

**Société Belge des Professeurs de Mathématique
d'expression française**

Secrétariat : *M.-C. Carruana*, Rue du Onze novembre 24, B-7000 Mons (Belgique). Tél. : 32.(0)65.31.91.80; courriel : sbpm@sbpm.be.

Site internet : <http://www.sbpm.be>

Conseil d'administration : *B. Baudelet, M. Denis-Pecheur, É. Deridiaux, B. Desaedeleer, P. Dupont, D. Foucart, M. Frémal, Chr. Géron, M. Goffin, R. Gossez-Ketels, M. Herman, J.-P. Houben, R. Lesplingart-Midavaine, M. Machtelings, Chr. Michaux, J. Miewis, N. Miewis-Seronveaux, Ch. Randour-Gabriel, R. Scrève, Ph. Skilbecq, G. Troessaert*

Président, Olympiades Internationales : <i>G. Troessaert</i> , Sur le Chêne 58, 6800 Libramont, Tél. 061.22.42.01	Vice-Président, Portefeuille de lecture : <i>M. Herman</i> , Rue Rafhay 95, 4630 Soumagne, Tél. 087.26.70.23
Administrateur délégué : <i>Chr. Michaux</i> , Rue Brigade Piron 290, 6061 Montignies-sur-Sambre, Tél. 065.35.47.06	Congrès, Publicité : <i>M. Denis-Pecheur</i> , Rue de la Ferme 11, 5377 Noisieux (Somme-Leuze), Tél. 086.32.37.55
Trésorier, Site internet : <i>R. Scrève</i> , Rue du Corbeau 146, 6200 Châtelet, Tél. 071.40.27.34	Secrétaire : <i>M. Frémal</i> , Rue W. Jamar 311/51, 4430 Ans, Tél. 04.263.68.17
Olympiades nationales : <i>Cl. Festraets-Hamoir</i> , Rue J.-B. Vandercammen 36, 1160 Bruxelles Tél. 02.673.90.44	Contact Presse : <i>N. Miewis-Seronveaux</i> , Avenue de Péville 150, 4030 Grivegnée Tél. 04.343.19.92
Math-Jeunes Junior : <i>A. Paternotte</i> , Rue du Moulin 78, 7300 Boussu, Tél. 065.78.50.64	Math-Jeunes Senior : <i>G. Noël</i> , Chemin de la procession 396, 7000 Mons, Tél. 084.38.72.89
SBPM-Infor : <i>R. Gossez</i> , Albert I Laan 13, 1560 Hoeilaart, Tél. 02.657.98.92	

Mathématique et Pédagogie :

P. Dupont, Rue du Stampia 77, 1390 Grez-Doiceau, Tél. 010.84.11.99

Comité de lecture : *J. Bair, A.-M. Bleuart, M. Denis-Pecheur, V. Henry, M. Herman, J.-P. Houben, Chr. Michaux, J. Miewis, J. Navez, G. Noël, Ph. Skilbecq, Cl. Villers*

Photo de couverture : *Paraboloïde hyperbolique à grimper* (Rye, Sussex, avril 2007) —

Photo P. Dupont



Mathématique et Pédagogie

Sommaire

Articles

- Francis Buekenhout, Monique Frédérickx, *Ori-
entation* 3
- Jean-Paul Houben, *Cabri-Géomètre et les rota-
tions dans l'espace* 13
- Maria Flavia Mammana, Mario Pennisi, *Analyse
de situations-problèmes concernant des quadri-
latères : intuitions, conjectures, déductions* 21
- Yolande Noël-Roch, *Avancer, tourner* 35
- Hugues Vermeiren, *Les mancalas et leur exploi-
tation didactique* 41

Rubriques

- Cl. Festraets, *Problèmes* 65
- Cl. Festraets, *Olympiades* 71
- R. Scrève, *Le coin du trésorier* 77

NOTE

- Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse :
Pascal Dupont, Rue du Stampia 77, B - 1390 Grez-Doiceau.
Courriel : `pascal.dupont@ulg.ac.be`
- Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique *stricto sensu*, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques, &c.
- Les auteurs sont responsables des idées qu'ils expriment. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.
- Les auteurs sont invités à envoyer leurs articles encodés sur un CD-rom ou par courrier électronique. L'usage de \LaTeX est vivement recommandé ; d'autres traitements de texte ne devraient être utilisés que pour des textes ne comportant pas de formules ; dans ce cas, le format « texte seul » est finalement encore préférable. À défaut, les textes seront dactylographiés. *Les textes devant être réencodés, en tout ou en partie, risquent de voir leur délai de parution allongé de manière appréciable.*
- Si l'article en contient, la qualité des figures est extrêmement importante. Elles devraient être réalisées selon l'une des modalités suivantes, dans l'ordre des préférences décroissantes : l'usage, dans le texte, de l'environnement « tikzpicture » (défini dans le paquet « tikz ») ; l'inclusion de fichiers externes, au format PDF ou JPEG (éviter les compressions trop importantes) : le PostScript devra être converti ; dans le cas d'un article envoyé sur papier, des documents de bonne qualité et prêts à être scannés.
- L'auteur mentionnera dans l'article ses prénom, nom et adresse (personnelle ou professionnelle) ainsi que l'institution où il travaille et, éventuellement, une liste de mots clés (10 maximum).
- La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous.
Pour les livres :
DIEUDONNÉ J., *Foundations of Modern Analysis*, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pp.
Pour les articles :
GRIBAUMONT A., Les structures de programmation, *Mathématique & Pédagogie*, **36** (1982), 53–56.
- Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée ; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour ce faire.
- MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

©SBPMef - Toute reproduction partielle ou totale est interdite sans autorisation.
Éditeur responsable : Pascal Dupont, Rue du Stampia 77, 1390 Grez-Doiceau.
Publié avec l'appui de l'Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Service général du Pilotage du système éducatif.

Orientation

**FRANCIS BUEKENHOUT,
MONIQUE FRÉDERICKX
ULB - UREM**

1. Introduction

Nous présentons un texte mis au point en 1986 dans le cadre de la rédaction d'un manuel de cinquième (voir [2]). Ce texte fut enseigné tel quel par Monique Frédérickx durant une dizaine d'années à l'Athénée Royal Riva Bella de Braine l'Alleud et ensuite dans son cours de Géométrie à la Division préparatoire de l'École Royale Militaire.

En 1986, l'inspiration et les fabuleux dessins furent obtenus dans le cours de Géométrie de Buekenhout et Doyen [1] enseigné en première année de mathématique et physique de 1971 à 2002. Les dessins avaient été empruntés à la célèbre chronique de Martin Gardner pour le *Scientific American*. On en retrouve la trace dans [4].

La matière présentée requiert peu d'heures et peu de prérequis. Il convient d'être quelque peu familier avec les notions de symétrie orthogonale, de symétrie centrée, de déplacement et d'isométrie dans l'espace.

Notre texte possède un compagnon récent [3] qui présente un développement théorique de la chiralité. Dans un développement épistémologique, notre texte précéderait [3]; dans un développement théorique mathématique, il lui offre un champ d'application.

2. Gauche, droite

Certaines figures de l'espace E^3 se présentent sous deux formes isométriques mais non superposables par déplacement comme une main gauche et une main droite. C'est le cas de molécules extrêmement complexes rencontrées en biologie, comme l'ADN et les protéines. C'est le cas des chromosomes et des gènes et parfois, de molécules beaucoup plus simples mises en évidence par Pasteur dès le XIX^e siècle. D'autres figures, notamment les plus courantes en géométrie n'ont pas cette particularité.

Nous dirons qu'une figure de E^3 est *orientée* s'il existe une image de F par une isométrie $i(F)$ qui n'est pas superposable à F par un déplacement. Si au contraire, toute image isométrique $i(F)$ est superposable à F par un déplacement, nous dirons que F est *non orientée*. Par exemple, une main est orientée, une sphère est non orientée.

REMARQUE : Nous nous abstenons d'utiliser le mot *orientable* et nous invitons le lecteur à la prudence. Si une figure mérite d'être orientable, elle n'est certainement pas orientée. Le mot orientable serait-il dès lors synonyme de non orienté? Oui. Il convient, croyons-nous, de ne pas développer la confusion au niveau où nous nous situons.

EXERCICES :

1. (a) Passer en revue des figures connues et décider si elles sont orientées ou non orientées (ex. : sphère, cylindre, plan, hélice, pyramide oblique, cylindre oblique, parallélépipède à côtés non perpendiculaires, modèles de polyèdres, modèles de molécules...).
- (b) Décrire cinq figures orientées, n'apparaissant pas dans la liste précédente.
- (c) Apporter en classe des figures orientées et une de leurs images isométriques non superposables par déplacement.
- (d) Construire des modèles de figures orientées.
2. (a) À votre avis, quelle est la situation la plus fréquente pour une figure de l'espace : être orientée ou non orientée?
- (b) Et qu'en est-il pour les objets fabriqués par l'Homme?
- (c) Le corps humain est-il orienté ou non orienté?
3. Une figure F est constituée par $A \cup B$ où A est une figure orientée et B est l'image de A par une symétrie orthogonale. La figure F est-elle orientée?

3. Comprendre la gauche et la droite

Considérons deux figures F et F' isométriques mais non superposables par déplacement. Nous dirons alors qu'elles ont une orientation différente. Si G est une figure isométrique à F , peut-on affirmer que G est superposable à F ou à F' par un déplacement? On a $F' = r(F)$ où r est un retournement et $G = i(F)$ où i est une isométrie. Comment passe-t-on de F' à G ? Par $i \circ \bar{r}^{-1}$ tout simplement. En effet, $i \circ \bar{r}^{-1}(F') = i(F) = G$. Si i est un retournement, F' est superposable à G et si i est un déplacement, F est superposable à G . Nous avons démontré le

Théorème. *Si F est une figure orientée, les figures isométriques à F se répartissent en deux ensembles disjoints Φ et Φ' . Toutes les figures appartenant à Φ sont superposables entre elles par un déplacement, de même que celles appartenant à Φ' . Toute figure de Φ est applicable sur une figure de Φ' par un retournement.*

Ceci explique le phénomène constitué de mains gauches et de mains droites. Nous pouvons décider que les membres de Φ sont appelés *droits* et les membres de Φ' *gauches* ou le contraire.

Il faut bien comprendre que les figures gauches et les figures droites ont les mêmes propriétés intrinsèques. Ce sont les couples de figures qui sont différenciées par le caractère gauche ou droit. La structure du corps humain est largement, mais non totalement, non orientée. Ceci explique nos difficultés à distinguer la gauche de la droite.

Il existe des molécules qui se présentent sous une forme gauche et sous une forme droite. Cette particularité joue un grand rôle dans l'industrie pharmaceutique. La forme gauche peut parfois être produite par le corps humain sans que la forme droite le soit. Mais cette dernière peut s'avérer efficace comme médicament. Si on tient compte de sa structure chimique profonde, le corps humain est donc orienté sans discussion possible.

EXERCICES :

4. Que devient le théorème ci-dessus pour une figure non orientée? L'énoncer correctement et le démontrer.
5. Construire des modèles de molécules à base de carbone et d'hydrogène qui sont orientées. Enquêter quant à la présence des deux formes, gauche et droite, de ces molécules dans les organismes vivants.
6. Examiner
 - (a) Une boîte de vis;

- (b) Une boîte de pâtes torsadées ;
- (c) Des coquillages (à peu près) isométriques ;
- (d) Une autre collection de figures isométriques rencontrées dans le monde vivant.

Dans chaque cas, les objets considérés ont-ils la même orientation ?

4. Pour reconnaître qu'une figure est orientée

La définition que nous avons adoptée pour les figures orientées présente un gros inconvénient. Pour décider que F est non orientée, il faut en principe comparer F à toute image isométrique de F , et comme le nombre de ces images est généralement infini, cela présente une certaine difficulté. Ne peut-on vérifier que F est orientée ou non orientée sans devoir passer en revue toutes ces images isométriques ? Voici une réponse à cette question :

Théorème. *Soit F une figure.*

- (a) *F est orientée si et seulement si toute isométrie conservant F est un déplacement.*
- (b) *F est non orientée si et seulement s'il existe un retournement conservant F .*

DÉMONSTRATION. Un petit rappel de logique sera utile : Si p et q désignent des propriétés et \bar{p} , \bar{q} leurs négations, on sait que :

- (1) $p \Rightarrow q$ est équivalent à $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$;
- (2) p et \bar{p} ne peuvent être simultanément vraies.

Une démonstration basée sur (1) est une démonstration par contraposition.

Une démonstration basée sur (2) est une démonstration par l'absurde.

Soit p la proposition « F est orientée » et q la propriété « toute isométrie conservant F est un déplacement ». L'énoncé (a) du théorème affirme $p \Leftrightarrow q$ et l'énoncé (b) affirme $\bar{p} \Leftrightarrow \bar{q}$. Grâce à (1), il suffit d'établir (a). Prouvons d'abord que $p \Rightarrow q$.

Supposons donc que F est orientée. Il faut prouver qu'une isométrie i conservant F est nécessairement un déplacement. Nous procédons par l'absurde en supposant que i est un retournement. Comme F est orientée, il existe une figure F' isométrique à F et d'orientation différente. Donc il existe un retournement r tel que $F' = r(F)$. Dès lors, $r \circ i$ est un produit de deux retournements, c'est-à-dire un déplacement qui transforme F en F' . Ceci est une contradiction car F et F' ont une orientation différente. Donc i est un déplacement. On a bien $p \Rightarrow q$.

Prouvons que $q \Rightarrow p$. Donc, nous supposons que toute isométrie conservant F est un déplacement. Soit r un retournement et $F' = r(F)$. Nous voulons prouver que F et F' ont une orientation différente. Procédons à nouveau par l'absurde en supposant qu'il existe un déplacement d tel que $d(F) = F'$. Dans ce cas, $d^{-1} \circ r$ est un retournement qui conserve F , contrairement à l'hypothèse initiale et ceci est une contradiction. On a bien $q \Rightarrow p$.

EXERCICES :

7. Utiliser le théorème précédent pour déterminer :
 - (a) Les parallélépipèdes qui sont non orientés ;
 - (b) Les pyramides qui sont non orientées ;
 - (c) Les cylindres circulaires illimités qui sont non orientés ;
 - (d) Des figures planes qui sont non orientées.
8. Considérer une collection de modèles de polyèdres et d'autres corps solides et les répartir en deux collections selon qu'ils sont orientés ou non.
9. Quels sont, parmi les corps solides de la figure 1, ceux qui ont la même orientation ?

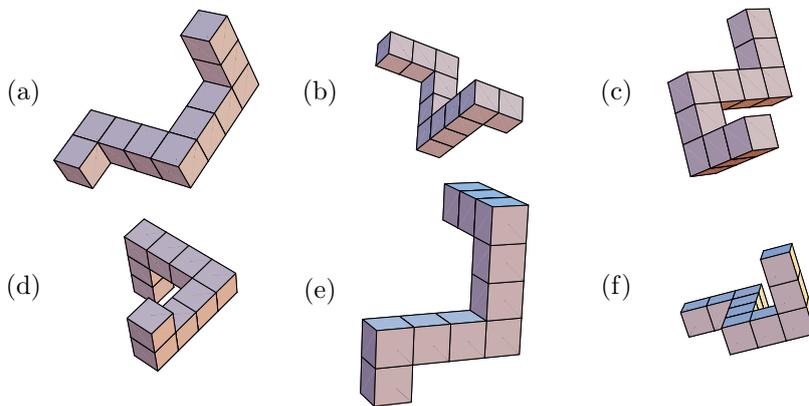


FIG. 1 –

10. Les corps solides des figures 2 et 3 sont-ils orientés ou non orientés ? (Pour chacun des solides de la figure 2, le nombre de cubes qui le composent est indiqué à côté de l'étiquette pour éviter toute ambiguïté).

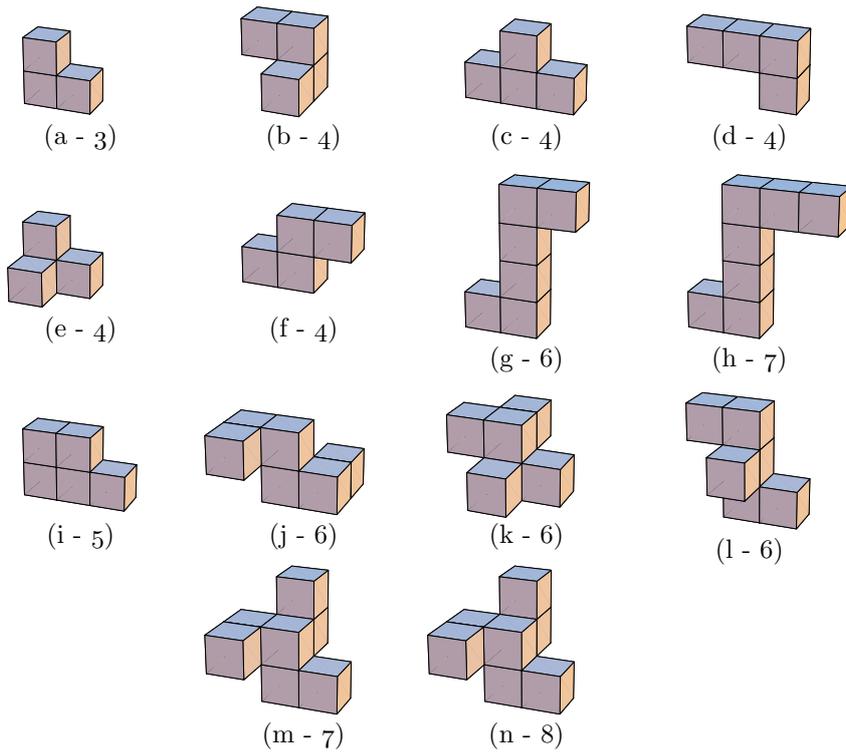


FIG. 2 –

5. Orienter une figure non orientée

Considérons une figure F qui est non orientée, par exemple un plan, une sphère, un cylindre circulaire illimité, un cube, une droite, un point. Soit $\text{Dep}(F)$ le groupe des déplacements qui conservent F et $\text{Iso}(F)$ le groupe des isométries qui conservent F . Nous savons qu'il existe au moins un retournement qui conserve F et par conséquent $\text{Iso}(F)$ se décompose en deux parties non vides et disjointes : $\text{Dep}(F)$ et $\text{Ret}(F)$ (retournements qui conservent F). Ces deux ensembles permettent de concevoir une théorie de l'orientation de F analogue à celle élaborée pour l'espace. Voici des exemples :

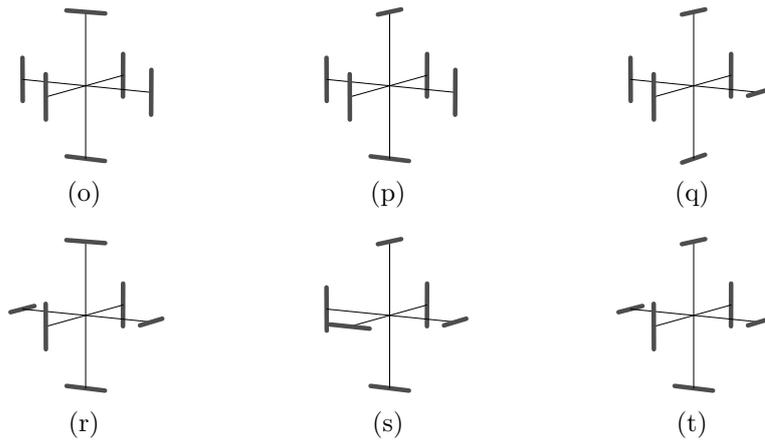


FIG. 3 –

EXEMPLE 1 : F est une droite. Cette fois, la droite joue le rôle de l'espace E^3 . Nous observons :

- Des figures orientées : demi-droite fermée; demi-droite ouverte; vecteur non nul; translation; graduation;
- Et des figures non orientées : point; segment fermé; segment ouvert; symétrie centrée; échelle (graduation dont on oublie l'origine et l'unité).

