + 1 = q_1 q_2$  et  $2^{k+1} - 1 = (2^{q_1})^{q_2} - 1$  serait divisible par  $2^{q_1} - 1$ , ce qui est impossible.

Donc  $k + 1$  est de la forme  $4m + 1$  ou  $4m + 3$ .

– Premier cas : Si  $k + 1 = 4m + 1$ , alors

$$N = 2^{4m}(2^{4m+1} - 1) = 2 \times (2^4)^{2m} - (2^4)^m.$$

Regardons les premières puissances d'exposant  $n$  non nul de  $16 : 16, 256, 4096, 65\,536, 1\,048\,576, \dots$  : il semble qu'elles soient toutes de la forme  $10d + 6$ . Démontrons-le par récurrence.

La propriété est vraie pour  $n = 1$ .

Supposons-la vraie pour l'entier  $p : 16^p = 10d + 6$  ; alors il est clair que  $16^{p+1} = 16(10d + 6) = 160d + 96 = 10 \times (16d + 9) + 6$ .

$N$  vaut donc  $2(10d + 6) - (10d' + 6) = 10 \times (2d - d') + 6$  et se termine par 6.

– Deuxième cas : Si  $k + 1 = 4m + 3$ , alors

$$N = 2^{4m+2}(2^{4m+3} - 1) = 2 \times 2^{8m+4} - 2^{4m+2} = 2 \times (2^4)^{2m+1} - 4 \times (2^4)^m$$

et est donc de la forme  $2 \times (10d + 6) - 4 \times (10d' + 6) = 10 \times (2d - 4d' - 2) + 8$  et se termine par 8.

---

<sup>(1)</sup> Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à C. FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles ou à l'adresse e-mail hamoircl@brutele.be

Bonnes solutions de R. CHOLET, d'Avenay ; K. CHRIAA, de Bruxelles ; J. FINOULST, de Diepenbeek ; P. LE GALL, de Metz ; A. PATERNOTTRE, de Boussu et J. RASSE, de Méan.

**Fonctions dérivables**Problème n° 329 de *M&P* n° 158

Déterminer toutes les fonctions  $f$  telles que

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

pour tous  $x, y$  réels avec  $xy \neq 1$  et qui sont dérivables partout.

**Solution de R. Choulet, d'Avenay**

En préliminaire on peut remarquer que  $f(0) = 0$  en prenant  $x = y = 0$  dans la relation fonctionnelle ; de plus  $f$  est impaire en particulierisant ensuite avec  $x$  quelconque et  $y = -x$ .

Soit  $y$  un réel fixé quelconque. Par hypothèse,  $f$  est dérivable en tout réel  $x$  distinct de  $1/y$  et l'on a donc en dérivant :

$$f'(x) = f'\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \times \frac{1+y^2}{(1-xy)^2}.$$

En particulier avec  $x = -y$ , on obtient que pour tout  $y$  :

$$f'(-y) = f'(0) \times \frac{1}{1+y^2}$$

ce qui montre, en intégrant immédiatement (comme  $f'$  est paire) que sur  $\mathbb{R}$ ,  $f$  est du type  $f(y) = C \arctan y + k$ . La condition  $f(0) = 0$  fait que  $k = 0$ . Ainsi  $f(x) = C \arctan x$  avec  $C$  arbitraire dans  $\mathbb{R}$ .

Une seule autre solution correcte, celle de P. LE GALL, de Metz.

**Géométrie et calcul**Problème n° 330 de *M&P* n° 158

Le triangle  $ABC$ , rectangle en  $A$ , est tel que  $|AB| = 4$  et  $|AC| = 3$ . Le point  $P$  est le milieu de  $[AB]$ , le point  $Q$  est le pied de la perpendiculaire abaissée de  $P$  sur  $BC$ . Déterminer la longueur de  $[AQ]$ .

**Solutions de F. Bellot Rosado, de Valladolid**
Première solution

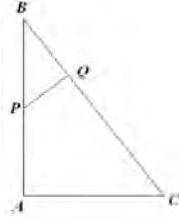
Nous allons résoudre le problème avec un peu plus de généralité.