EXEMPLE 2 : F est un plan et joue le rôle de l'espace. Nous observons :

- Des figures orientées : triangle non isocèle; parallélogramme autre que losange et rectangle; cercle muni d'un sens de parcours (cercle orienté); angle orienté;
- Et des figures non orientées : demi-droite (fermée ou ouverte); vecteur non nul; translation; triangle isocèle; rectangle; losange; cerf-volant convexe; cerf-volant concave; cercle; angle; plan.

6. Modifier l'orientation

Si F est un espace dont les isométries se répartissent en déplacements et en retournements, nous résumons les propriétés de ces transformations en disant que les déplacements conservent l'orientation de F et que les retournements modifient l'orientation de F .

EXERCICE :

11. Dresser une liste de figures orientées et non orientées dans l'espace F si
- (a) F est une sphère;
 - (b) F est un cylindre circulaire droit illimité;
 - (c) F est un cube.

Considérons un espace F non orienté c'est-à-dire qui possède des retournements de F . Soit r un retournement de F . Soit f une figure orientée de F . Que dire de $r(f)$ par rapport à f ? Est-il exclu que f et $r(f)$ soient superposables par un déplacement d ?

Si d existe, $d(f) = r(f)$, $(\bar{r}^{-1} \circ d)(f) = f$ et $\bar{r}^{-1} \circ d$ est un retournement qui conserve f , donc f est non orientée et on a une contradiction. Dès lors, f et $r(f)$ ne sont pas superposables. Dans ce cas nous disons que r *modifie l'orientation* de f . Si nous avons convenu de dire que f est une figure gauche (respectivement une figure droite) nous ajouterions à présent que $r(f)$ est une figure droite (respectivement une figure gauche).

Insistons sur le fait que l'orientabilité d'une figure f est tributaire de l'espace F dans lequel elle est plongée : c'est le couple (F, f) qui est orienté. Dans les exercices suivants, on fixera f , on laissera varier F et on verra que l'orientation en est affectée.

EXERCICES :

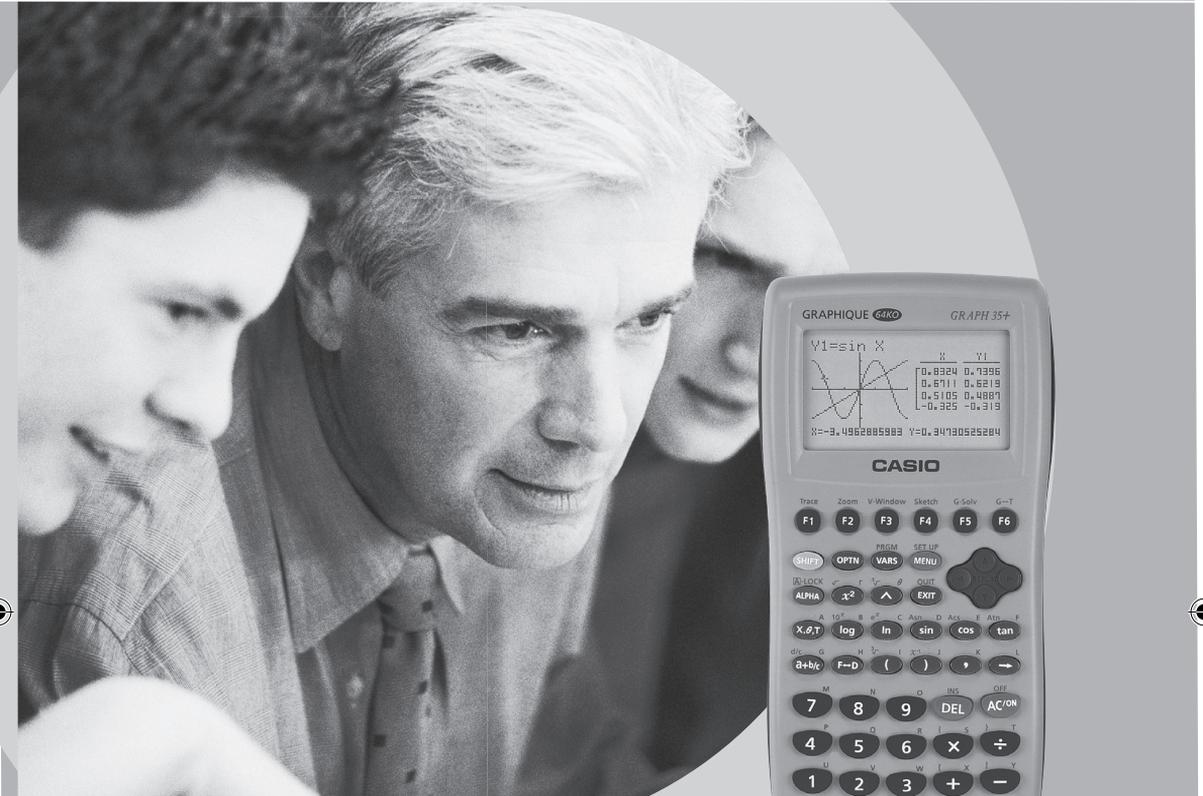
12. Soit f une figure orientée du plan F . Remplaçons F par l'espace F' de dimension 3. La figure f de F' est-elle orientée? Dessinez des exemples.
13. Soit f une figure orientée de la droite F . Remplaçons successivement F par le plan F' puis par l'espace F'' de dimension 3. La figure f de F' (respectivement F'') est-elle orientée? Dessinez des exemples.
14. Une symétrie centrée de F est-elle un retournement si F est successivement la droite, le plan, l'espace à 3 dimensions?

Bibliographie

- [1] Francis BUEKENHOUT, Jean DOYEN, *Espaces euclidiens*, Presses Universitaires de Bruxelles, 1975.
- [2] Francis BUEKENHOUT, Monique FRÉDERICKX, *Mathématique 5^e*, Manuscrit non publié (266 pages), 1986.

- [3] Francis BUEKENHOUT, La gauche et la droite en géométrie élémentaire, *Mathématique & Pédagogie*, **161** (2007), 13–30.
- [4] Martin GARDNER, *Knotted doughnuts and other mathematical entertainments*, Freeman, New York, 1986.

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE



GRAPH 35+

DES CALCULATRICES ADAPTÉES À CHAQUE NIVEAU SCOLAIRE

- 9 modèles de calculatrices scientifiques et graphiques pour accompagner les élèves tout au long de leur scolarité
- Légères, solides et faciles à utiliser
- Tous les modèles scolaires sont garantis trois ans



CASIO
www.cas-bel.com

Cabri-Géomètre et les rotations dans l'espace

JEAN-PAUL HOUBEN
Université Catholique de Louvain

MOTS CLÉS — Cabri-Géomètre. Rotation. Cube.

Dans l'article [1] sur la perspective, on a cherché à représenter un cube, un cercle et un cône en perspective cavalière. Nous allons aujourd'hui reprendre ce cube et le faire tourner autour d'un axe vertical.

Le trièdre de référence

Commençons par définir la perspective et construire la perspective cavalière d'un cercle.

Sur une droite horizontale, prenons un segment OA . Construisons la perpendiculaire en O à OA et, en utilisant le cercle de centre O passant par A , déterminons le segment OB sur la droite verticale. Prenons un point C , intérieur au cercle ⁽¹⁾.

Les quatre points O , A , B et C déterminent un trièdre de sommet O , qui définit la perspective que nous allons utiliser (Fig. 1).

Reprenons la construction expliquée dans [1]. Nous avons 4 points particuliers : A et C et leurs symétriques par rapport à O , A' et C' .

On obtiendra un cinquième point en construisant successivement :

- La bissectrice d'un des angles droits en O ,
- L'intersection X de cette bissectrice avec le cercle et
- Le triangle XYZ semblable au triangle BOC .

Le point Z est le cinquième point pour construire la conique.

Adresse de l'auteur : Jean-Paul Houben, Rue de l'Église 78, 1301 Bierges; courriel : houbenjp@versatelads1.be.

⁽¹⁾ Dans le dessin technique, C se trouve sur la bissectrice de l'angle droit et la distance à O est égale à $r/2$ ou $r/\sqrt{2}$ selon l'option choisie.

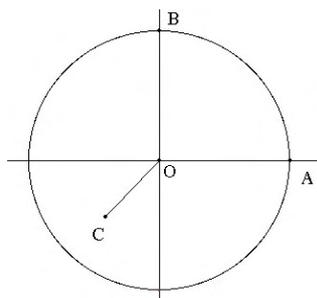


FIG. 1 –

Nous pouvons tracer l'ellipse passant par les 5 points du plan AOC . Ceci nous donne la Fig. 2.

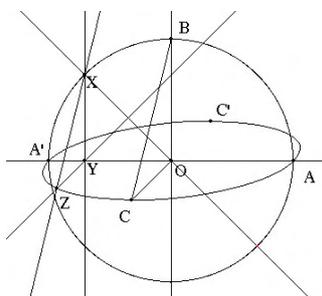


FIG. 2 –

Prenons maintenant un point M du cercle et traçons le rayon OM . En O , menons la droite perpendiculaire à OM , ce qui nous donne le point N du cercle. L'angle droit est marqué dans la figure. En utilisant des triangles semblables au triangle OBC , on construit sur l'ellipse les images des points M et N . Terminons en traçant les rayons issus de O . Nous avons alors la Fig. 3. Si nous cachons nos constructions, il nous reste la Fig. 4.

Dans ce dessin, nous avons un point mobile M sur le cercle et son déplacement modifie la position des deux rayons horizontaux. Nous avons en fonction de la rotation de M l'image en perspective cavalière d'un angle droit qui tourne horizontalement autour de l'axe vertical BO .

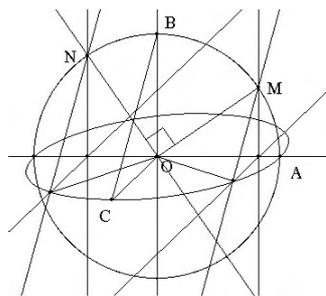


FIG. 3 -

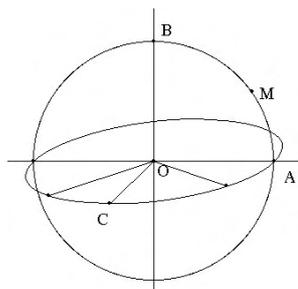


FIG. 4 -

Réduisons la taille de notre figure et plaçons-la dans le coin inférieur droit (ou gauche). Traçons un vecteur ⁽²⁾ issu du point O et dont l'extrémité est à peu près au centre de l'écran. Terminons cette partie de la construction en translatant suivant ce vecteur le segment OB , et les deux rayons horizontaux images d'un angle droit en perspective cavalière. Le mouvement de M fait tourner le trièdre trirectangle autour d'un axe vertical (Fig. 5).

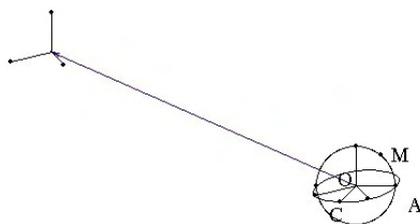


FIG. 5 -

⁽²⁾ Lignes / Vecteur

Le cube

Si nous cachons maintenant les éléments non indispensables, nous obtenons la Fig. 6.

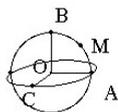
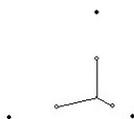


FIG. 6 –

On peut y considérer le point M comme moteur de la rotation ; le trièdre est central à un futur cube. Nous pouvons agrandir les segments du trièdre par une homothétie de rapport k variable (éventuellement modifiable avec les flèches \uparrow et \downarrow). Les extrémités des segments qui déterminent le trièdre peuvent être envisagées comme les milieux de trois des faces d'un futur cube (Fig. 7).



$k = 2,2$

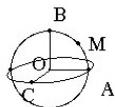


FIG. 7 –

Construisons dans le cube la section avec le plan horizontal passant par le centre. Par les milieux des faces ⁽³⁾, traçons les parallèles aux deux vecteurs horizontaux du trièdre central. Ceci donne la Fig. 8.

Dessinons les deux vecteurs issus du centre et dirigés respectivement vers le centre de la face supérieure et le centre de la face inférieure (obtenu par une symétrie centrale). Translatons la section suivant ces deux vecteurs. On a alors la Fig. 9.

⁽³⁾ On les obtient tous par trois symétrie centrale

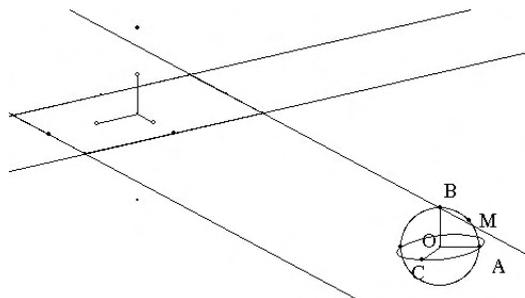


FIG. 8 –

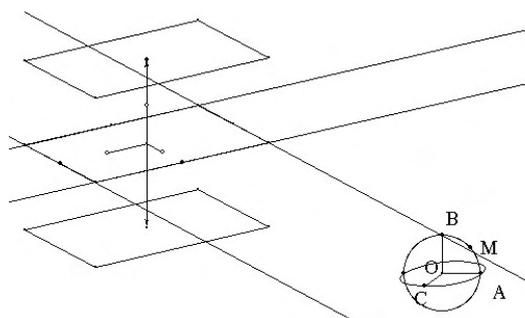


FIG. 9 –

En cachant les éléments de construction, il reste le cube que nous achevons en traçant toutes ses arêtes (Fig. 10).

Nous pouvons agir sur cette figure du cube en modifiant la position de C , pour changer la perspective, ou celle de M , pour le faire tourner, ou la valeur de k , pour l'agrandir ou le réduire.

Problème des vus et cachés

Le problème qui reste est plus délicat. Il s'agit des vus et cachés lorsque le cube est en rotation. Pour nous y retrouver, nommons les sommets de la base supérieure : A , B , C et D . Dans la rotation autour de l'axe vertical, la base supérieure est toujours vue : nous la traçons en traits plus épais ⁽⁴⁾ (Fig. 11).

Par contre les arêtes verticales passant par les sommets A , B , C et D sont vues ou cachées suivant leur position dans la rotation.

⁽⁴⁾ **Aspect** / *Epaissir*

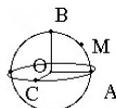
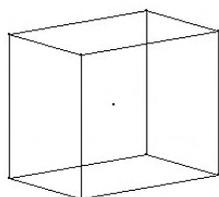


FIG. 10 -

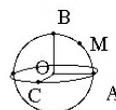
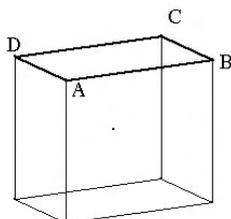


FIG. 11 -

Dans la figure, la face avant contenant AB est vue lorsque le point A est à gauche de l'arête passant par B . Par contre pour la face cachée contenant BC , le point B est à droite de l'arête passant par C . Pour se rendre compte du changement de latéralité, il suffit de faire tourner doucement le cube.

Nous allons devoir élaborer une macro qui va dédoubler un point seulement lorsqu'il est à gauche d'une droite. C'est une macro dite *logique*.

Prenons deux points A et B (Fig. 12). Traçons la droite passant par ces deux points. Plaçons un point X à gauche de cette droite. Construisons le triangle équilatéral ABP à l'aide de deux cercles centrés en A et en B . Le point P a été placé en prenant le point ⁽⁵⁾ sur les deux cercles ; pour cela, on amène le crayon de Cabri-Géomètre et on le lâche lorsqu'on a le message : « Point à cette intersection ».

On trace le segment qui relie X à P , et on cherche son intersection avec la droite passant par A et B : le point Q . On prend le point milieu de QX ,

⁽⁵⁾ Points / Point

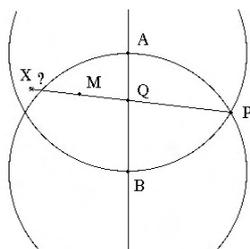


FIG. 12 –

soit M . On termine en construisant le symétrique de Q par rapport à M . On retrouve donc en X un second point, noté $?$, qui n'existe que si le point est à gauche de AB . Car s'il est à droite, il n'y a plus de point Q , donc plus de M ni de point noté $?$.

Nous allons en faire une macro notée **Régions** ⁽⁶⁾ avec comme éléments initiaux les points A , B et X , et comme élément final le point noté $?$.

L'aide sera rédigée comme suit : *On donne deux points et un troisième extérieur à la droite des deux premiers. La macro dédouble ce point s'il est à gauche de la droite AB .*

Reprenons maintenant notre cube. Utilisons la macro **Régions**, appliquée aux extrémités de l'arête passant par B et le point A qui va être dédoublé. Construisons la face visible en utilisant l'objet Polygone ⁽⁷⁾ en commençant par le point double de A . Pour marquer le vu, utilisons l'Aspect / *Epaissir*, et on a la Fig. 13.

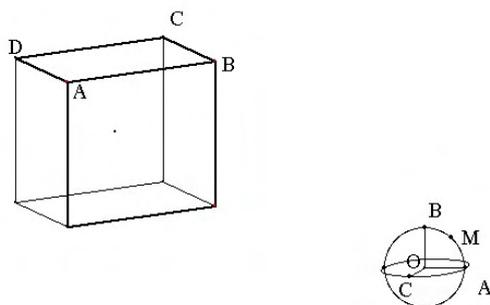


FIG. 13 –

⁽⁶⁾ Enregistrée sous le nom : REGION.MAC

⁽⁷⁾ Lignes / Polygone

On tourne le cube d'un quart de tour, pour amener la face contenant AD vers l'avant. On réutilise la macro, on dessine le polygone qu'on épaisit. Cela donne la Fig. 14.

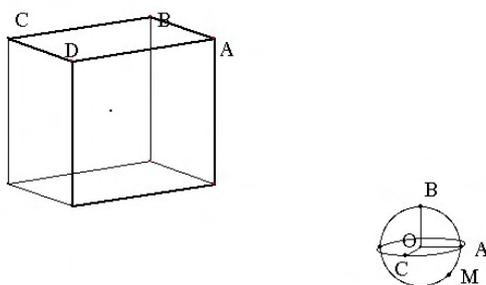


FIG. 14 –

Puis encore deux rotations d'un quart de tour avec les mêmes constructions. On a finalement la Fig. 15. Nous pouvons maintenant faire tourner le cube en faisant apparaître les vus et les cachés.

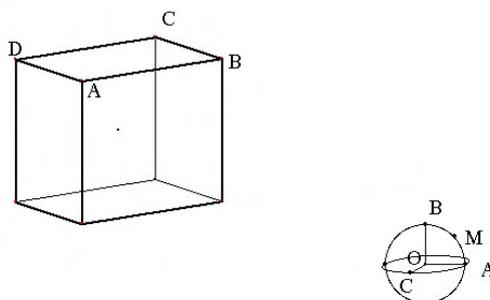


FIG. 15 –

On peut maintenant faire de même pour les autres polyèdres de Platon : le tétraèdre, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre. On trouvera sur le site de la SBPMef (www.sbp.m.be) les fichiers permettant de les faire tourner : TETRA.FIG, CUBE.FIG, OCTA.FIG, DODECA.FIG et ICO.FIG.

Bibliographie

- [1] Jean-Paul HOUBEN, Perspective cavalière : le cube, le cercle, le cône, *Mathématique & Pédagogie*, **143** (2003), 25–31.

Analyse de situations-problèmes concernant des quadrilatères : intuitions, conjectures, déductions

MARIA FLAVIA MAMMANA, MARIO PENNISI
Département de Mathématique et Informatique
Université de Catane

1. Introduction

L'activité de démontrer est un moment d'importance capitale dans l'apprentissage du raisonnement et doit, donc, forcément être présent dans tout parcours éducatif en mathématique. Le raisonnement mathématique est plus riche que la simple déduction formelle et il ne peut par conséquent être réduit au seul apprentissage formel de la démonstration.

La phase de démonstration est, de fait, essentielle pour garantir la sûreté et la rigueur, mais elle n'est pas certes l'unique activité du mathématicien. Dans son travail de recherche, nous pouvons identifier une phase « expérimentale », qui précède à la démonstration, et qui se compose de la découverte et de la formulation des conjectures et encore de leur examen critique par le biais d'exemples et de contre-exemples.

Dans l'enseignement, il ne faut pas oublier que la démonstration n'est que la phase ultime d'un développement génétique, épistémologique et psychologique. Il est partant essentiel de construire un milieu d'enseignement-apprentissage qui se fonde sur une activité d'observation et d'exploration de situations mathématiques et qui vise à l'élaboration de conjectures à soumettre à un examen critique et à leur validation convaincante par des démonstrations, dans un dialogue constant entre intuition et déduction.

Adresses des auteurs : Dipartimento di Matematica e Informatica, Viale Andrea Doria 6,
I - 95125 Catania, Italie ; courriel : pennisi@dmi.unict.it, fmammana@dmi.unict.it.

De ce point de vue, le raisonnement géométrique, se fondant sur l'observation des figures, constitue un domaine de travail privilégié, bien qu'il ne soit pas le seul. Dans le domaine de la géométrie, il est plus facile de se confronter à d'opportuns problèmes « ouverts », marqués par des énoncés brefs et de compréhension aisée, où on ne requiert pas de démontrer, mais de découvrir ce qui se passe. Un des éléments essentiels dans ce genre d'activité consiste, en fait, à pouvoir disposer d'une « bibliothèque » de problèmes, ou bien de « situations-problèmes » à explorer, qui requièrent une véritable activité de recherche (cf. [8], [7], [6], [3], [5]).

Un autre élément crucial dans cette activité de recherche est l'utilisation de moyens informatiques et, notamment, de logiciels géométriques de type dynamique, comme *Cabri Géomètre*, qui aident et intensifient les activités d'observation et d'exploration des situations à étudier et qui, tout en simplifiant les figures et en permettant leur manipulation, se révèlent efficaces afin de comprendre intuitivement des propriétés, de proposer des conjectures et de suggérer des stratégies de démonstration probables.

Dans cet article, nous proposons et étudions quelques « situations-problèmes » qui possèdent les caractéristiques du genre d'activité évoquée ci-dessus et nous vous présentons des suggestions pour que cette activité soit développée en classe.

2. Situations-problèmes à explorer

Soit Q un quadrilatère convexe, ayant pour sommets A_1 , A_2 , A_3 et A_4 , et soit D le point commun à ses diagonales A_1A_3 et A_2A_4 .

Notons T_1 , T_2 , T_3 , T_4 , respectivement, les triangles A_1A_2D , A_2A_3D , A_3A_4D , A_4A_1D .

Dans les paragraphes qui suivent nous vous proposons des situations-problèmes qui concernent les quadrilatères ayant pour sommets les barycentres (en fait, les *isobarycentres*, c'est-à-dire les centres de gravité), les *cyclocentres* c'est-à-dire les centres des cercles circonscrits, les *orthocentres* et les *incentres* c'est-à-dire les centres des cercles inscrits aux triangles T_i .

Pour l'étude de ces situations-problèmes, il faut établir un parcours didactique qui conduise les étudiants à la découverte des propriétés dont jouissent ces nouveaux objets mathématiques qui se créent à partir du qua-

drilatère Q . Un tel parcours doit être adapté aux capacités des étudiants et aux expériences qu'ils ont acquises dans des activités similaires.

Les étapes essentielles du parcours didactique sont :

1. La découverte de propriétés des nouveaux objets mathématiques : celles qui ne varient pas lorsque nous modifions le quadrilatère Q ou celles que nous pouvons identifier si nous particularisons Q ;
2. La découverte de propriétés qui lient ces objets à certains éléments de Q (côtés, diagonales, angles, ...);
3. La découverte de propriétés qui sautent aux yeux lorsque nous introduisons un objet mathématique auxiliaire bien utile : le parallélogramme de Varignon de Q .

La recherche et la découverte de ces propriétés doivent se produire, dans un premier temps, de façon intuitive, à l'aide de *Cabri*. Toutefois, l'enseignant mettra en exergue qu'à l'aide de *Cabri*, il n'est possible de vérifier qu'un nombre fini de cas, et dans un deuxième temps, il conduira les étudiants à la démonstration de différentes conjectures.

Il ne faut pas oublier que le parallélogramme de Varignon de Q est le quadrilatère ayant pour sommets les milieux V_i des côtés de Q (cf. [2]). Chaque côté de ce parallélogramme est parallèle à une des diagonales de Q et en vaut la moitié ; par conséquent le périmètre du parallélogramme de Varignon est égal à la somme des longueurs des diagonales de Q ; en outre, son aire est la moitié de l'aire de Q (théorème de Varignon).

3. Le parallélogramme barycentrique

Considérons le quadrilatère $B_1B_2B_3B_4$ ayant pour sommets les (iso)barycentres B_i des triangles T_i , que nous appellerons *quadrilatère barycentrique* de Q et que nous noterons Q_b (Fig. 1).

La première situation-problème à explorer se fonde sur l'étude de Q_b . Voilà en résumé les étapes du parcours didactique :

1. En variant Q nous découvrons que Q_b est toujours un parallélogramme, parce que ses côtés opposés se révèlent parallèles ;
2. Nous remarquons que les côtés du parallélogramme sont parallèles aux diagonales de Q ;

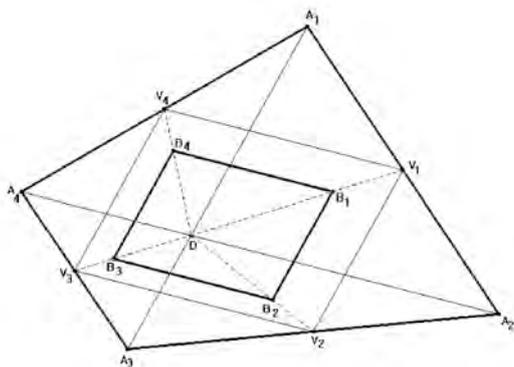


FIG. 1 –

3. Nous souvenant que le parallélogramme de Varignon a ses côtés parallèles aux diagonales de Q , nous découvrons que Q_b et le parallélogramme de Varignon sont semblables, ou mieux, homothétiques dans une homothétie qui a pour centre le point commun aux diagonales de Q .

Suite à cette activité d'exploration et de découverte, développée à l'aide de *Cabri*, nous poursuivons par la démonstration des propriétés suivantes.

Théorème 1. *Le quadrilatère barycentrique de Q est homothétique au parallélogramme de Varignon de Q .*

En effet, DV_i est une médiane du triangle T_i ; par conséquent elle passe par B_i et en outre, nous avons $DB_i = \frac{2}{3}DV_i$.

Il en suit que le quadrilatère Q_b est le correspondant du parallélogramme de Varignon dans l'homothétie directe de centre D et rapport $2/3$.

Du théorème 1, il résulte que le quadrilatère barycentrique de Q est un parallélogramme ayant les côtés parallèles à ceux du parallélogramme de Varignon et, par conséquent, aussi aux diagonales de Q .

Donc, nous nommerons le quadrilatère Q_b *parallélogramme barycentrique* de Q .

Nous pouvons observer que le rapport de similitude entre Q_b et le parallélogramme de Varignon est $2/3$, et partant, par le théorème de Varignon,

le périmètre du parallélogramme barycentrique de Q est égal à $2/3$ de la somme des diagonales de Q et son aire est égale à $2/9$ de l'aire de Q .

4. Le parallélogramme cyclocentrique

Considérons le quadrilatère $C_1C_2C_3C_4$ ayant pour sommets les cyclocentres C_i des triangles T_i , que nous appellerons *quadrilatère cyclocentrique* de Q et que nous noterons Q_c (Fig. 2).

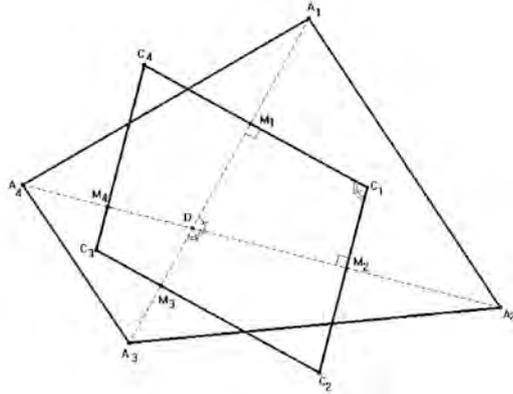


FIG. 2 –

Le parcours didactique concernant l'étude de Q_c se développe de la même manière que dans le cas du quadrilatère barycentrique et nous parvenons aux propriétés suivantes.

Théorème 2. *Le quadrilatère cyclocentrique de Q est semblable au parallélogramme de Varignon de Q et, en particulier, coïncide avec lui si et seulement si Q a les diagonales orthogonales.*

Notons M_i le milieu du segment DA_i .

Les points C_1 et C_2 appartiennent à la médiatrice du segment DA_2 , donc la droite C_1C_2 est perpendiculaire à la diagonale A_2A_4 de Q ; pareillement, la droite C_3C_4 est perpendiculaire à A_2A_4 et les droites C_1C_4 et C_2C_3 sont perpendiculaires à A_1A_3 . Par conséquent, le quadrilatère Q_c est un parallélogramme ayant les côtés perpendiculaires aux diagonales de Q .

En outre, $A_1A_3 = 2M_1M_3$ et $A_2A_4 = 2M_2M_4$, donc nous avons :

$$\frac{M_1M_3}{M_2M_4} = \frac{A_1A_3}{A_2A_4}.$$

Par conséquent, le rapport des hauteurs du parallélogramme Q_c , relatives à deux côtés consécutifs, est égal au rapport des diagonales de Q . Toutefois, dans un parallélogramme, le rapport des hauteurs est égal au rapport des côtés relatifs : il en découle que le rapport des deux côtés consécutifs de Q_c est égal au rapport des diagonales de Q .

De plus, les angles du parallélogramme Q_c sont égaux aux angles formés par les diagonales de Q . Par exemple, le quadrilatère $DM_1C_1M_2$ a deux angles droits (en M_1 et M_2), et donc l'angle en C_1 est supplémentaire de l'angle en D ; il en découle que $\widehat{C_4C_1C_2} = \widehat{A_2DA_3}$.

Nous pouvons pour cette raison conclure que Q_c est semblable au parallélogramme de Varignon.

De plus, puisque le cyclocentre d'un triangle est le milieu d'un de ses côtés si et seulement si le triangle est rectangle, nous pouvons affirmer que Q_c coïncide avec le parallélogramme de Varignon si et seulement si Q a ses diagonales orthogonales.

Donc, nous nommerons le quadrilatère Q_c *parallélogramme cyclocentrique* de Q .

Posons maintenant $\omega = \widehat{A_1DA_2}$ (Fig. 3), et prouvons que le rapport de similitude entre le parallélogramme cyclocentrique et celui de Varignon est égal à $1/\sin \omega$.

En effet, nous avons

$$\begin{aligned} V_1V_2 &= M_1M_3 = C_1C_2 \sin \widehat{C_1C_2C_3} = C_1C_2 \sin \omega, \\ V_2V_3 &= M_2M_4 = C_2C_3 \sin \widehat{C_1C_2C_3} = C_2C_3 \sin \omega, \end{aligned}$$

donc :

$$\frac{C_1C_2}{V_1V_2} = \frac{C_2C_3}{V_2V_3} = \frac{1}{\sin \omega}.$$

À partir de ce que nous avons démontré ci-dessus, selon le théorème de Varignon, nous pouvons affirmer que le périmètre du parallélogramme cyclocentrique de Q est égal à $1/\sin \omega$ fois la somme des diagonales de Q et que son aire est égale à $1/(2 \sin^2 \omega)$ fois l'aire de Q .

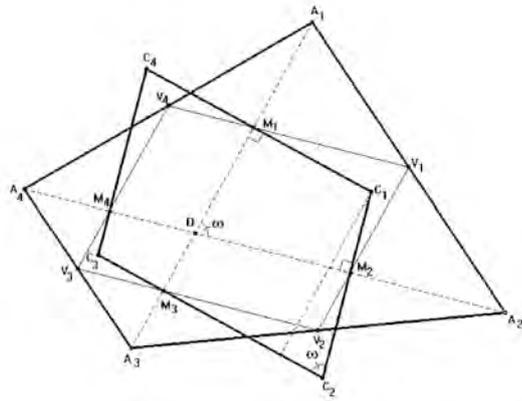


FIG. 3 –

5. Le parallélogramme orthocentrique

Considérons le quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$ ayant pour sommets les orthocentres O_i des triangles T_i , que nous appellerons *quadrilatère orthocentrique* de Q et que nous noterons Q_o (Fig. 4). Il faut bien sûr exclure le cas où Q a ses diagonales perpendiculaires entre elles, car alors les quatre points O_i coïncident tous avec D et le quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$ se réduit donc à un point.

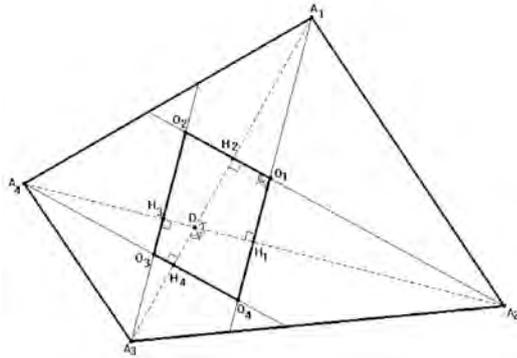


FIG. 4 –

De la même manière que dans les cas précédents, nous obtenons les propriétés suivantes.

Théorème 3. *Le quadrilatère orthocentrique de Q est semblable au parallélogramme de Varignon de Q .*

Notons H_1, H_3 les pieds des perpendiculaires abaissées respectivement des points A_1, A_3 sur la droite A_2A_4 , et H_2, H_4 les pieds des perpendiculaires abaissées respectivement des points A_2, A_4 sur la droite A_1A_3 .

Les points O_1, O_4 appartiennent à la droite A_1H_1 , les points O_1, O_2 appartiennent à A_2H_2 , les points O_2, O_3 appartiennent à A_3H_3 , les points O_3, O_4 appartiennent à A_4H_4 ; par conséquent les côtés O_1O_2 et O_3O_4 sont perpendiculaires à la diagonale A_1A_3 de Q et les côtés O_2O_3 et O_1O_4 sont perpendiculaires à la diagonale A_2A_4 . Ainsi, le quadrilatère Q_o est un parallélogramme ayant ses côtés perpendiculaires aux diagonales de Q .

Maintenant prouvons que :

$$\frac{H_1H_3}{H_2H_4} = \frac{A_1A_3}{A_2A_4}. \quad (1)$$

Les triangles DA_iH_i ($i = 1, 2, 3, 4$), rectangles en H_i , sont tous semblables entre eux parce qu'ils ont les angles en D égaux. De la similitude des triangles DA_1H_1 et DA_3H_3 , il résulte que :

$$\frac{DA_1}{DH_1} = \frac{DA_3}{DH_3},$$

d'où nous tirons :

$$\frac{A_1A_3}{H_1H_3} = \frac{DA_1}{DH_1}. \quad (2)$$

Pareillement, par la similitude des triangles DA_2H_2, DA_4H_4 nous avons :

$$\frac{A_2A_4}{H_2H_4} = \frac{DA_2}{DH_2}. \quad (3)$$

Les deuxièmes membres de (2) et (3) sont égaux, les triangles DA_1H_1 et DA_2H_2 étant semblables, donc :

$$\frac{A_1A_3}{H_1H_3} = \frac{A_2A_4}{H_2H_4},$$

et (1) en résulte.

Par conséquent, en concluant comme dans la démonstration du théorème 2, nous avons que le rapport des deux côtés consécutifs du parallélogramme Q_o est égal au rapport des diagonales de Q .

Observons que les angles du parallélogramme Q_o sont égaux aux angles formés par les diagonales de Q , et grâce à cela nous pouvons affirmer que Q_o est semblable au parallélogramme de Varignon.

Donc, nous nommerons le quadrilatère Q_o *parallélogramme orthocentrique* de Q .

Posons maintenant $\omega = \widehat{A_1 D A_2}$ (Fig. 5), et prouvons que le rapport de similitude entre le parallélogramme orthocentrique et celui de Varignon est $2/\operatorname{tg} \omega$.