Soient  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = \sqrt{b^2 + c^2} = a$ . Les triangles  $ABC$  et  $PBQ$  sont semblables et on a :

$$\frac{BQ}{AB} = \frac{PQ}{AC} = \frac{PB}{BC}$$

c'est-à-dire

$$\frac{BQ}{c} = \frac{PQ}{b} = \frac{c}{2a}.$$



De là,  $BQ = \frac{c^2}{2a}$  et  $CQ = a - BQ = \frac{2b^2 + c^2}{2a}$ . Le théorème de Stewart permet de calculer directement la longueur de la médiane  $AQ$  :

$$a \cdot AQ^2 = BQ \cdot b^2 + CQ \cdot c^2 - BQ \cdot CQ \cdot a$$

dont l'expression n'est pas très jolie :

$$AQ^2 = \frac{c^2 b^2}{2a^2} + \frac{2b^2 + c^2}{2a^2} - \frac{c^2(2b^2 + c^2)}{4a^3}$$

Mais, dans le cas particulier du problème, on a  $BQ = \frac{8}{5}$  et  $CQ = \frac{17}{5}$ , ce qui conduit à

$$AQ^2 = \frac{8 \cdot 9}{5^2} + \frac{17 \cdot 16}{5^2} - \frac{8 \cdot 17}{5^2} = \frac{208}{5^2}$$

et  $AQ = \frac{4\sqrt{13}}{5}$ .

Deuxième solution

On peut appliquer le théorème de Ptolémée au quadrilatère  $APQC$ , qui a deux angles opposés de  $90^\circ$  et est donc inscrit dans un cercle de diamètre  $PC$ .

$$AQ \cdot CP = AP \cdot CQ + PQ \cdot AC$$

et ainsi, on obtient  $AQ \cdot \sqrt{13} = 2 \cdot \frac{17}{5} + 3 \cdot \frac{6}{5}$ , d'où  $AQ = \frac{4\sqrt{13}}{5}$ .

Troisième solution

Considérons un système cartésien rectangulaire où  $A = (0, 0)$ ,  $B = (4, 0)$ ,  $C = (0, 3)$  et  $P = (2, 0)$ . L'équation de  $BC$  est  $3x + 4y = 12$ , donc l'équation de la perpendiculaire à  $BC$  par  $P$  est  $y = \frac{4}{3}(x - 2)$ . Les coordonnées de son intersection  $Q$  sont  $(\frac{68}{25}, \frac{24}{25})$  et de là  $AQ = \frac{4\sqrt{13}}{5}$ .

M. BLEVOT, de St Denis de la Réunion; R. CHOLET, d'Avenay; K. CHIRIAA, de Bruxelles; Y. DURAND, de Mons; P. LE GALL, de Metz, A. PATERNOTTRE, de Boussu; J. RASSE, de Méan et M. VERHEYLEWEGHEN, de Bruxelles ont tous envoyé de bonnes solutions. Signalons que Y. DURAND m'a soumis 15 solutions différentes.

\*       \*

\*

Les solutions des problèmes que voici doivent me parvenir pour le 1<sup>er</sup> septembre 2007 au plus tard. Ces solutions peuvent être manuscrites, mais vous pouvez aussi les envoyer à mon adresse électronique sous la forme d'un fichier  $\text{\LaTeX}$  ou à défaut au format doc, pdf ou txt. Rédigez vos différentes solutions sur des feuilles séparées et n'oubliez pas d'indiquer votre nom sur chacune des feuilles.

**337. Litres de vin**

Un tonneau contient 100 litres de vin. On le vide en utilisant deux récipients, l'un de 1 litre, l'autre de 2 litres. En tenant compte de l'ordre, de combien de manières peut-on vider ce tonneau ?

**338. Petits oiseaux**

Dix petits oiseaux picorent sur un sol horizontal. Pour cinq quelconques d'entre eux, quatre au moins sont toujours situés sur un cercle. Quel est le nombre maximum et quel est le nombre minimum d'oiseaux situés sur le même cercle ?