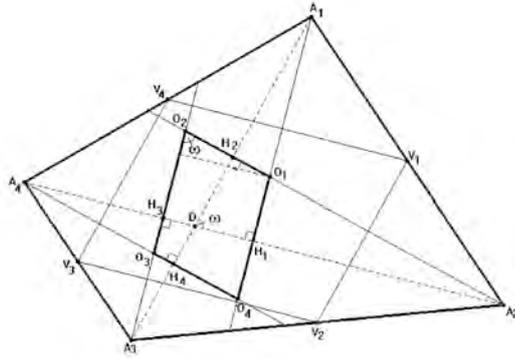


FIG. 5 –

En effet, dans les triangles rectangles $DH_i A_i$, nous avons $DH_i = DA_i \cos \omega$, donc :

$$H_1 H_3 = DH_1 + DH_3 = DA_1 \cos \omega + DA_3 \cos \omega = A_1 A_3 \cos \omega = 2V_1 V_2 \cos \omega$$

et, pareillement :

$$H_2 H_4 = 2V_2 V_3 \cos \omega.$$

De plus,

$$H_1 H_3 = O_1 O_2 \sin \omega,$$

$$H_2 H_4 = O_2 O_3 \sin \omega,$$

et par conséquent :

$$\frac{O_1O_2}{V_1V_2} = \frac{O_2O_3}{V_2V_3} = \frac{2}{\operatorname{tg} \omega}.$$

À partir de ce que nous avons démontré ci-dessus, selon le théorème de Varignon, nous pouvons affirmer que le périmètre du parallélogramme orthocentrique de Q est égal à $2/\operatorname{tg} \omega$ fois la somme des diagonales de Q et que son aire est égale à $1/\operatorname{tg}^2 \omega$ fois l'aire de Q .

En vertu des théorèmes 1, 2 et 3, nous avons :

Théorème 4. *Les parallélogrammes barycentrique, cyclocentrique et orthocentrique de Q sont semblables au parallélogramme de Varignon de Q et par conséquent ils sont tous semblables entre eux.*

Nous observons que le parallélogramme de Varignon est un rectangle si et seulement si Q a les diagonales orthogonales ; il est un losange si et seulement si Q a les diagonales égales ; il est un carré si et seulement si Q a les diagonales orthogonales et égales. Par le théorème 4, ces propriétés sont valables également pour les parallélogrammes barycentrique, cyclocentrique et orthocentrique. Il ne faut pas oublier, cependant, que si les diagonales de Q sont orthogonales, le parallélogramme orthocentrique se réduit à un point.

6. Le quadrilatère incentrique

Considérons le quadrilatère $I_1I_2I_3I_4$ ayant pour sommets les incentres I_i des triangles T_i , que nous appellerons *quadrilatère incentrique* de Q et que nous noterons Q_i (Fig. 6).

Si nous procédons comme dans les cas précédents, cette fois-ci nous remarquons que le quadrilatère Q_i ne possède pas les mêmes caractéristiques que les quadrilatères relatifs aux barycentres, aux cyclocentres et aux orthocentres. Cependant, il possède une certaine régularité. En effet, les diagonales I_1I_3 et I_2I_4 sont les bissectrices des angles formés par les diagonales de Q , donc elles sont perpendiculaires entre elles et se rencontrent au point D . Par conséquent nous avons :

Théorème 5. *Le quadrilatère incentrique de Q a ses diagonales orthogonales et leur point d'intersection coïncide avec celui des diagonales de Q .*

Il va de soi que si un point C est un centre de symétrie pour Q , alors C est un centre de symétrie aussi pour Q_i ; et si une droite d est un axe de

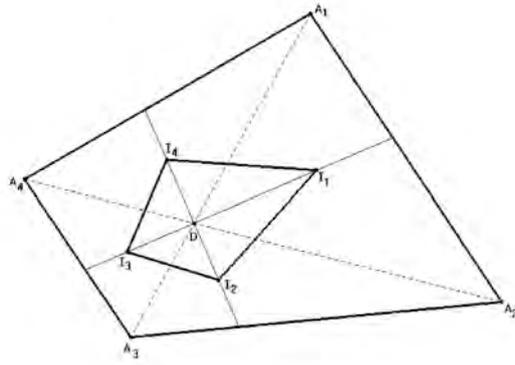


FIG. 6 –

symétrie passant par les sommets (respectivement, ne passant pas par les sommets) pour Q , alors d est un axe de symétrie ne passant pas les sommets (respectivement, passant par les sommets) pour Q_i .

Il en résulte immédiatement que :

- Si Q est un parallélogramme, alors Q_i est un losange ; en particulier, si Q est un losange, Q_i est un carré ;
- Si Q est un trapèze isocèle, alors Q_i est un cerf-volant, donc il est circonscrit à un cercle ;
- Si Q est un cerf-volant, alors Q_i est un trapèze isocèle qui a ses diagonales orthogonales.

Dans [1], Bradley a conjecturé que si Q est circonscrit à un cercle, alors Q_i est inscrit dans un cercle. Cette conjecture a été prouvée par Gringberg (cf. [4]).

Si Q est inscrit dans un cercle, en général, Q_i n'est pas circonscrit à un cercle ; plus précisément, nous avons :

Théorème 6. *Si Q est inscrit à un cercle, alors le quadrilatère Q_i est circonscrit à un cercle si et seulement si Q a ses diagonales égales, c'est-à-dire s'il est un trapèze isocèle. Dans ce cas Q_i est un cerf-volant.*

Soit Q un quadrilatère inscrit à un cercle (Fig. 7).

Supposons que Q ait ses diagonales égales. Les angles opposés de Q sont supplémentaires puisque Q est inscrit à un cercle, et les angles adjacents

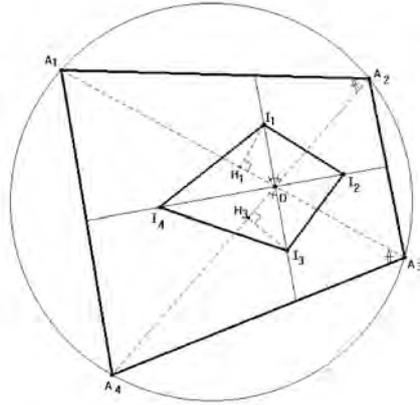


FIG. 7 –

à un côté sont supplémentaires ou égaux parce qu'ils sont des angles inscrits s'appuyant sur des cordes égales. Ainsi, pour chaque couple de côtés consécutifs de Q , nous avons que les angles adjacents à l'un d'entre eux sont supplémentaires et que les angles adjacents à l'autre sont égaux, et donc Q a deux côtés opposés parallèles et les angles adjacents à chacun de ces côtés sont égaux, c'est-à-dire que Q est un trapèze isocèle. Ainsi, nous savons que si Q est un trapèze isocèle, alors Q_i est un cerf-volant, donc il est circonscrit à un cercle.

Supposons maintenant que Q_i soit circonscrit à un cercle. En tout premier lieu, prouvons que Q_i est un cerf-volant. Notons m_1, m_2, m_3, m_4 , respectivement, les mesures des segments $[I_1I_2], [I_2I_3], [I_3I_4], [I_4I_1]$; puisque Q_i est circonscrit à un cercle, nous avons :

$$m_1 + m_3 = m_2 + m_4 ; \tag{4}$$

en outre, Q_i ayant les diagonales orthogonales, nous avons :

$$m_1^2 + m_3^2 = m_2^2 + m_4^2.$$

De cette relation et de celle que nous obtenons en élevant au carré les deux membres de (4) nous tirons :

$$m_1m_3 = m_2m_4. \tag{5}$$

Les relations (4) et (5) affirment que m_1, m_3 et m_2, m_4 ont la même somme et le même produit, donc nous avons $m_1 = m_2$ et $m_3 = m_4$ ou bien $m_1 = m_4$ et $m_3 = m_2$. Dans les deux cas, Q_i a deux couples de côtés consécutifs égaux, et donc il est un cerf-volant.

Supposons, pour fixer les idées, que $I_1I_2 = I_2I_3$; il en découle que $I_1D = I_3D$. Soit H_1 et H_3 les pieds des perpendiculaires abaissées de I_1 et I_3 respectivement sur A_1A_3 et A_2A_4 .

Puisque I_1I_3 est bissectrice de l'angle $\widehat{A_1DA_2}$, nous avons $\widehat{I_1DH_1} = \widehat{I_3DH_3}$. Il en découle que les triangles rectangles I_1H_1D et I_3H_3D sont égaux et donc $I_1H_1 = I_3H_3$. Par conséquent, les cercles inscrits dans les triangles T_1 et T_3 ont des rayons égaux : $r_1 = r_3$.

Alors, notons S_i et p_i respectivement l'aire et le périmètre de T_i ; puisque

$$\frac{1}{2}r_1 = \frac{S_1}{p_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}r_3 = \frac{S_3}{p_3},$$

nous avons :

$$\frac{S_1}{p_1} = \frac{S_3}{p_3},$$

et donc :

$$\frac{S_1}{S_3} = \frac{p_1}{p_3}.$$

Puisque Q est inscrit dans un cercle, $\widehat{A_1A_2A_4} = \widehat{A_1A_3A_4}$; par conséquent les triangles T_1 et T_3 sont semblables, et si k est le rapport de similitude nous avons :

$$\frac{S_1}{S_3} = k^2 \quad \text{et} \quad \frac{p_1}{p_3} = k,$$

et donc $k = 1$; T_1 et T_3 sont isométriques.

Il en découle que $A_1D = A_4D$ et $A_2D = A_3D$, et partant Q a ses diagonales égales, c'est-à-dire qu'il est un trapèze isocèle.

Bibliographie

- [1] BRADLEY C. J., Cyclic quadrilaterals, *The Mathematical Gazette*, **513** (2004), 417-431.

- [2] COXETER H. S. M., GREITZER S. L., *Geometry Revisited*, Washington, Math. Assoc., 1967, 193 pp. ; traduction française : *Redécouvrons la géométrie*, Paris, Dunod, 1971, 211 pp.
- [3] GRECO R., MICALE B., MILAZZO F., L'atelier de mathématiques : une activité de recherche sur les quadrilatères, *Mathématique & Pédagogie*, **146** (2004), 23–35.
- [4] GRINGBERG D., Synthetic proof of Christopher Bradley's Conjecture, www.cut-the-knot.org/htdocs/dcf/forum/DCForumID6/415.shtml.
- [5] MAMMANA M. F., PENNISI M., Il laboratorio di matematica : un'attività di ricerca sugli assi di simmetria di un poligono, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 28B, **5** (2005), 449–469.
- [6] MICALE B., Problèmes de maximum et de minimum pour les triangles, *Mathématique & Pédagogie*, **140** (2003), 5–23.
- [7] PENNISI M., Triangles et moyennes, *Mathématique & Pédagogie*, **99** (1994), 21–26.
- [8] ROBERT G., Le triangle. Champ d'investigation et de découvertes, *Mathématique & Pédagogie*, **91** (1993), 27–41 ; **92** (1993), 17–26.

Avancer, tourner

YOLANDE NOËL-ROCH

1. Introduction

Deux articles « Avancer, tourner (1) » et « Avancer, tourner (2) » destinés aux revues *Math-Jeunes Junior* 115 et *Math-Jeunes Junior* 116 devraient permettre aux élèves de suivre une tortue qui sait *avancer* et *exécuter un quart de tour à droite*. Dans cet article, nous développons le même sujet en rappelant les résultats obtenus dans les textes destinés aux élèves et en les généralisant.

1.1. Vocabulaire et notations

« Dr » est l'abréviation de « Exécute un quart de tour à droite ».

« Av n » est l'abréviation de « Avance de n pas ».

Dire que « la tortue exécute le n -uple $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ » signifie qu'elle exécute la suite de consignes suivantes :

$$\text{Av } a_1 - \text{Dr} - \text{Av } a_2 - \text{Dr} - \dots - \text{Av } a_n - \text{Dr}$$

Attention : tous les a_i sont des naturels non nuls ; il ne faut pas oublier la dernière commande Dr : la tortue tourne après **chacun** de ses déplacements.

Les termes « triplet » et « quadruplet » ont été utilisés, dans les textes destinés aux élèves, pour désigner respectivement les 3-uples et les 4-uples.

1.2. Résultats démontrés dans *Math-Jeunes Junior*

- Une tortue qui exécute successivement quatre fois le même triplet retrouve, en fin de quatrième exécution, sa position et son orientation

Adresse de l'auteur : Rue de la Culée 86, 6927 Restaigne ; courriel : yolande@conifere.be.

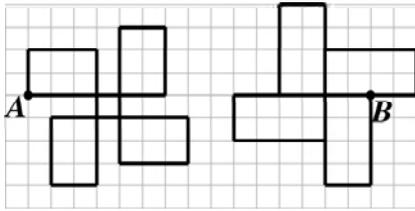
initiales. Si elle continue éternellement sa promenade, elle repasse donc sur le chemin qu'elle a tracé lors des quatre premières exécutions.

- Une tortue qui exécute éternellement le même quadruplet va se perdre à l'infini en parcourant une frise, sauf si le quadruplet est du type $(a; b; a; b)$ (que ces deux nombres soient différents ou non).

Voici les parcours provoqués ...

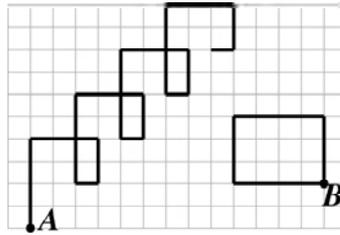
... par deux 3-uples :

- Départ en A , cap au nord, $(2; 4; 6)$;
- Départ en B , cap au sud, $(4; 2; 6)$;



... par deux 4-uples :

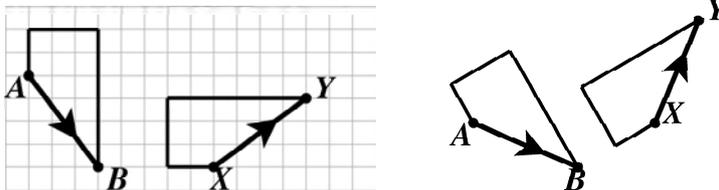
- Départ en A , cap au nord, $(4; 3; 2; 1)$;
- Départ en B , cap à l'ouest, $(4; 3; 4; 3)$.



2. Abstraction des détails de parcours

Dans *Math-Jeunes Junior*, nous avons suggéré en deux temps un support géométrique qui aide à se détacher des détails du parcours pour en dégager l'essentiel. Le triplet étudié était $(2; 3; 6)$.

Premier temps



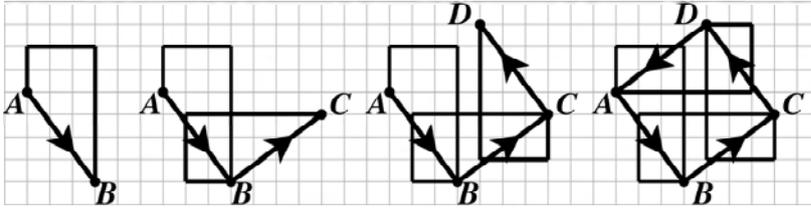
Une exécution du triplet provoque

- Un certain déplacement (symbolisé par la flèche). Attention : cette flèche n'est pas tracée par la tortue !

- Un changement d'orientation de un quart de tour à gauche.

Deuxième temps

Des exécutions successives du triplet sont enregistrées avec, en surimpression, les déplacements de A en B à la première exécution (en n'oubliant pas le changement d'orientation), de B en C à la deuxième exécution (toujours en pensant à la nouvelle orientation) ... et ainsi de suite.



En interprétant le film, on démontre qu'en fin de quatrième exécution, la tortue se retrouve nécessairement en A et qu'elle a récupéré son cap initial.

3. Les n -uples

Le traitement du cas général repose sur la section précédente et sur des comptages de quarts de tours.

3.1. Exécution d'un n -uple

L'exécution du n -uple $(a_1; a_2; \dots; a_n)$

- Amène la tortue d'un point A à un point B (éventuellement égal à A) ;
- Modifie son cap initial de n quarts de tour à droite (ce qui éventuellement lui redonne son cap initial!).

3.2. Exécutions successives d'un n -uple

3.2.1. Cas où $A \neq B$

- Première exécution du n -uple : la tortue part de A arrive en B après une promenade plus ou moins compliquée dont nous oublions les détails pour ne voir que le segment orienté $[AB]$ (non dessiné par la tortue!). Elle a tourné de n quarts de tours à droite.

- Deuxième exécution du n -uple : elle redémarre de B avec son nouveau cap... pour effectuer à nouveau la même promenade qui se termine en C , déplacement que nous voyons comme le segment orienté $[BC]$ de même longueur que $[AB]$. Quel est l'angle entre ces deux segments ?

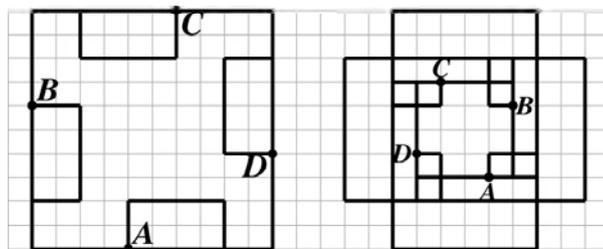
Tout dépend de la parité de n . En effet,

- Si n est impair, il est un multiple de 4 augmenté de 1 *ou* un multiple de 4 augmenté de 3.
 - Si $n = 4k + 1$ (k naturel), l'exécution du n -uple fait tourner la tortue de $4k + 1$ quarts de tour à droite (c'est-à-dire d'un nombre entier de tours plus un quart de tour à droite) ; le deuxième segment est donc perpendiculaire au premier.
 - Si $n = 4k + 3$ (k naturel), l'exécution du n -uple fait tourner la tortue de $4k + 3$ quarts de tour à droite (c'est-à-dire d'un nombre entier de tours plus un quart de tour à gauche) ; le deuxième segment est donc perpendiculaire au premier.

Dans les deux cas, les deux premières exécutions du n -uple par la tortue la placent successivement en trois points A , B et C avec $|AB| = |BC|$ et $AB \perp BC$, donc en trois sommets d'un carré. (Le carré est défini en tournant à droite dans le premier cas, à gauche dans le second mais cela n'a pas d'importance.) Au bout de 4 exécutions du n -uple, la tortue est donc revenue en A en ayant tourné de $4n = 16k + 4$ ou de $4n = 16k + 12$ quarts de tours, donc d'un nombre entier de tours : elle a repris son cap initial.

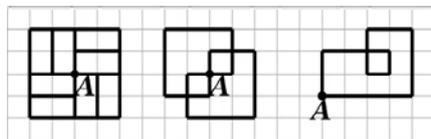
Si n est impair, la tortue se promène éternellement sur un circuit. Il est entièrement tracé par les quatre premières exécutions du n -uple.

Voici par exemple les tracés laissés par la tortue lorsqu'elle exécute le 5-uple $(2; 4; 2; 8; 6)$ ou le 7-uple $(1; 2; 4; 6; 7; 5; 1)$.



3.2.2. Cas où $A = B$

Cela n'arrive pas pour les n -uples de trois naturels non nuls. Par contre, à partir de $n = 4$, la première exécution peut ramener la tortue à son point de départ. C'est le cas du 5-uple $(1; 2; 3; 2; 2)$, du 6-uple $(1; 2; 3; 3; 2; 1)$ et du 8-uple $(2; 3; 1; 1; 2; 2; 3; 4)$ exécutés ci-dessous. Pour chaque n -uple, la tortue démarre en A , cap au nord.



- Si n est impair, le premier retour au point de départ se fait avec un changement de cap de $+90^\circ$ ou -90° et la tortue repart donc sur un tracé différent. Les conclusions sont les mêmes que dans le cas où B est différent de A : ce n'est qu'en fin de quatrième exécution que la tortue a retrouvé position et cap initiaux
- Si n est pair sans être multiple de 4, le deuxième parcours s'effectue symétriquement du premier par rapport au point A . Comme dans le cas où B est différent de A , c'est en fin du deuxième parcours que la tortue a retrouvé position et cap initiaux.
- Si n est multiple de 4, les conditions initiales (position et orientation) sont retrouvées en fin de la première exécution. En répétant le n -uple, la tortue ne dessine donc pas une frise mais parcourt éternellement le lacet dessiné lors de la première exécution du n -uple.

Si n est multiple de 4, la tortue parcourt éternellement le lacet tracé par la première exécution.

Remarque : Le seul cas qui conduit à des conclusions différentes selon que les points A et B (départ et arrivée de la tortue dans une exécution du n -uple) sont différents ou non est donc celui où n est multiple de 4.

Les mancalas et leur exploitation didactique

HUGUES VERMEIREN

Institut Saint-Vincent de Paul, Uccle ⁽¹⁾

1. Introduction

Le terme « mancala » est un terme générique désignant tout jeu de semailles. Les jeux de semailles sont des jeux en général à deux joueurs, à information complète, joués d'une cavité pratiquée souvent en bois, et en les voisines. Le grand nombre empêche toute description type de jeu. L'origine ancienne et encore assez font remonter à l'Égypte neure, d'autres, se basant des variantes bantoues, mancalas sont sans doute plusieurs régions du conti-



en puisant des graines dans un « tablier », le plus égrenant dans les cavités de variantes de mancala simple et générale de ce des mancalas est très méconnue. Certains la ancienne ou à l'Asie Mi-sur certaines particularités affirment que certains nés indépendamment dans nent africain. Quoi qu'il en

soit, l'espace traditionnel dans lequel la pratique des mancalas est courante depuis des siècles est l'Asie de Sud-Est, l'Asie centrale, toute l'Afrique ainsi que de nombreuses îles des Caraïbes et les côtes du Brésil.

La première mention explicite des mancalas figure dans le « Livre des Songes », un célèbre ouvrage arabe de poésie du X^e siècle. Mais la légende la plus célèbre nous est rapportée par l'ethnologue Torday ([10]), qui a étudié la région du Kasai et l'empire Kuba au début du XX^e siècle. Une

⁽¹⁾ Et Lycée d'État de Lambaréné (Gabon) de 1982 à 1987.

Adresse de l'auteur : Rue de la Victoire 44, 1060 Bruxelles; courriel : hgsvermeiren@skynet.be.

statuette conservée au British Museum représente le roi kuba Shamba Mbalongongo en compagnie de jeu de « Lela ». Ce roi, aussi connu pour d'autres réalisations, aurait ramené cette variante de mancala de ses voyages et conquêtes et aurait été remercié pour avoir « délivré son peuple de l'emprise des jeux de hasard ».

Actuellement, on joue aux mancalas un peu partout, notamment sur l'internet et en plus des variantes traditionnelles ou historiques, on en invente et étudie régulièrement de nouvelles. J. H. Conway n'a-t-il pas ainsi introduit la sienne (variante *sowing*, 1994) ? Le petit monde des mancalas est donc en pleine évolution et ce type de jeu constitue plus que jamais un objet de recherches ethnologiques, sociologiques mais aussi un objet d'explorations mathématiques et informatiques.

2. Quelques variantes

2.1. Mancalas ?

Il est bon de signaler qu'on ne joue pas au mancala ; ce terme est générique et ne désigne aucune des variantes ! Les Africains diront qu'ils jouent à l'*awélé*, au *wouré*, au *mbekh*, au *bao*, ... et les Kirghizes d'Asie centrale diront qu'ils jouent au *toguz korgol*.

La classification des mancalas est à ce jour inachevée et divise encore les spécialistes. Nous nous limiterons à décrire, de manière assez brute, trois mancalas, assez représentatifs de cette nébuleuse de jeux ; l'idée étant de présenter dans la suite certains résultats relatifs à ces variantes.

2.2. L'awélé

L'*awélé* est la variante jouée en Côte d'Ivoire et est certainement la plus connue. Il connaît lui-même des variantes : les règles peuvent différer d'un village à l'autre, surtout en ce qui concerne les fins de parties. L'*awélé* est le jeu qui a le plus été étudié et pour lequel on dispose du plus grand nombre de résultats.

Matériel : Un tablier à deux rangées de 6 cases ; 4 graines par case en début de partie.



Règles : Les joueurs jouent à tour de rôle en puisant toutes les graines d'une des cases de leur rangée et en les égrenant une à une à partir de la case suivante dans le sens anti-horlogique. Si le semis fait le tour du tablier, on passe la case de départ (qui reste donc vide). Si à l'issue du semis, la dernière case dans laquelle on a semé contient 2 ou 3 graines et si cette case est dans la rangée de l'adversaire, ces graines sont capturées et retirées du jeu. La prise s'effectue à reculons : si la case précédant la case où il y a eu capture contient 2 ou 3 graines, ces graines sont également capturées et ainsi de suite tant que la capture s'effectue chez l'adversaire.

La partie est gagnée dès qu'un des joueurs a capturé plus de la moitié des graines ($24 + 1$). L'usage veut qu'on continue la partie même si un des joueurs a déjà plus de 24 graines. Dans certaines variantes qui se jouent en plusieurs manches, ceci peut avoir une grande importance.

La règle du « donner à manger » : Il faut toujours veiller à alimenter son adversaire. Un coup qui ne donnerait pas de graines à l'adversaire alors que cet adversaire n'en a plus, est illégal, sauf s'il est impossible de faire autrement. Ici, deux règles coexistent, et il faut bien s'entendre sur les règles avant de commencer la partie.

1. *La graine de soulagement* : S'il est impossible de donner à manger, le joueur ayant encore des graines (et à qui c'est donc le tour) raffe tout ce qui reste sur le tablier et donne une graine de « soulagement » à son adversaire ([8]);
2. *La mort subite* : Si on ne donne pas à manger, on est puni et c'est l'adversaire qui raffe tout! (Plus rare, cette variante de fin de partie est celle décrite par Deledicq et Popova ([4])).

Dans la littérature, l'état du tablier est décrit comme ci-dessous. Le joueur dont les cases sont désignés par les minuscules est « Sud », l'autre est « Nord ».

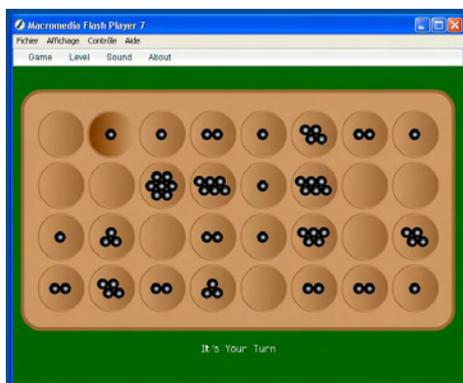
F	E	D	C	B	A
a	b	c	d	e	f

L'état initial du tablier est donc le suivant :

4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4

2.3. L'igisoro

L'*igisoro* est une variante de la famille *nsombi* ([10]) ; elle est jouée au Rwanda. Une variante très proche de l'igisoro est le *mweso* de l'Ouganda ([11]). L'igisoro/mweso ne doit pas être confondu avec le *baò*, jeu considéré comme très noble, et pratiqué sur la côte est de l'Afrique.



Matériel : Un tablier à 4 rangées de 8 cases. Disposition initiale : 4 graines dans chacune des cases des 2 rangées centrales. Le jeu se joue donc avec 64 graines et le tablier est présenté comme suit :

H	G	F	E	D	C	B	A
I	J	K	L	M	N	O	P
p	o	n	m	l	k	j	i
a	b	c	d	e	f	g	h

Règles : Les joueurs sèment dans deux orbites distinctes : Sud puise et sème dans les 2 rangées de son côté (lettres minuscules) ; les deux rangées supérieures sont à Nord.

Deledicq et Popova ont proposé une typologie des mancalas basée sur les orbites des semis alors que les classifications « grand public » se font sur base du nombre de rangées des tabliers : 2, 3, 4 ou même 1 pour certaines variantes « modernes ».

Le semis est enchaîné (caractéristique essentielle en zone bantoue) : on ne se contente pas de déposer une à une les graines puisées dans la case initiale. Si la dernière graine d'un semis tombe dans une case vide, le joueur rend la main et c'est à son adversaire de jouer. Si la dernière graine tombe dans une case non vide, le joueur puise ce que cette case contient (il peut

garder en main celle qui était destinée à cette case) et continue son semis dans les cases voisines. À chaque enchaînement, une case est donc laissée vide. Attention : le singleton n'est pas jouable.

Le semis enchaîné rend le jeu beaucoup plus difficile à maîtriser : dans certaines positions, il est difficile de prévoir où s'achève un semis ! Eh oui, à ce jeu, il est parfois difficile de réfléchir un coup à l'avance... Lors d'une capture, les graines ne sont pas éliminées du tablier mais changent de côté.

Appelons « case bipleine » une paire de cases de l'adversaire situées sur une même colonne et dont aucune n'est vide. Exemple : Si C contient 3 graines et que N en contient 2, alors {C, N} est une case bipleine.

Si, lors d'un enchaînement, la dernière graine est semée dans une case non vide de la rangée intérieure (de i à p pour Sud) située en face d'une case bipleine, le joueur capture l'ensemble des graines de la case bipleine et les resème dans son camp en commençant à la position de son dernier enchaînement (là où un trou avait été laissé, sauf si le joueur avait semé plus de 16 graines).

Les cases a, o, h et j pour Sud (A, O, H et J pour Nord) sont appelées « cases pivots ». Si une capture dans le sens horlogique (contraire au sens « normal » du semis) est possible à partir d'une de ces cases, alors elle est légale et peut même être effectuée lors d'un enchaînement. Il arrive donc que le sens du semis s'inverse lors d'un coup.

Le partie prend fin lorsqu'un des joueurs n'a plus que des cases vides et des singletons.

Ces règles sont assez difficiles à digérer sans exemples. Que se passe-t-il si Sud joue les sept graines de la case h (coin inférieur droit) dans le cas suivant ?

2	0	1	0	3	2	2	4
1	2	2	0	1	3	1	0
3	2	0	2	3	4	2	0
0	2	7	0	5	0	3	7

Sud joue h, enchaîne en o, b, e ; il capture 5 graines dans la case bipleine en face de k, graines qu'il réintroduit chez lui à partir de f, capture 3 graines dans la bipleine en face de j, les réintroduit en f, arrive en h (où on est déjà repassé 2 fois!), enchaîne en k (7 graines car deux passages) et dort en b (vide). Ouf!

Le mieux est sans doute de se trouver un adversaire expérimenté (pas facile) ou un programme sur l'internet. (À titre d'exemple, <http://www.geocities.com/igisoro/> est agréable, même si son niveau de jeu est très moyen. Attention : son aide en ligne est en kinyarwanda...) La place manque ici pour apprécier toutes les subtilités du jeu.

2.4. La tchouka et la rouma

La *tchouka* est un mancala très particulier : c'est une sorte de « réussite », de « patience » ou de « solitaire ». La tchouka se joue donc seul. Elle serait originaire de Sibérie selon certains, d'Inde selon d'autres. Dans la famille des mancalas, les réussites sont très rares. On en a relevé certaines au Nigéria.

C'est un mancala à semis enchaîné dont une des cases joue un rôle particulier : la *rouma*. Beaucoup de mancalas sont homogènes en leur cases (même si très souvent certaines cases ont des valeurs stratégiques particulières); ce n'est donc pas le cas de la tchouka.

On constitue une tchouka en disposant $n + 1$ bols (cases) en cercle; un des bols est la rouma et est vide en position initiale. Dans chacun des autres bols on dépose k graines. Pour la facilité, les cases peuvent être représentées en ligne. La rouma est la case 0, représentée à droite, et la case n est la plus éloignée de la rouma. On n'oubliera pas que le semis est enchaîné et que après être passé par la rouma, on sème dans les cases $n, n - 1$, etc. Voici la tchouka (5; 4) dans sa position initiale :

5	4	3	2	1	0
4	4	4	4	4	0

But du jeu : Placer toutes les graines dans la rouma. Si un semis s'achève dans la rouma, on a le droit de rejouer en recommençant à semer à partir d'une des cases de 1 à n (on n'enchaîne pas dans la rouma et la rouma n'est pas jouable). Si un semis s'achève dans une des cases de 1 à n , on a perdu!

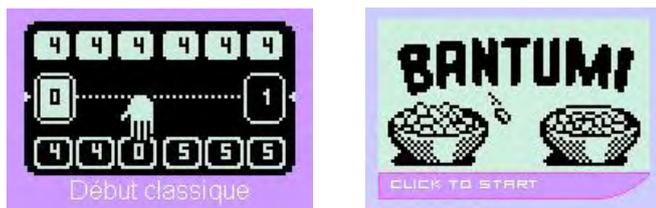
Même dans les cas apparemment simples, la tchouka ne se laisse pas maîtriser aussi facilement. Ainsi, la tchouka (4; 2) (5 cases, 2 graines par cases) admet une solution en 10 coups (pas moins!) : 2, 1, 3, 2, 1, 4, 1, 3, 2, 1. (On vérifiera!)

Alors, on conseillera à toutes et tous de passer à la cuisine, de prendre quelques bols, des pistaches en guise de graines et d'expérimenter. Le sujet se prête particulièrement bien à une activité en classe...

Deledicq a proposé dans un but pédagogique, une tchouka simplifiée : le *tchoukaillon*. C'est une tchouka à semis simple et dans laquelle les cases ne comportent pas toutes le même nombre de graines en position initiale. À chaque fois qu'on joue une case, il faut que la dernière graine soit déposée dans la rouma, auquel cas on peut rejouer. Le tchoukaillon se prête bien à une analyse « rétrograde » : on place k graines dans la rouma en considérant que la partie est finie (et gagnée) et on reconstruit la position initiale.

3. Mancalas et mathématique

L'exploitation mathématique des mancalas est plus que naturelle. Le mot *calcul* ne vient-il pas du latin *calculus* (caillou) et les pierres ne sont-elles pas utilisées dans nombre de variantes de mancalas ? En Afrique, les instituteurs sont nombreux à utiliser les tabliers d'awélé pour initier les écoliers au calcul élémentaire. Aux États-Unis, la variante *kalah*, introduite commercialement au milieu du XX^e siècle, est aussi exploitée dans l'enseignement fondamental, ce qui en fait la variante la plus connue sur le nouveau continent. À tel point que *Nokia* l'avait implémentée il y a quelques années déjà sur son 3310, sous le nom d'ailleurs usurpé de « Bantumi », le kalah étant tout sauf une variante bantoue.



« Bantumi » sur Nokia 3310

Les premiers à avoir donné des descriptions générales ou détaillées des mancalas furent les ethnologues (Griaule, Murray, Pankhurst ([7]), Towshend ([10]), ...). Dans les années 70, des joueurs d'Omweso découvrent en présence du Professeur Mayega de Kampala les semis infinis ([1]), ce qui lancera la recherche sur les variantes d'Afrique centrale. En 1977, André Deledicq et Assia Popova, en collaboration avec des chercheurs de plusieurs disciplines de l'Université de Paris VII, publient un ouvrage désormais célèbre : *Wari et Solos — Le jeu de calculs africain*. Cet ouvrage se propose avant tout de jeter les jalons d'une recherche future et de présenter à l'usage

des enseignants de tous niveaux des outils permettant d'utiliser le mancala comme objet d'investigation ou comme prétexte à certains développements.

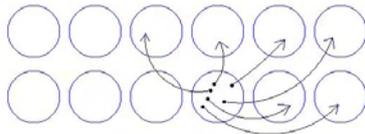
Dans les années 90, Jean Retschinszki, psychologue de l'Université de Fribourg, propose une autre approche ([10]). Plutôt que d'analyser directement l'awélé, il utilise extensivement l'outil statistique pour analyser les parties de joueurs (Ivoiriens et Européens) de tous niveaux et de tous âges ; l'idée étant d'en retirer des principes de tactique et de stratégie.

À l'heure actuelle, il est difficile de dissocier l'étude mathématique des mancalas des progrès en informatique. Ainsi, l'awélé est la première variante historique dont l'arbre des coups possibles a été entièrement construit sur ordinateur (John W. Romein, Vrije Universiteit Amsterdam). On sait, grâce à cet exploit, qu'aucun des joueurs, à ce jeu, n'a de stratégie gagnante. On peut jouer contre ce « monstre » à l'adresse : <http://awari.cs.vu.nl/>. En réglant le niveau du programme sur « Perfect », on affronte un joueur infailible (il est à remarquer que la machine, parcourant l'arbre complet, n'a plus besoin de fonction d'évaluation pour juger d'une position). De même, seules des recherches informatiques ont permis la formulation de conjectures relatives à la « résolubilité » de la tchouka ($n; k$).

4. Considérations diverses et situations à exploiter

4.1. Une application qui évite de compter

Tous les bons joueurs d'awélé vous le diront : quand on joue, on ne compte pas vraiment ses graines. En un coup d'œil on sait combien on en a et on sait aussitôt vers quelle case « cible » une case donnée. En décrivant la situation comme suit :



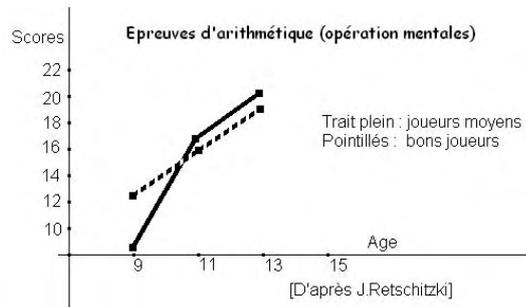
on s'aperçoit qu'il existe une bijection naturelle entre les graines d'une case qu'on s'appête à jouer et les cases dans lesquels on va semer. Si on joue une case contenant plus de 11 graines (on saute la case de départ), on

n'a plus affaire à une bijection mais à une application non injective. Johnson Ihyeh Agbinya (University of Western Cape, South Africa), souligne dans [1] l'importance de cette bijection-application dans la pédagogie du jeu d'*ayo* (awélé du Nigéria). En effet, pour bien jouer, il faut savoir où s'achève le semis mais il faut aussi et surtout savoir comment on a modifié l'ensemble du tablier. Le bon joueur « photographie » le tablier à chaque coup. J. Retschitski a soumis ses joueurs à de multiples tests visuels (p. ex. jeu de *memory*, restitution de tabliers dans un état donné) et a confirmé cette observation.