**339. Aire**

Déterminer l'aire d'un triangle  $ABC$  équilatéral sachant que les distances d'un point  $P$  intérieur au triangle aux trois sommets  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont respectivement 3, 4 et 5.

## Olympiades

Claudine Festraets <sup>(1)</sup>

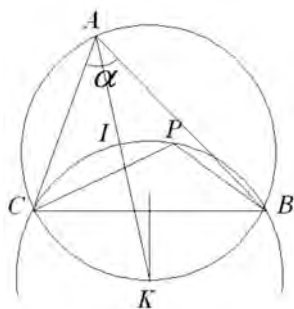
Voici des solutions aux trois premiers problèmes proposés lors de l'Olympiade Mathématique Internationale de 2006.

**Problème 1.** Soit  $ABC$  un triangle et  $I$  le centre de son cercle inscrit. Un point  $P$  intérieur au triangle vérifie

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}.$$

Montrer que  $AP \geq AI$  et que l'égalité a lieu si et seulement si  $P = I$ .

**Solution de François Gonze, élève de l'Institut de la Providence à Wavre.** Soit  $\widehat{BAC} = \alpha$ . On a  $\widehat{CIB} = 90^\circ + \alpha/2$ . D'autre part,  $180^\circ - \alpha =$



$= \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 2\widehat{PCB} + 2\widehat{PBC}$ , d'où  $\widehat{PCB} + \widehat{PBC} = 90^\circ - \alpha/2$  et  $\widehat{CPB} = 90^\circ + \alpha/2$ , ce qui implique que  $P$  et  $I$  sont sur l'arc de cercle  $\widehat{BC}$  de centre  $K$ , le point  $K$  étant sur le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ , à l'intersection de la médiatrice de  $[BC]$  et de la bissectrice de  $\widehat{BAC}$ .

Soit  $\Gamma_1$  le cercle de centre  $A$  passant par  $I$  et soit  $\Gamma_2$  le cercle de centre  $K$  passant par  $I$  et  $P$ . Ces cercles sont tangents en  $I$  puisque  $I$  est sur les deux cercles et sur la droite joignant leurs centres.

<sup>(1)</sup> Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à :  
Cl. FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles, ou à l'adresse électronique [hamoircl@brutele.be](mailto:hamoircl@brutele.be)



Si  $P = I$ , alors  $|AP| = |AI|$ , sinon  $P$  est à l'extérieur de  $\Gamma_1$  et donc  $|AP| > |AI|$ .

**Problème 2.** Soit  $P$  un polygone régulier à 2006 côtés. Une diagonale de  $P$  est appelée bonne si ses extrémités partagent le contour de  $P$  en deux parties ayant chacune un nombre impair de côtés de  $P$ . Les côtés de  $P$  sont aussi appelés bons.

On suppose que  $P$  a été subdivisé en triangles par 2003 diagonales n'ayant deux à deux aucun point commun à l'intérieur de  $P$ . Trouver le nombre maximum de triangles isocèles ayant deux côtés bons qui peuvent apparaître dans une telle subdivision.

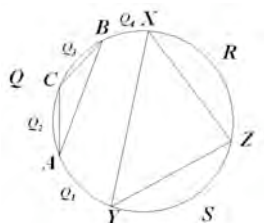
**Solution.** Un triangle isocèle ayant deux côtés bons sera appelé *isobon*. Remarquons que les deux côtés de ce triangle ayant même longueur doivent être bons.

Considérons que les 2003 diagonales sont tracées et soit  $[XY]$  la plus longue (ou l'une des plus longues). Elle divise le bord de l'hexagone en deux parties. Si ces deux parties sont de même longueur, choisissons un sommet  $Z$  dans l'une, sinon choisissons  $Z$  dans la partie la plus longue.