Pour les jeux à semis enchaînés, la situation est tout autre. Il faut là calculer à tout moment.

4.2. Les bons joueurs sont-ils plus forts en calcul ?

En traitant uniquement le cas de l'awélé, J. Retschitzki tente de répondre à la question en procédant à certains tests. Il compare les résultats à diverses épreuves d'arithmétique de deux groupes de joueurs (les « Bons » et les « Moyens ») en fonction de l'âge. Voici repris un diagramme, par exemple, pour les épreuves d'opérations mentales :



On constate que chez les plus jeunes, les bons joueurs obtiennent de meilleurs résultats en calcul mais que cet avantage s'estompe avec les années. Il ne faut donc pas tirer de conclusions hâtives. Les mancalas peuvent être utilisés dans l'enseignement fondamental pour soutenir certaines activités numériques mais ils ne réaliseront pas de miracles.

4.3. Vitesse de déplacement des graines

Plutôt que de se cantonner à des activités numériques sur les mancalas, il est sans doute bon de proposer des problèmes comme le suivant :

Je dispose 3 graines dans la case « a » (la plus à gauche) d'un tablier 2×6 .

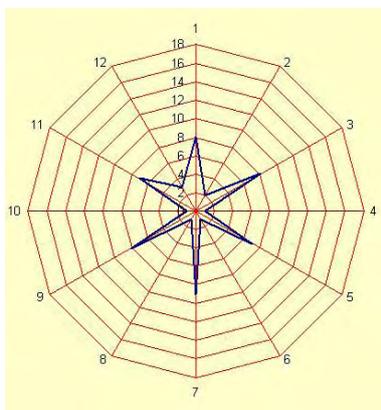
1. *Quel est le plus petit nombre de coups me permettant d'envoyer les 3 graines chez l'adversaire (déplacement rapide : je chasse mes graines) ?*
2. *Quel est le grand nombre de coups permettant de réaliser le même but (déplacement lent : je retiens mes graines) ?*

Indépendamment de cet intéressant petit défi, ce problème est essentiel pour assurer une bonne pratique du jeu : à l'awélé il est très important de savoir garder des graines chez soi quand il le faut et d'être capable d'envoyer rapidement (en fin de partie) des graines chez l'adversaire (par exemple à cause de la règle du « donner à manger »).

Deledicq a proposé une jolie représentation graphique de ce problème. En abscisse le numéro de la case, et en ordonnée l'effectif. Le déplacement des graines peut alors être assimilé à une vague se déplaçant en tournant autour du tablier.

4.4. L'awélé et sa représentation polaire

Dans le même ordre d'idée, on obtient assez facilement une jolie représentation radiale et dynamique d'une partie d'awélé sur *Excel*. On



peut faire simple en créant une table des différentes positions du tablier au cours d'une partie et en l'exploitant directement à l'aide de l'*Assistant graphique* d'*Excel*. Une macro permet alors d'animer le graphique en fonction des coups joués.

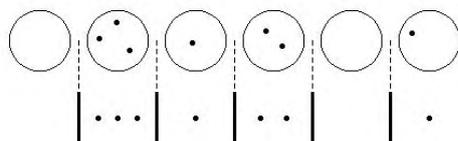
4.5. Distribution des graines et combinaisons

Comme dans tous les jeux de stratégie, certaines configurations reviennent régulièrement. Pour les étudier, il convient de les dénombrer. Ainsi, en fin de partie, il est fréquent qu'un joueur se retrouve avec petit nombre de graines de son côté. D'où l'importante question : combien y a-t-il de configurations possibles avec k graines de mon côté? La question est assez classique au niveau secondaire supérieur et est facilement traitée grâce aux combinaisons à répétition (hors programme, allez savoir pourquoi).

Il est pédagogiquement plus satisfaisant ou constructif de répondre à la question de manière artisanale (l'artisanat, ça fait réfléchir...). Si j'ai trois graines de mon côté à répartir en 6 cases (awélé) :

1. Soit les trois graines sont dans la même case : 6 possibilités,
2. Soit deux des trois sont dans la même case : 6×5 (ou $(6)_2$) possibilités,
3. Soit elles occupent toutes une case distincte : $\binom{6}{3} = 20$ possibilités.

Si le nombre de graines augmente, la méthode artisanale montre vite ses limites. Déposons par exemple sept graines dans nos six cases :



À toute disposition de 7 graines, on associe (bijection!) une ribambelle de 12 éléments : 5 séparations (celles entre les cases) et 7 graines. Il y a donc autant de manière de placer 7 graines dans 6 cases que de manières de choisir l'emplacement des 5 séparations parmi les douze éléments graines-séparations, soit $\binom{12}{5} = 792$. Ce raisonnement avec des séparations est bien connu mais ces séparations sont souvent fictives dans les problèmes classiques ; ici les séparations sont physiques : ce sont les cloisons entre les cases.

Ceci peut nous donner une idée de la complexité de certains mancalas. L'*omweso*, très proche de l'igisoro rwandais, se caractérise par ses « ouvertures » libres. Chaque joueur dispose comme il le veut ses 32 graines dans ses 16 cases en début de partie.

Comme le nombre de manières de disposer k graines dans n cases est donné par $\binom{k+n-1}{n-1}$, on a dans le cas de l'omweso $\binom{32+16-1}{16-1} = \binom{47}{15} = \frac{47!}{15!32!} = 751\,616\,304\,549$ ouvertures possibles pour chaque joueur (alors que la partie n'a pas encore commencé!) même si un grand nombre d'entre elles sont en pratique injouables.

4.6. Le piège du 2-1

Deux grands principes stratégiques guident la plupart des parties d'awélé : la construction de « maisons » ou *krous* et la construction de pièges. Il ne sera ici question que des pièges ; les amateurs se renseigneront ailleurs pour les « maisons » !

La situation suivante est très fréquente en fin de partie (Sud a le trait) :

					2	1

Sud joue « e » ;

						1
						2

Nord ne peut jouer que « A » ;

					1	
						2

Sud joue « f » ...

					2	1

... et capture 2 graines en « B ».

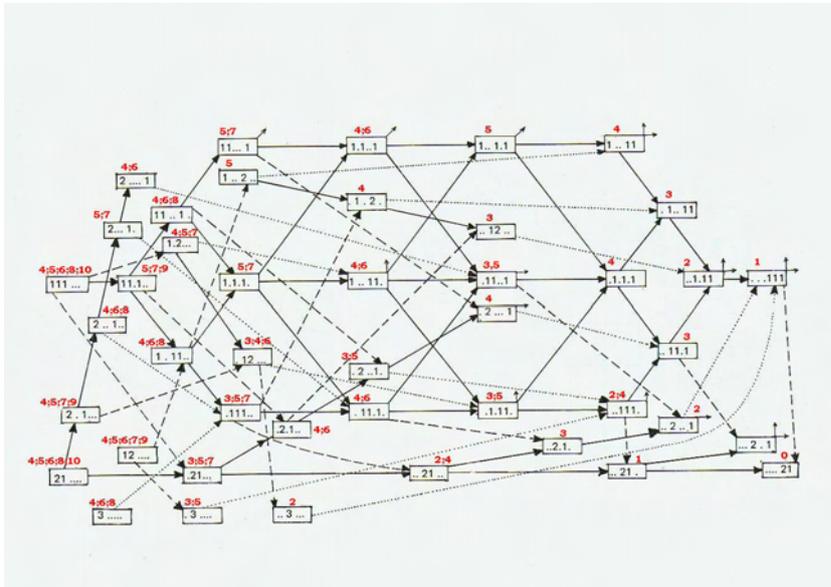
						1

Ce piège, connu sous le nom du *piège du 2-1*, est à la base des stratégies de fin de parties. Le problème n'est pas de le jouer une fois construit mais bien de le construire. Pour ça, le minutage de l'opération est essentiel. On

peut résumer la problématique du 2-1 comme ceci : Sud a trois graines et Nord n'en a qu'une (ses coups sont donc forcés). La construction du piège est-elle possible et si oui, comment Sud doit-il jouer ses trois graines pour amener la situation suivante (trait à Nord) ?

1					
				2	1

On sait, par ce qui précède, qu'il y a 56 manières d'avoir 3 graines sur un côté du tablier ; dès lors on peut construire un graphe orienté à au plus 56 sommets et dont certains chemins décriront les constructions possibles du piège du 2-1. Remarquons qu'il y a des dispositions à trois graines qui ne peuvent conduire au piège du 2-1 : les trois dispositions contenant les trois graines dans l'une des trois dernières cases et celles où la case contenant deux graines est la case « e » ou « f », par exemple 000021 ou 000030. Les six nœuds correspondants seront absents du graphe. Ce travail doit être conduit avec méthode, on s'en doute. Sans entrer dans les détails (voir [4]) voici le graphe complet de la construction du piège du 2-1 :



Les chemins intéressants sont ceux qui conduisent au sommet ●●●●21 en bas à droite. Par exemple, partant de ●11●●1, on compte deux chemins vers le 2-1 : un de longueur 3 et l'autre de longueur 5. Donc, ayant le trait, Sud peut construire son piège si Nord a sa graine dans les cases « B » ou « D ».

4.7. Une généralisation du piège du 2-1

Le piège du 2-1 n'est qu'un piège parmi beaucoup d'autres (le 3-1 existe (exercice!) mais se joue très différemment). Il a ceci de particulier qu'une fois lancé, l'adversaire n'a plus aucune initiative puisqu'il n'a qu'une graine à jouer. Ce piège a été généralisé par Duane M. Broline (Illinois) et Daniel E. Loeb (Bordeaux) en 2004.

Voici donc un « grand frère » du 2-1 (trait à Nord) :

					1
			4	2	2

Nord joue « A » ;

				1	
			4	2	2

Sud joue « f » et capture en « B » ;

					1
			4	2	

Nord joue « A »

				1	
			4	2	

Sud joue « d » et capture en « B » ;

					1
				3	1

Nord joue « A » ;

				1	
				3	1

Sud joue « e » et capture en « B » ;

					1
					2

Nord joue « A » ;

				1	
					2

Sud joue « f » et capture en B.

					1

Pour des raisons qui apparaîtront plus tard les cases d'un tablier à deux rangées, dans ce qui suit, seront numérotées comme suit :

-4	-3	-2	-1	0	1
7	6	5	4	3	2

(il ne s'agit pas du nombre de graines!) Cette numérotation étant généralisable au tablier $2 \times n$. Un avantage de cette notation est que si la case « i » (côté Sud) contient i graines alors en la jouant, le semis s'achève dans la case 0.

Définition : Sur un tablier $2 \times n$, on appelle « configuration déterminée » toute disposition de graines telle que :

- (i) Sud capture à chaque coup ;
- (ii) Nord n'a qu'une graine à jouer ;
- (iii) Sud capture toutes les graines sauf une qui revient à Nord ;
- (iv) Aucune des cases ne contient $2n$ graines ou plus.

La condition (iv) est là pour éviter qu'une case « cible » la case 0 après un tour ou plus. Remarquons qu'on quitte là le domaine de la recherche sur les mancalas historiques puisqu'on travaille sur un tablier arbitrairement long.

On a alors, pour ces configurations, quelques propositions faciles et d'autres moins faciles.

Proposition 1. La graine de Nord est en case 1 si Nord a le trait, sinon elle est en case 0.

Proposition 2. Le nombre de graines de la case i ne peut dépasser i .

Proposition 3. Dans une configuration déterminée, le coup gagnant pour Sud est toujours de jouer la case i contenant i graines, i étant minimum.

Proposition 4. En négligeant l'éventuelle graine de la case 0, quel que soit l'entier naturel k , il existe une et une seule configuration déterminée à k graines.

La proposition 3 permet de savoir comment jouer le piège : avec la configuration

				1	
	6	4	2	3	1

Sud doit d'abord jouer la case contenant 3 graines (même si la case 6 est *a priori* aussi jouable pour une capture dans la case 0). Ceci permet de jouer « à l'ours savant » : soumettez une telle configuration à un non initié et il aura bien du mal à la gagner alors que vous, connaissant le truc, vous tomberez sur la solution en quelques semis.

Ces propositions permettent également de construire « à reculons » la configuration déterminée à $k + 1$ graines. À partir de la configuration à k graines, on construit celle à $k + 1$ graines en repérant la case « i » vide de plus petit indice, en y plaçant précisément i graines et en retirant une graine aux cases d'indices 1 à $i - 1$ (nécessairement non vides). Si la case 1 est vide, on place alors une graine en case 0. Ainsi, à partir de la configuration déterminée à 15 graines

					1
	6	4	2		2

on construit celle à 16 graines mentionnée ci-dessus (la graine en case 0 n'est pas comptée (proposition 3)). Voici, par exemple, construite grâce à *Excel* et avec un peu de programmation la configuration à 100 graines sur un tablier 2×15 :

														1	
16	14	12	10	8	6	4	2	8	4	6	5	1	3	1	

Broline et Loeb vont beaucoup plus loin ! En particulier, ils étudient la « suite des tabliers successifs » $(a_n)_{n \geq 1}$ où a_n est le nombre de graines de la case n et y décèlent d'intéressantes périodicités. Il démontrent aussi l'impressionnante proposition :

Proposition 5. Soit $s(n)$ le plus petit nombre de graines d'une configuration déterminée nécessitant un tablier de longueur n ; si n est grand, $s(n) \simeq n^2/\pi$.

La présence de π dans ce petit joyau est due à l'apparition de la fonction Γ , laquelle vaut $\sqrt{\pi}$ en $1/2$. Il fallait bien que π s'invite quelque part, non ?

4.8. Quand la tchouka est-elle résoluble ?

Paul J. Campbell et Darrah P. Chavey, du Beloit College (Wisconsin, USA), ont étudié la tchouka $(n; k)$ ([3]) dans le but de savoir quand celle-ci était possible, disons *résoluble* pour faire plus chic. Le fruit de leurs réflexions est plus qu'intéressant tant du point de vue didactique que du point de vue de la recherche pure. Les démonstrations de certaines de leurs propositions sont accessibles aux élèves (motivés) du niveau secondaire alors que certaines questions restent ouvertes. Examinons deux résultats « abordables » :

Soit donc n le nombre de cases de la tchouka (hors rouma) et k le nombre de graines par case.

Proposition 6. La tchouka $(n; k)$ est non résoluble lorsque $k = (n + 1)^i$ ($i \geq 1$) ainsi que lorsque $k = n(n + 1)^i$ ($i \geq 0$).

DÉMONSTRATION : La configuration initiale de la tchouka est :

n	$n - 1$	$n - 2$	\dots	2	1	
k	k	k	\dots	k	k	k

Premier cas. Si chaque case contient $k = n + 1$ graines ($i = 1$), alors en jouant une case quelconque, on sème la dernière graine dans la case de départ, qui est vide et qui n'est pas la rouma : échec ! Si les cases contiennent $(n + 1)^i$ graines, alors en jouant une quelconque, on fait $(n + 1)^{i-1}$ fois le tour de la tchouka et donc on retombe dans la case de départ dans laquelle il y a maintenant $(n + 1)^{i-1}$ graines. Comme il y a enchaînement, on continue à semer mais on se retrouve dans la situation initiale vu que seul l'exposant de $n + 1$ a changé. Par induction, le joueur se retrouve à un certain moment à semer $n + 1$ graines à partir de la case initiale ce qui, on l'a vu, conduit à un échec.

Deuxième cas. Si $k = n$ ($i = 0$), en jouant la case la plus à gauche (case n), le joueur aboutit dans la rouma : il peut rejouer et chacune des autres cases contient maintenant $n + 1$ graines. Quelle que soit la case choisie pour rejouer, le joueur sème $n + 1$ graines, donc échec. Si le joueur ne joue pas la case la plus à gauche, il aboutit, en semant n , à la case précédente, qui en contient alors $n + 1$: échec ! Si les cases contiennent $n(n + 1)^i$ graines, en jouant une quelconque, le joueur fait $n(n + 1)^{i-1}$ fois le tour de la tchouka et donc termine son premier enchaînement à la case initiale qui contient $n(n + 1)^{i-1}$ graines, que le joueur resème. Par induction, le joueur

en arrive à semer n graines à partir de la case initiale. Cet enchaînement s'achève dans la case précédente qui contient, outre les $n(n+1)^i$ graines initiales, toutes celles déposées lors de ce processus, soit :

$$n(n+1)^i + n(n+1)^{i-1} + \dots + n(n+1) + n + 1 = n(n+1)^{i+1}.$$

Mais c'est la situation rencontrée au premier cas, qui conduit à l'échec. CQFD.

Ce résultat est bien sûr partiel et ne couvre pas certains cas importants. Si $n = 4$, il permet d'affirmer que les tchoukas $(4; 5)$, $(4; 25)$, $(4; 125)$, \dots , $(4; 20)$, $(4; 100)$, $(4; 500)$, \dots sont non résolubles. C'est déjà bien d'éliminer les tchoukas $(4; 5)$ et $(4; 4)$, mais qui a jamais essayé une tchouka à 5 cases avec 20 graines ou plus par case ?

Un cas *a priori* trivial est le cas $n = 1$. La tchouka ne comprend alors que deux trous, dont un seul est jouable. Très reposant pour le joueur qui n'a plus à réfléchir et dont la partie s'achève dès son premier semis enchaîné (qui peut être long) : soit son premier semis s'achève dans la rouma et il a gagné, soit il retombe avec sa dernière graine dans la seule case jouable et il a perdu. Il est très instructif de proposer alors une petite expérimentation manuelle et d'essayer une petite conjecture... Mais le résultat suivant montre qu'il faut alors avoir certains dons...

Proposition 7. La tchouka $(1; k)$ est résoluble si et seulement si les deux premiers chiffres (de gauche) de l'écriture de k en base 2 sont des 1.