L'hexagone est divisé en trois parties :  $Q$  d'extrémités  $X$  et  $Y$ ;  $R$  d'extrémités  $Y$  et  $Z$ ; et  $S$  d'extrémités  $Z$  et  $X$ . Soient  $q$ ,  $r$  et  $s$  le nombre de côtés appartenant respectivement à  $Q$ ,  $R$  et  $S$ , avec  $q + r + s = 2006$ .

Démontrons par récurrence que le nombre de triangles isobons contenus dans  $Q$  est inférieur ou égal à  $q/2$ .

C'est évident pour  $q = 2$ , il y a un seul triangle isobon formé par  $[XY]$  et les deux côtés. Pour  $2 < q \leq 1003$ , supposons la proposition vraie pour toute partie de  $Q$  ayant moins de  $q$  côtés.



Soit  $[AB]$  la plus longue diagonale (distincte de  $[XY]$ ), côté d'un triangle  $ABC$  isobon et contenu dans  $Q$ . Le sommet  $C$  est situé sur le polygone

entre  $A$  et  $B$ , sinon l'un des côtés du triangle serait plus long que  $[AB]$ . Donc  $[AC]$  et  $[CB]$  sont bons.

$Q$  est divisé en quatre parties :  $Q_1$  comprenant  $q_1$  sommets,  $Q_2$  comprenant  $q_2$  sommets,  $Q_3$  comprenant  $q_3$  sommets et  $Q_4$  comprenant  $q_4$  sommets ainsi qu'indiqué par la figure.

Aucun triangle isobon ne peut avoir de sommets à la fois sur  $Q_1$  et  $Q_4$  sinon un de ses côtés serait plus long que  $[AB]$ . Aucun triangle isobon ne peut avoir de sommets à la fois sur  $Q_1$  et  $Q_2$ , ou sur  $Q_1$  et  $Q_3$ , ou sur  $Q_2$  et  $Q_3$ , ou sur  $Q_3$  et  $Q_4$  sinon un de ses côtés couperait un côté du triangle  $ABC$ . Par hypothèse, dans  $Q_1$ , le nombre de triangles isobons est au plus  $q_1/2$  et dans  $Q_4$ , il est au plus  $q_4/2$ .

Remarquons que  $Q_2$  et  $Q_3$  contiennent chacun un nombre impair de côtés, donc dans  $Q_2$  le nombre de triangle isobons est au plus  $(q_2 - 1)/2$  et dans  $Q_3$ , il est au plus  $(q_3 - 1)/2$ . Le nombre total de triangles isobons contenus dans  $Q$ , y compris le triangle  $ABC$ , est donc

$$\frac{q_1}{2} + \frac{q_4}{2} + \frac{q_2 - 1}{2} + \frac{q_3 - 1}{2} + 1 = \frac{q}{2}.$$

Si le triangle  $XYZ$  n'est pas isobon, le même raisonnement nous donne au plus  $r/2$  triangles isobons dans  $R$  et au plus  $s/2$  triangles isobons dans  $S$ .

Si le triangle  $XYZ$  est isobon, alors  $XZ$  et  $ZY$  sont les côtés bons et nous aurons au plus  $\frac{r-1}{2}$  triangles isobons dans  $R$  et au plus  $\frac{s-1}{2}$  triangles isobons dans  $S$ .

Le nombre total de triangles isobons est dans les deux cas au plus égal à  $\frac{q+r+s}{2} = \frac{2006}{2} = 1003$ .

Si on numérote les sommets du polygone 1, 2, 3, ..., 2006, les 1003 triangles (1, 2, 3), (3, 4, 5), (6, 7, 8), ..., (2004, 2005, 2006) et (2005, 2006, 1) sont isobons.

**Problème 3.** Trouver le plus petit réel  $M$  tel que l'inégalité

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

soit vérifiée pour tous nombres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

**Solution.**

$$\begin{aligned} & ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \\ &= a^3(b - c) + a(c^3 - b^3) + bc(b^2 - c^2) \\ &= (b - c)(a^3 - ab^2 - ac^2 - abc + b^2c + bc^2) \\ &= (b - c)(a(a^2 - b^2) + c^2(b - a) + bc(b - a)) \\ &= (b - c)(a - b)(a^2 + ab - c^2 - bc) \\ &= (b - c)(a - b)(a - c)(a + b + c). \end{aligned}$$

Les deux membres de l'inégalité sont symétriques en  $a$ ,  $b$  et  $c$  ; on peut donc supposer  $a \leq b \leq c$  et l'inégalité s'écrit alors

$$(c - b)(b - a)(c - a)(a + b + c) \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

En utilisant l'inégalité arithmético-géométrique, nous obtenons

$$(c - b)(b - a) \leq \left( \frac{(c - b) + (b - a)}{2} \right)^2 = \frac{(c - a)^2}{4}, \quad (1)$$

d'où

$$(c - b)(b - a)(c - a) \leq \frac{(c - a)^3}{4} ;$$

de plus, la moyenne arithmétique étant inférieure à la moyenne quadratique,

$$\frac{(c - a)^2}{4} = \left( \frac{(c - b) + (b - a)}{2} \right)^2 \leq \frac{(c - b)^2 + (b - a)^2}{2},$$

donc

$$\frac{(c - a)^2}{2} \leq (c - b)^2 + (b - a)^2$$

et

$$\frac{3}{2}(c - a)^2 \leq (c - b)^2 + (b - a)^2 + (c - a)^2.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
& (c-b)(b-a)(c-a)(a+b+c) \\
& \leq \frac{(c-a)^3}{4}(a+b+c) \\
& = \frac{1}{4}\sqrt{(c-a)^6(a+b+c)^2} \\
& \leq \frac{1}{4}\sqrt{\frac{8}{27}((c-b)^2+(b-a)^2+(c-a)^2)^3(a+b+c)^2} \\
& = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(\frac{(c-b)^2+(b-a)^2+(c-a)^2}{3}\right)^3(a+b+c)^2} \\
& \stackrel{(*)}{\leq} \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{16}\left(3\frac{(c-b)^2+(b-a)^2+(c-a)^2}{3}+(a+b+c)^2\right)^2 \quad (2) \\
& = \frac{\sqrt{2}}{32}(3a^2+3b^2+3c^2)^2 \\
& = \frac{9\sqrt{2}}{32}(a^2+b^2+c^2)^2,
\end{aligned}$$

l'inégalité (\*) découlant l'inégalité arithmético-géométrique  $\sqrt[4]{A^3B} \leq \frac{1}{4}(3A+B)$ , avec  $A = \frac{(c-b)^2+(b-a)^2+(c-a)^2}{3}$  et  $B = (a+b+c)^2$ .

Dans (1), on a l'égalité si  $c-b=b-a$ , donc  $2b=a+c$ .

Dans (2), on a l'égalité si  $\frac{(c-b)^2+(b-a)^2+(c-a)^2}{3} = (a+b+c)^2$ .

En remplaçant  $b$  par  $(a+c)/2$  dans cette dernière égalité, on obtient  $2(c-a)^2 = 9(a+c)^2$ . Pour  $b=1$ , il vient  $a+c=2$  et  $(c-a)^2=18$ , d'où  $a=1-\frac{3\sqrt{2}}{2}$  et  $c=1+\frac{3\sqrt{2}}{2}$ .

Le minimum cherché est donc  $M = \frac{9\sqrt{2}}{32}$  et l'égalité est obtenue pour tout triplet  $(a, b, c)$  proportionnel à  $\left(1-\frac{3\sqrt{2}}{2}, 1, 1+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ .

## Le coin du trésorier

R. Scrève

### Tarifs (Janvier 2006)

#### Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent *Mathématique et Pédagogie*, *SBPM-Infor* et les deux *Math-Jeunes*.

- Belgique :
  - Cotisation ordinaire : 24 € ;
  - Cotisation multiannuelle (5 ans) : 110 € ;
  - Cotisation familiale (réservée aux couples cohabitant ; les intéressés ne reçoivent qu'un exemplaire des publications, mais sont membres à part entière et participent donc aux élections) : 30 € ;
  - Cotisation réduite (réservée aux étudiants et aux sans-emploi) : 15 € ;
- Europe : 65 € (non-PRIOR), 72 € (PRIOR) ;
- Autres pays : 70 € (non-PRIOR), 79 € (PRIOR).