DÉMONSTRATION : Si k est pair, après le premier enchaînement l'état de la tchouka est $\boxed{k/2} \boxed{k/2}$. Or, en base 2, si k est pair, on passe de k à $k/2$ en retirant le dernier chiffre qui est un 0. Si k est impair, après le premier enchaînement l'état de la tchouka est $\boxed{(k-1)/2} \boxed{(k+1)/2}$. Or, en base 2, si k est impair, on passe de k à $(k-1)/2$ en retirant le dernier chiffre qui est un 1. On voit qu'en jouant à cette tchouka, chaque fois qu'on enchaîne, le représentation en base 2 du nombre de graines dans la case jouable est obtenue en amputant cette représentation de son dernier chiffre. En bout de course, on arrive à (en base 2 pour la case jouable) : $\boxed{10_2} \boxed{k-2}$ (échec) ou $\boxed{1} \boxed{k-1}$ (victoire). Mais la victoire $\boxed{1} \boxed{k-1}$ a dû être précédée de l'état $\boxed{3} \boxed{k-3}$, c'est-à-dire $\boxed{11_2} \boxed{k-3}$. D'où le résultat annoncé.

Ainsi, la tchouka $(1; 70)$ est « perdante » car $70 = 1000110_2$ et la tchouka $(1; 15)$ est gagnante car $15 = 1111_2$. Une formulation plus ésotérique est donnée par :

Proposition 8. La tchouka $(1; k)$ est résoluble si et seulement si $k \geq 3 \cdot 2^{i-1}$, où $i = \lfloor \log_2 k \rfloor$.

Jeroen Donckers propose sur <http://www.cs.unimaas.nl/~donkers/games/ruma/>, un applet java permettant de se faire la main sur une tchouka paramétrable. Il y présente aussi une table colorée des paramètres n et k . Les cases oranges représentent les cas gagnants. Les cases bleu clair représentent les cas dont la non résolubilité découle de notre proposition 6. D'autres couleurs sont utilisées pour décrire les propositions et conjectures présentées dans [3].

4.9. Les semis infinis dans les solos

Les mancalas à une orbite de semis sont désignés sous le terme *wari* par Deledicq et Popova. Le terme *solo* désigne alors tout mancala à deux orbites de semis. Le plus souvent les solos sont pratiqués sur des tabliers à 4 rangées. Les exceptions ne manquent cependant pas comme par exemple le spectaculaire *mbelele* joué sur un tablier à deux rangées et 36 cases et long de 1,20 m, rencontré par P. Townshend ([10]) sur la route Kisangani-Buta, près de Banalia, entre les kilomètres 17 [sic] et 118! Les études sur les solos sont plus rares que celles sur les waris. La complexité inhérente au type de semis (enchaîné) et à la nature des captures (graines restant à tout moment sur le tablier) expliquent sans doute cette situation.

Dans les années 1970, le Professeur Mayega, qui est le premier à avoir réalisé un programme informatique de solo, rencontre à Kampala des joueurs d'omweso embarqués dans un semis infernal qui, paraît-il, avait commencé quatre heures auparavant. La question était posée de savoir si un semis enchaîné pouvait être infini sur un tablier 4×8 . La réponse est affirmative et il est curieux que, la pratique des ces jeux étant séculaire, on n'en ait pas eu conscience auparavant. La raison en est peut-être que, en partie réelle, les captures (très fréquentes) modifient les conditions du semis.

Voici un exemple de semis infini « trivial » : en un seul enchaînement, on retombe à une permutation circulaire près sur le tablier initial, donc le semis est infini (on ne représente que les deux rangées de Sud ; à gauche, pour rappel, la notation des 16 cases) :

p	o	n	m	l	k	j	i	2	1	0	2	1	0	2	1
a	b	c	d	e	f	g	h	3	0	1	2	0	1	2	0

En jouant la case « a » et en s'arrêtant au premier enchaînement, on ne

modifie que les cases de « a » à « d » :

2	1	0	2	1	0	2	1
0	1	2	3	0	1	2	0

on s'aperçoit que ces deux tabliers sont identiques à une rotation (sens trigonométrique) de trois cases près (un « *Roll 3* » diraient les informaticiens).

Des cas beaucoup plus complexes ont été étudiés. Ainsi la configuration suivante à 25 graines :

1	0	1	0	1	0	1	0
17	1	0	1	0	1	0	1

En jouant les 17 graines de la case « a » on tombe sur une permutation circulaire du tablier après 12 393 enchaînements et sur la configuration initiale après $16 \times 12\,393 = 198\,288$ enchaînements. Le semis est bien infini.

En 2001, Steven P. Meyer (Milwaukee School of Engineering, Wisconsin, ÉUA) propose un ensemble de critères permettant de déterminer si un semis est infini. Ces tests sont une batterie de « non-congruences » et constituent une condition suffisante. Les cases de « a » à « p » sont numérotées de 0 à 15 et $y(k)$ désigne le nombre de graines de la case k .

Tests de Meyer. En jouant la case 0, le semis est infini si

$$\left\{ \begin{array}{l} y(i) \not\equiv i + 1 \pmod{17} \\ y(i) \not\equiv i - 1 \pmod{17} \\ y(i + j) \not\equiv y(i) + j + i \pmod{17} \\ y(i + j) \not\equiv y(i) + j - i \pmod{17} \end{array} \right. \quad (0 \leq i \leq 15, 0 \leq j \leq 15 - i).$$

La démonstration de Meyer est disponible sur l'internet et rebutera l'amateur le plus acharné! Une seconde démonstration, plus courte, est proposée par John Earl ([5]). Il construit une matrice associée au tablier, lui fait subir des transformations, découvre un invariant de la matrice et en déduit les tests de Meyer.

5. Conclusion

L'univers des mancalas est riche et extrêmement varié. S'y intéresser, c'est aussi étudier des pratiques héritées de cultures le plus souvent non occidentales. Tout comme le joueur de go s'intéressera tôt ou tard à la culture japonaise, l'amateur de mancalas de manquera pas de se renseigner sur les pratiques et les origines (très diverses) de ces jeux en Afrique, en

Asie centrale ou en Asie du Sud-Est. L'étude des waris-solos nous plonge bien sûr dans l'univers du jeu mais aussi dans celui des mathématiques, celui de la pédagogie et de la didactique des jeux, celui des conjectures et de l'expérimentation et celui de l'informatique. Contrairement à ce qui se passe pour certains jeux (parfois prestigieux) de stratégie, l'univers des règles est ouvert et quasi-illimité, ce qui permet d'incessants développements. Dans cet univers, beaucoup reste à faire. N'est-ce pas Leibniz lui-même qui disait que l'homme n'était jamais aussi ingénieux que quand il inventait des jeux ?

Terminons par cette envolée lyrique que nous propose Deledicq en couverture de son ouvrage :

Le retour cyclique des graines, le mouvement incessant et tourbillonnaire de la matière ludique, le déferlement hypnotisant des vagues de pions à travers la trajectoire périodique des cases. . . Ce jeu est une respiration !

Bibliographie

- [1] John Ihyeh AGBINYA, *Computer Board Games of Africa (Algorithms, Strategies and rules)*, à paraître. Disponible sur <http://services.eng.uts.edu.au/~agbinya/index.htm>.
- [2] Duane M. BROLINE, Daniel E. LOEB, *The Combinatorics of Mancala-Type Board Games : Ayo, Tchoukaillon and 1/π*, arXiv : math.co/9502225 v1 9 Feb 1995 (<http://arxiv.org/pdf/math/9502225>).
- [3] Paul J. CAMPBELL, Darrah P. CHAVEY, Tchuka Ruma Solitaire, *The UMAP Journal*, **16**(4) (1995), 343–365.
- [4] André DELEDICQ, Assia POPOVA, *Wari et Solo — Le jeu de calculs africain*, Cedic, Paris, 1977.
- [5] John EARL, *Diagonal Count Arrays in n-hole mancalas* [Concernant cet article, cité par [1], nous ne disposons que du code postal CT4 6PU, UK, et de l'adresse électronique John.Earl@ukgateway.net.]
- [6] Dirk HUYLEBROEK, *Afrika + Wiskunde, Etnowiskunde in zwart Afrika, vanaf de koloniale tijd terug naar de oudste wiskundige vondst van de mensheid : het Ishangobeen*, VUB press, Bruxelles, 2005.
- [7] Richard PANKHURST, Gabata and Other Board-Games of Ethiopia and the Horn of Africa, *Ethiopia Observer*, 1971 (3) ; 14, 171.

- [8] Jean RETSCHITZKI, *Stratégie des joueurs d'Awélé*, L'harmattan, Paris, 1990.
- [9] Larry RUSS, *The Complete Mancala Game Book*, Marlowe & Company, New York, 1995.
- [10] Philip TOWNSHEND, Les jeux de Mancala au Zaïre, au Rwanda et au Burundi. *Les Cahiers du CEDAF* (Centre d'étude et de documentation africaines, Bruxelles) **3** (1977) 32-37.
- [11] Brian WERNHAM, *Omweso : The Royal Mancala Game Of Uganda — A General Overview Of Current Research*. Disponible sur http://us.share.geocities.com/omweso/board_games_in_academia_v_omweso.pdf.

Jouer à l'awélé (wari) en ligne :

- <http://www.ludoteka.com>;
- <http://www.kurnik.org>;
- Jouer contre l'adversaire « parfait » Awélé Oracle : <http://awari.cs.vu.nl/>.

Les publications de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (français) peuvent être obtenues par l'intermédiaire de la SBPMef : commandez-les à notre secrétariat

- Les brochures signalées par * sont de publication récente.
- Le prix « *adhérent* » concerne l'APMEP et la SBPMef.



N°	TITRES DES BROCHURES Prix, à droite, sans port. Port en plus : Cf. bas du tableau	Prix (€)	
		public	adh
* 168	<i>La place des maths vivantes dans l'éducation secondaire</i> , 336 pages. Des ateliers, des conférences, ... ◇ FIN ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE OU COLLÈGE	13	9
* 169	<i>JEUX 7</i> . 172 pages. Des aides pédagogiques par jeu	14	10
144	<i>JEUX 6</i> . Même principe.	12	8
•	<i>JEUX 7; 6; 5 (n° 119), les trois ensemble</i>	30	18
	◇ COLLÈGE		
* 166	<i>MATH À CRÉDIT</i> : Publicités et pourcentages, ...	10	6
* 165	<i>LA RÈGLE</i> (calcul algébrique) <i>DANS TOUS SES ÉTATS</i>	10	6
	◇ COLLÈGE OU LYCÉE		
151	<i>Les narrations de recherche</i>	13	9
* 253	<i>PANORAMATH 4</i> . Rallyes et autres compétitions... • <i>Ce Panoramath et les trois antérieurs, ensemble</i> :	10 38	6 23
	◇ LYCÉES		
* 171	<i>Olympiades académiques de Première 2005</i> • <i>Ce n° et ceux de 2004; 2003; 2002; 2001 ensemble</i>	13	9 34
* 156	<i>Les statistiques au lycée et un peu au-delà ...</i>	13	9
150 } 154 }	<i>Pour un enseignement problématisé des mathématiques au lycée</i> . Deux tomes. 392 pages	21	15
◇ CONCOURS D'ENSEIGNEMENT MATHS Agrégations, Capes et CAPLP —externes & internes, sujets & corrigés— par année. Les n°s de 2005, 2004, 2003, 2002, 2001, 2000, 1999 et 1998, chacun à 8 € en moyenne, <i>ENSEMBLE</i> :		30	

DEMANDEZ à l'APMEP, 26 Rue Duménil, F – 75013 Paris,
mèl : apmep@apmep.asso.fr, sa plaquette VISAGES, gratuite et franco de port, qui décrit les quelque 170 brochures proposées par l'APMEP.

PORT : Les frais de port depuis la France sont très élevés. Consultez l'APMEP pour les connaître. Si vous n'êtes pas pressé, profitez des accords entre l'APMEP et la SBPMef pour commander via le secrétariat de celle-ci.



**POLYTECH
MONS**

FACULTÉ POLYTECHNIQUE DE MONS

Ingénieur civil, une vision d'avenir



INSCRIPTION A L'EXAMEN D'ADMISSION

**Année académique
2007-2008**

**Session de septembre :
du 1^{er} au 28 août 2007**

du lundi au vendredi,
de 8h à 12h et de 14h à 16h45

La 1^{er} année du grade de bachelier est aussi organisée à Charleroi.
Formation identique à celle de Mons.



ACADÉMIE
UNIVERSITAIRE
WALLONIE-
BRUXELLES

Secrétariat des Études : 9, rue de Houdain – B 7000 Mons
Tél : 065/37 40 30 à 32 | Fax : 065/37 40 34 | secretu@fpms.ac.be

www.fpms.ac.be

Problèmes

Claudine Festraets ⁽¹⁾

Système

Problème n° 331 de *M&P* n° 159

Résoudre dans \mathbf{R} le système

$$\begin{cases} a\sqrt{x+z-y} \cdot \sqrt{x+y-z} = x\sqrt{yz} \\ b\sqrt{x+y-z} \cdot \sqrt{y+z-x} = y\sqrt{xz} \\ c\sqrt{z+y-x} \cdot \sqrt{z+x-y} = z\sqrt{xy}, \end{cases}$$

a, b, c étant des réels donnés non nuls.

Solution de J. Rasse, de Méan

Il faut d'abord remarquer que x, y, z doivent être non nuls et de même signe. De plus, pour que les radicands des membres de gauche soient positifs, il faut $x + y + z > 0$, donc x, y, z sont positifs et sont les mesures des côtés d'un triangle, ce qui implique $a, b, c > 0$.

En multipliant les trois équations membre à membre, on obtient

$$abc(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x) = x^2y^2z^2.$$

En divisant cette équation successivement par le carré de chacune des équations du système, il vient

$$\begin{aligned} \frac{bc}{a}(y+z-x) &= yz, \\ \frac{ab}{c}(x+y-z) &= xy, \\ \frac{ac}{b}(x+z-y) &= xz. \end{aligned}$$

La somme des deux premières équations de ce système conduit à

$$2y = \frac{ayz}{bc} + \frac{cxy}{ab}$$

⁽¹⁾ Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à Cl. FESTAETS, Rue J.-B. Vandercammen 36, B-1160 Bruxelles ou à l'adresse e-mail hamoircl@brutele.be.

d'où $a^2z + c^2x = 2abc$. De même, en additionnant la première et la troisième équation, on obtient $a^2y + b^2x = 2abc$, et en additionnant les deux dernières équations, on obtient $c^2y + b^2z = 2abc$.

Le système

$$\begin{cases} a^2z + c^2x = 2abc \\ a^2y + b^2x = 2abc \\ c^2y + b^2z = 2abc, \end{cases}$$

du premier degré en x, y, z , admet la solution

$$\begin{aligned} x &= \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{bc} \\ y &= \frac{b(a^2 + c^2 - b^2)}{ac} \\ z &= \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{ab}. \end{aligned}$$

Bonne solution de J. OOMS, de Chimay, qui cependant n'a pas remarqué que a, b, c sont non nuls par hypothèse.

Premier chiffre

Problème n° 332 de *M&P* n° 159

Soient a et n des nombres naturels et $s = a + a^2 + a^3 + \dots + a^n$. Démontrer que, en numération décimale, le chiffre des unités de s est 1 ssi le chiffre des unités de a et celui de n sont tous deux égaux à 1.

Solution de J. Ooms, de Chimay

Sous la condition proposée, a est nécessairement impair.

Soit donc $a \equiv 1, 3, 5, 7$ ou $9 \pmod{10}$, seuls chiffres des unités possibles pour un nombre impair codé dans le système décimal.

Or, pour $a \equiv 3 \pmod{10}$, les puissances successives de a donnent modulo 10 la suite périodique 3, 2, 9, 0, 3, 2, 9, 0, \dots , et les sommes partielles s_i , pour $i = 1, 2, 3, \dots, n$, donnent modulo 10 la suite périodique 3, 2, 9, 0, 3, 2, 9, 0, \dots , qui ne comprend pas le chiffre 1.

On vérifie de manière analogue qu'on ne peut avoir $a \equiv 5, 7, 9 \pmod{10}$.

Reste une seule possibilité : $a \equiv 1 \pmod{10}$. Dans ce cas, $s \equiv n \pmod{10}$ et pour que $s \equiv 1 \pmod{10}$ il faut et il suffit que le chiffre des unités de n soit 1.

Bonne solution de J. RASSE, de Méan.

Polynômes

Problème n° 333 de *M&P* n° 159

Déterminer tous les polynômes $P(x)$ à coefficients réels tels que

$$P(x) \cdot P(x+1) = P(x^2 + x + 1).$$

Je n'ai reçu pour ce problème qu'une seule solution et elle est malheureusement incomplète. Les solutions à ce problème sont donc les bienvenues. Je sais qu'il y a eu des problèmes de délai pour la publication du *M&P* et que des solutions n'ont pu m'être envoyées pour les dates limites proposées, mais n'hésitez pas à me transmettre vos solutions, même avec retard : j'en tiendrai compte dans les numéros suivants.

* *

*

Les solutions des problèmes que voici doivent me parvenir pour le 15 septembre 2007 au plus tard. Ces solutions peuvent être manuscrites, mais vous pouvez aussi les envoyer à mon adresse électronique sous la forme d'un fichier \LaTeX ou à défaut au format doc, pdf ou txt. Rédigez vos différentes solutions sur des feuilles séparées et n'oubliez pas d'indiquer votre nom sur chacune des feuilles.

340. Similitudes

Soit f_1 , f_2 et f_3 trois similitudes directes du plan, ayant un point fixe commun, et telles que :

1. $f_1 \circ f_2 \circ f_3$ est la transformation identique du plan ;
2. Quel que soit le point P , les centres de gravité des triangles $(f_1(P), f_2(P), f_3(P))$ et $(f_1^{-1}(P), f_2^{-1}(P), f_3^{-1}(P))$ sont confondus.

Montrer que l'une des f_k est l'identité.

341. Division

Un élève effectue la division d'un nombre naturel a par un nombre naturel non nul $b \leq 100$. Dans le développement décimal du quotient, il trouve après la virgule les chiffres consécutifs 1, 9, 8, 2. Démontrer que cet élève s'est trompé dans ses calculs.

342. Inégalité

Les nombres réels positifs x, y, z sont tels que $xyz \geq 1$. Démontrer l'inégalité

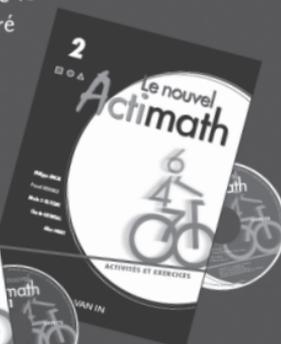
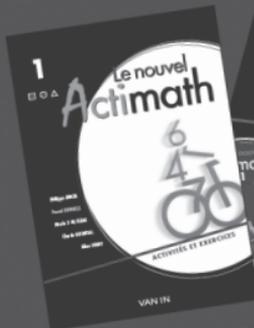
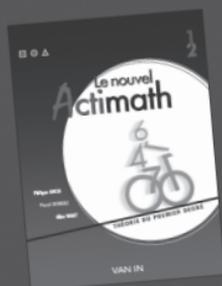
$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + x^2 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

**Vous utilisez Actimath au premier degré ?
Vous adorerez**

Le nouvel Actimath !