#### Abonnement à *Mathématique et Pédagogie*

- Belgique : 30 € ;
- Europe : 50 € (non-PRIOR), 54 € (PRIOR) ;
- Autres pays : 53 € (non-PRIOR), 58 € (PRIOR).

Anciens numéros :

- $< 2005$  : 0,75 €/n° + frais d'expédition.
- $\geq 2005$  : 2,50 €/n° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : Belgique : 1,80 €, Europe : 4,50 €, Autres pays : 6 €.

#### Abonnement à *Math-Jeunes* ou *Math-Jeunes Junior*

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, supérieur et inférieur respectivement, sont idéalement pris de manière groupée par l'intermédiaire d'un professeur.

- Abonnements groupés (au moins 5) :
 

|                                                    |                  |
|----------------------------------------------------|------------------|
| ◦ Abonnements groupés à une des revues (3 numéros) | Belgique : 4 € ; |
| ◦ Abonnements groupés aux deux revues (6 numéros)  | Belgique : 8 €.  |

- Abonnements individuels :
  - Abonnements à une des revues (3 numéros)  
Belgique : 6 € ;  
France : 8 € (à prendre par l'intermédiaire de l'APMEP) ;  
Europe : 18 € (non-PRIOR), 20 € (PRIOR) ;  
Autres pays : 19 € (non-PRIOR), 22 € (PRIOR).
  - Abonnements aux deux revues (6 numéros)  
Belgique : 12 € ;  
France : 16 € (à prendre par l'intermédiaire de l'APMEP) ;  
Europe : 24 € (non-PRIOR), 26 € (PRIOR) ;  
Autres pays : 25 € (non-PRIOR), 28 € (PRIOR).

Anciens numéros :

- $\leq 2003-2004$  : 0,25 €/n° + frais d'expédition.
- $\geq 2004-2005$  : 0,50 €/n° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : Belgique : 1,50 €, Europe : 2,50 €, autres pays : 3 €.

## Bulletin de l'APMEP

Les membres de la SBPMef peuvent, par versement à son compte, devenir membres de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (France). Le prix de l'abonnement est de 50 €. Ils recevront le *Bulletin* de l'APMEP, le BGV (*Bulletin à Grande Vitesse*) et *PLOT*.

Les membres de la SBPMef peuvent aussi commander par celle-ci les publications de l'APMEP ; ils bénéficient du prix « adhérents ».

## Autres publications (brochures et CD-ROM)

Les prix indiqués sont les prix des publications ; les frais d'expédition (port et emballage) sont en sus. Les prix réduits sont réservés aux membres de la SBPMef ou de sociétés associées (comme l'APMEP) et aux étudiants. N'hésitez pas à consulter notre secrétariat ou à visiter notre site Internet.

Pour toutes nos publications non périodiques, à partir du dixième exemplaire, toute la commande bénéficie d'une réduction de 10 %.

### Modalités de paiement :

Pour effectuer une commande, versez le montant indiqué sur un des comptes suivants :

- **Si vous habitez en Belgique** : Compte 000-0728014-29 de SBPMef.
- **Si vous habitez en France** : Compte CCP Lille 10 036 48 S de SBPMef.
- **Si vous habitez ailleurs** : Virement international sur l'un de nos deux comptes avec les références internationales suivantes :  
CCP BELGIQUE : IBAN BE26 0000 7280 1429 / BIC BPOTBEB1  
ou CCP LILLE :  
IBAN FR68 2004 1010 0510 0364 8S02 683 / BIC PSSTFRPPLIL

|                                                                                                                                                                                  | Prix<br>plein | Prix<br>réduit | Frais<br>d'expédition         |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|----------------|-------------------------------|
| <b>Séries RÉNOVER</b>                                                                                                                                                            |               |                |                               |
| Série 1 (n° 12)                                                                                                                                                                  | 1 €           | —              | T <sub>1</sub>                |
| Série 2 (n° 7–11 & 13)                                                                                                                                                           | 5 €           | —              | T <sub>2</sub>                |
| Série 3 (n° 14)                                                                                                                                                                  | 5 €           | —              | T <sub>2</sub>                |
| Les 3 séries                                                                                                                                                                     | 7,50 €        | —              | T <sub>2</sub>                |
| <b>Dossiers d'exploration didactique</b>                                                                                                                                         |               |                |                               |
| Dossier 2 : <i>Autour du PGCD</i>                                                                                                                                                | 1,80 €        | 1,20 €         | T <sub>1</sub>                |
| Dossier 3 : <i>Isomorphisme et Dimension</i>                                                                                                                                     | 1,80 €        | 1,20 €         | T <sub>1</sub>                |
| Dossier 6 : <i>Statistique</i>                                                                                                                                                   | 7,40 €        | 6 €            | T <sub>1</sub> <sup>(1)</sup> |
| Dossier 7 : <i>Vers les infiniment petits</i> (Simone TROMPLER et Guy NOËL)                                                                                                      | 6 €           | —              | T <sub>1</sub>                |
| Dossier 8 : <i>La démonstration en géométrie plane dans les premières années l'enseignement secondaire</i> (Claude VILLERS <i>et al.</i> )                                       | 9 €           | —              | T <sub>2</sub> <sup>(2)</sup> |
| Dossier 9 : <i>Des démonstrations à la rencontre des compétences à travers de thèmes</i> (Claude VILLERS <i>et al.</i> )                                                         | 9 €           | —              | T <sub>2</sub> <sup>(2)</sup> |
| Dossier 10 : <i>Narrations de recherche — De la théorie à la pratique dans les enseignements secondaire et supérieur</i> (Jacques BAIR, Jean-Claude DELAGARDELLE, Valérie HENRY) | 6 €           | —              | T <sub>1</sub>                |
| Jacques BAIR, <i>Mathématique et Sport</i>                                                                                                                                       | 5 €           | 3,70 €         | T <sub>1</sub>                |
| François JONGMANS, <i>Eugène Catalan, Géomètre sans patrie, ...</i>                                                                                                              | 12 €          | 9,50 €         | T <sub>2</sub>                |
| G. ROBERT, CD-ROM, logiciels mathématiques                                                                                                                                       | 5 €           | —              | T <sub>1</sub>                |
| <b>Recueils de questions des OMB</b>                                                                                                                                             |               |                |                               |
| Tome 5                                                                                                                                                                           | 6 €           | —              | T <sub>1</sub> <sup>(1)</sup> |
| Tome 6                                                                                                                                                                           | 6 €           | —              | T <sub>1</sub> <sup>(1)</sup> |
| Tomes 5 & 6 ensemble                                                                                                                                                             | 10 €          | —              | T <sub>1</sub> <sup>(1)</sup> |

<sup>(1)</sup> 2–3 ex. : T<sub>2</sub>; 4–6 ex. : T<sub>3</sub>; 7–12 ex. : T<sub>4</sub>; au-delà : consulter le secrétariat.

<sup>(2)</sup> 2 ex. : T<sub>3</sub>; 3–4 ex. : T<sub>4</sub>; au-delà : consulter le secrétariat.

| Frais d'expédition (non-PRIOR) |          |        |             |
|--------------------------------|----------|--------|-------------|
|                                | Belgique | Europe | Autres pays |
| Tarif 1                        | 1,80 €   | 4,50 € | 6 €         |
| Tarif 2                        | 3,50 €   | 8,50 € | 12 €        |
| Tarif 3                        | 5 €      |        |             |
| Tarif 4                        | 7 €      |        |             |

Pour les expéditions PRIOR :  
consulter le secrétariat.

Pour la définition d'« Europe »,  
voir les tarifs postaux.

Pour tout problème,  
consulter le secrétariat.