Au premier degré, Le nouvel Actimath se compose :

- > des 2 cahiers Activités et exercices avec leur CD-Rom
- > du référentiel Théorie du premier degré



*Encouragés par le formidable accueil que vous avez réservé l'an dernier au nouvel **Actimath 1**, nous vous présentons aujourd'hui la **collection complète pour le premier degré**.*

*Découvrez notre offre exceptionnelle de lancement sur **www.actimath.be** dès avril 2007.*

Le nouvel Actimath
*le même mais en mieux
car arrivé à pleine maturité !*



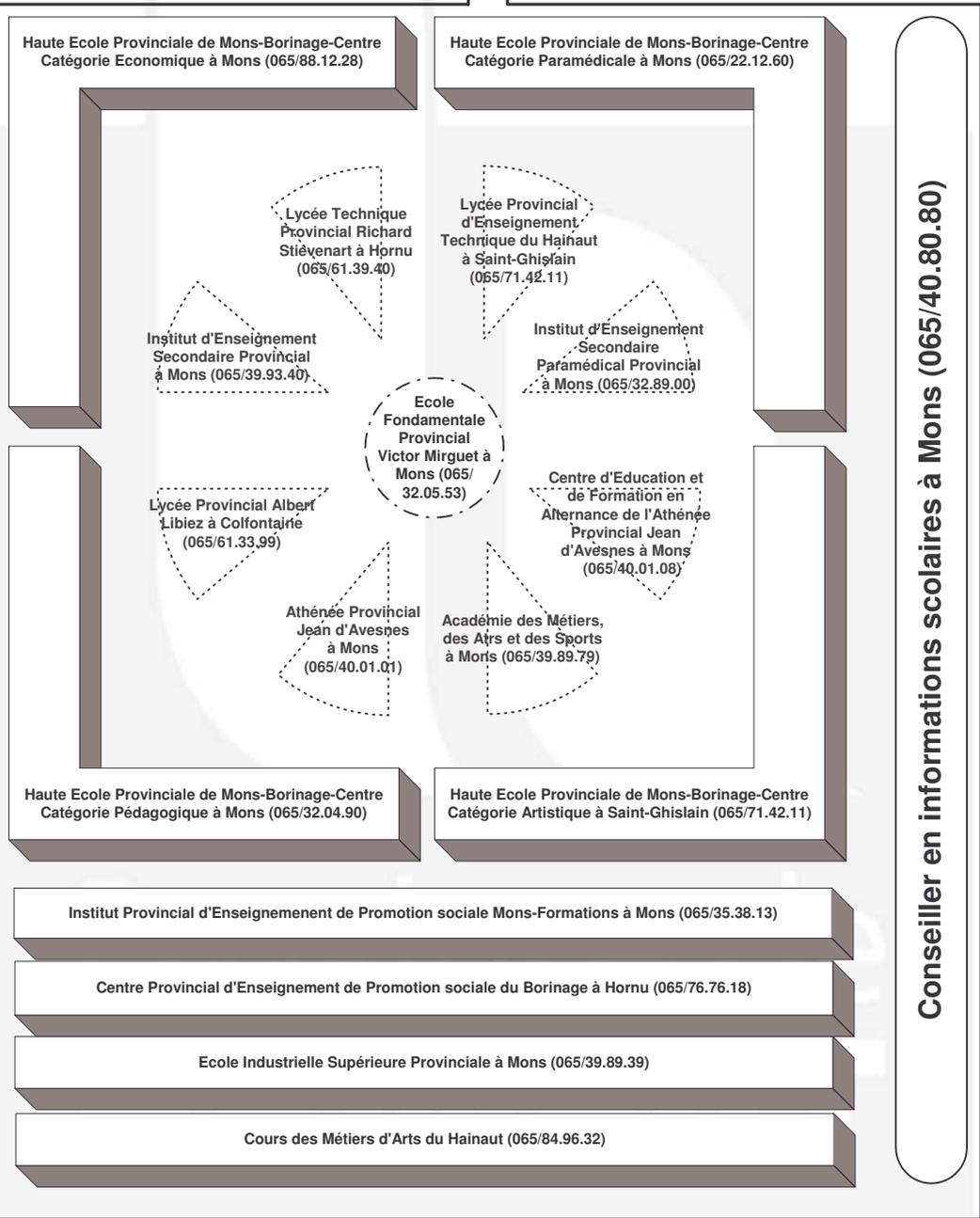
VAN IN
EDITIONS

www.actimath.be



Enseignement de la Province de Hainaut Région Mons-Borinage

Direction Générale Régionale Mons-Borinage
065/40.80.80



Conseiller en informations scolaires à Mons (065/40.80.80)

Olympiades

Claudine Festraets ⁽¹⁾

Voici des solutions aux trois derniers problèmes proposés lors de l'Olympiade Mathématique Internationale de 2006.

Problème 4. *Trouver tous les couples (x, y) d'entiers vérifiant*

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Solution de François Gonze, de l'Institut de la Providence à Wavre

Analysons d'abord les premiers cas pour x :

- Si $x \leq -2$, $2^{2x+1} + 2^x$ est fractionnaire, compris entre 0 et $\frac{1}{2}$, ce qui est impossible ;
- Si $x = -1$, on a $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$ ce qui n'est pas le carré d'un entier ;
- Si $x = 0$, on a $1 + 1 + 2 = 4$ ce qui donne les solutions $(0; 2)$ et $(0; -2)$;
- Si $x = 1$, on a $1 + 2 + 8 = 11$ qui n'est pas un carré ;
- Si $x = 2$, on a $1 + 4 + 32 = 37$ qui n'est pas un carré ;
- Si $x = 3$, on a $1 + 8 + 128 = 138$ qui n'est pas un carré.

Reste à analyser $x \geq 4$.

$$\text{On aura } 2^x + 2^{2x+1} = 2^x(2 \cdot 2^x + 1) = (y + 1)(y - 1).$$

2^x et $2 \cdot 2^x + 1$ sont premiers entre eux, de même que $y + 1$ et $y - 1$, excepté un facteur 2.

Vu que la différence entre $2 \cdot 2^x + 1$ et 2^x est de $2^x + 1$, que celle entre $y + 1$ et $y - 1$ est de 2 et que leurs produits sont les mêmes, pour $y > 0$ on doit avoir $2^x < y - 1 < y + 1 < 2 \cdot 2^x + 1$

De $y + 1$ et $y - 1$, l'un des deux est multiple de 2^{x-1} , l'autre est congru à 2 modulo 4.

Les seuls multiples de 2^{x-1} compris entre 2^x et $2 \cdot 2^x + 1$ sont 2^{x+1} et $3 \cdot 2^{x-1}$.
On aura soit $y - 1 = 2^{x+1}$, soit $y + 1 = 3 \cdot 2^{x-1}$, soit $y + 1 = 2^{x+1}$, soit $y - 1 = 3 \cdot 2^{x-1}$.

Si $y - 1 = 2^{x+1}$, alors $y + 1 = 2 \cdot 2^x + 2 \not\leq 2 \cdot 2^x + 1$.

⁽¹⁾ Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à Cl. FESTAETS, Rue J.-B. Vandercammen 36, B-1160 Bruxelles ou à l'adresse e-mail hamoircl@brutele.be.

Si $y + 1 = 2^{x+1}$, alors $2^x(2 \cdot 2^x + 1) = 2^{x+1}(2^{x+1} - 2)$, d'où $2^{x+1} = 5$, ce qui est impossible pour x entier.

Si $y - 1 = 3 \cdot 2^{x-1}$, alors $2^x(2 \cdot 2^x + 1) = 3 \cdot 2^{x-1}(3 \cdot 2^{x-1} + 2)$, d'où $2^{x+2} + 2 = 9 \cdot 2^{x-1} + 6$, ce qui est impossible car $9 \cdot 2^{x-1} > 2^{x+2}$.

Si $y + 1 = 3 \cdot 2^{x-1}$, alors $2^x(2 \cdot 2^x + 1) = 3 \cdot 2^{x-1}(3 \cdot 2^{x-1} - 2)$, d'où $2^{x-1} = 8$ et $x = 4$.

Pour $x > 4$, il n'y a donc pas de solution. Pour $x = 4$, on obtient dans l'équation de départ $1 + 16 + 512 = 529 = 23^2 = (-23)^2$.

Les solutions sont les couples $(0; 2)$, $(0; -2)$, $(4; 23)$ et $(4; -23)$.

Problème 5. Soit $P(x)$ un polynôme à coefficients entiers, de degré $n > 1$ et k un entier strictement positif. On considère le polynôme $Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots))$, dans lequel P apparaît k fois. Montrer qu'il existe au plus n entiers t tels que $Q(t) = t$.

Solution

Remarquons que si tout point fixe de $Q(x)$ est un point fixe de $P(x)$, alors la propriété est évidente.

1. Si $k = 2$.

Soit a un point fixe de $Q(x)$ tel que $P(a) = b \neq a$. On a $P(a) = b$ et $P(b) = P(P(a)) = Q(a) = a$.

Soit c un autre point fixe de $Q(x)$ tel que $P(c) = d \neq c$. On a $P(c) = d$ et $P(d) = P(P(c)) = Q(c) = c$.

On sait que pour tout polynôme $P(x)$, $P(\alpha) - P(\beta)$ est toujours divisible par $\alpha - \beta$ lorsque $\alpha \neq \beta$. Dès lors,

$$a - c \text{ divise } P(a) - P(c) = b - d,$$

$$a - d \text{ divise } P(a) - P(d) = b - c,$$

$$b - c \text{ divise } P(b) - P(c) = a - d,$$

$$b - d \text{ divise } P(b) - P(d) = a - c,$$

et donc $|a - c| = |b - d|$ et $|b - c| = |a - d|$.

Si $a - c = b - d$ et $b - c = a - d$, alors $a = b$, ce qui faux. Dans tous les autres cas, on obtient $a + b = c + d$.

Considérons le polynôme $F(x) = P(x) + x - a - b$; on a $F(a) = a$ et $F(c) = c$, donc tout point fixe de $Q(x)$ est une racine de $F(x)$; or $F(x)$ est de degré n , donc $Q(x)$ admet au plus n points fixes.

2. Si $k > 2$.

Soit a un point fixe de $Q(x)$ et $P(a) = a_1 \neq a$, $P(P(a)) = P(a_1) = a_2$, $P(P(P(a))) = P(a_2) = a_3, \dots, Q(a_k) = P(a_{k-1}) = a_k = a$.

$$\begin{aligned}
 a - a_1 & \text{ divise } P(a) - P(a_1) = a_1 - a_2, \\
 a_1 - a_2 & \text{ divise } P(a_1) - P(a_2) = a_2 - a_3, \\
 & \vdots \\
 a_{k-1} - a & \text{ divise } P(a_{k-1}) - P(a) = a - a_1.
 \end{aligned}$$

De là, $|a - a_1| = |a_1 - a_2| = \dots = |a_{k-1} - a|$.

Soit $a_m = \min\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$; $a_{m-1} - a_m > 0$ et $a_m - a_{m+1} < 0$, donc $a_{m-1} - a_m = -(a_m - a_{m+1})$ et de là $a_{m-1} = a_{m+1}$.

On a ainsi $P(a_{m-1}) = a_m$ et $P(a_m) = a_{m-1}$. Les valeurs des a_i sont donc alternativement a_m et a_{m-1} , ce qui conduit soit à $Q(a_m) = a_m = a$ soit à $Q(a_{m-1}) = a_{m-1} = a$.

– Dans le premier cas, posons $a_{m-1} = b$; on a alors $P(a) = b$ et $P(P(a)) = P(b) = a_m = a$.

– Dans le second cas, posons $a_m = b$; on a alors $P(a) = b$ et $P(P(a)) = P(b) = a_{m-1} = a$.

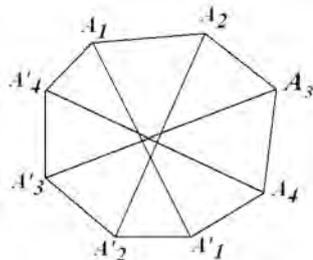
Tous les points fixes de $Q(x)$ sont aussi des points fixes de $P(P(x))$ et nous avons démontré dans la première partie qu'il y en a au plus n .

Problème 4. À tout côté b d'un polygone convexe P on associe le maximum de l'aire d'un triangle contenu dans P et ayant b comme côté. Montrer que la somme des aires associées à tous les côtés de P est au moins le double de l'aire de P .

Solution

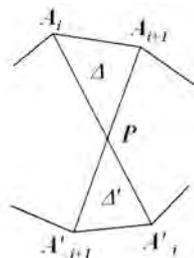
1. Considérons un polygone de $2n$ côtés et de sommets $A_1, A_2, \dots, A_n, A'_1, A'_2, \dots, A'_n$.

Traçons les diagonales $A_1A'_1, A_2A'_2, \dots, A_nA'_n$; nous les appellerons diagonales principales.



Deux diagonales principales consécutives se coupent et déterminent deux triangles. Soient Δ et Δ' les deux triangles dont la somme des aires est la plus grande.

Tout point intérieur au polygone est soit sur une des diagonales principales soit intérieur à au moins un des triangles, donc la somme totale des aires de tous les triangles est supérieure ou égale à l'aire S du polygone et $\Delta + \Delta' \geq S/n$.



Les diagonales principales $A_i A'_i$ et $A_{i+1} A'_{i+1}$ qui déterminent les triangles d'aires Δ et Δ' se coupent en P . On peut toujours supposer $|A_i P| \geq |P A'_i|$; on a alors $\text{Aire}(A_i A_{i+1} A'_{i+1}) \geq (\Delta + \Delta') \geq S/n$. Il existe donc un triangle T dont les trois sommets sont des sommets du polygone, dont un côté est un côté du polygone et dont l'aire est supérieure ou égale à un n^e de l'aire du polygone.

2. Considérons à présent un polygone P de côtés b_1, b_2, \dots, b_n . À chaque côté b_i , associons le triangle contenu dans P , ayant b_i comme côté, et dont l'aire S_i est maximum.

Si la somme de ces aires est strictement inférieure au double de l'aire S de P , alors $\sum_{i=1}^n S_i < 2S$. Posons $S_i = r_i S$, avec $r_i \in \mathbf{R}$; l'inégalité précédente devient : $\sum_{i=1}^n r_i < 2$.

Il existe des rationnels q_i tels que, pour tout i , $q_i \geq r_i$ et $\sum_{i=1}^n q_i = 2$.

Réduisons ces rationnels au même dénominateur : $q_i = t_i/t$. On a $\sum_{i=1}^n t_i = 2t$.

Si on divise chacun des côtés b_i du polygone P en t_i parties égales, on obtient un polygone P' de $2t$ côtés et en vertu du 1), il existe au moins un triangle T dont les trois sommets sont des sommets de P' , dont un côté est un côté de P' et dont l'aire est supérieure ou égale à S/t .

Si la base de ce triangle est une partie du côté b_i , alors les t_i triangles dont la base est sur b_i et ayant même troisième sommet que T ont

tous même aire. Soit A la somme de leurs aires :

$$A \geq \frac{t_i S}{t} = q_i S \geq r_i S = S_i,$$

ce qui est impossible car S_i est par hypothèse l'aire du plus grand triangle intérieur à P construit sur b_i .

S
B
P
M
e
f

Congrès de Mathématique

**La Société Belge
des Professeurs de Mathématique
d'expression française**

*invite les enseignants du fondamental au supérieur
à son 33^{ème} congrès dont le thème est :*



ART, LITTÉRATURE et MATHÉMATIQUE



Extrait

Le Compas glorieux se réveille en sursaut,
Ému de cette vue et d'un espoir si haut.
Il rend grâce au soleil, et ferme comme un Aigle
Le regarde et s'en va : puis rencontre la Règle ;
Droite, d'un grave port, pleine de majesté,
Inflexible et surtout observant l'équité (...)

Charles Perrault

Du 22 au 24 août 2007

**À l'Athénée provincial
Jean d'Avesnes
Avenue Gouverneur Cornez
7000 MONS**

Tél : (+32) 65 400 101

Toutes informations :
Site : www.sbpn.be
Tél / Fax : (+32) 65 319 180
Courriel : sbpm@sbpm.be

Congrès reconnu par l'IFC

Le coin du trésorier

R. Scrève

Tarifs (Janvier 2006)

Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent *Mathématique et Pédagogie*, *SBPM-Infor* et les deux *Math-Jeunes*.

- Belgique :
 - Cotisation ordinaire : 24 € ;
 - Cotisation multiannuelle (5 ans) : 110 € ;
 - Cotisation familiale (réservée aux couples cohabitant ; les intéressés ne reçoivent qu'un exemplaire des publications, mais sont membres à part entière et participent donc aux élections) : 30 € ;
 - Cotisation réduite (réservée aux étudiants et aux sans-emploi) : 15 € ;
- Europe : 65 € (non-PRIOR), 72 € (PRIOR) ;
- Autres pays : 70 € (non-PRIOR), 79 € (PRIOR).

Abonnement à *Mathématique et Pédagogie*

- Belgique : 30 € ;
- Europe : 50 € (non-PRIOR), 54 € (PRIOR) ;
- Autres pays : 53 € (non-PRIOR), 58 € (PRIOR).

Anciens numéros :

- < 2005 : $0,75 \text{ €/n}^\circ + \text{frais d'expédition}$.
- ≥ 2005 : $2,50 \text{ €/n}^\circ + \text{frais d'expédition}$.

Frais d'expédition : Belgique : 1,80 €, Europe : 4,50 €, Autres pays : 6 €.

Abonnement à *Math-Jeunes* ou *Math-Jeunes Junior*

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, supérieur et inférieur respectivement, sont idéalement pris de manière groupée par l'intermédiaire d'un professeur.

- Abonnements groupés (au moins 5) :

◦ Abonnements groupés à une des revues (3 numéros)	Belgique : 4 € ;
◦ Abonnements groupés aux deux revues (6 numéros)	Belgique : 8 €.

- Abonnements individuels :
 - Abonnements à une des revues (3 numéros)
Belgique : 6 € ;
France : 8 € (à prendre par l'intermédiaire de l'APMEP) ;
Europe : 18 € (non-PRIOR), 20 € (PRIOR) ;
Autres pays : 19 € (non-PRIOR), 22 € (PRIOR).
 - Abonnements aux deux revues (6 numéros)
Belgique : 12 € ;
France : 16 € (à prendre par l'intermédiaire de l'APMEP) ;
Europe : 24 € (non-PRIOR), 26 € (PRIOR) ;
Autres pays : 25 € (non-PRIOR), 28 € (PRIOR).

Anciens numéros :

- $\leq 2003-2004$: 0,25 €/n° + frais d'expédition.
- $\geq 2004-2005$: 0,50 €/n° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : Belgique : 1,50 €, Europe : 2,50 €, autres pays : 3 €.

Bulletin de l'APMEP

Les membres de la SBPMef peuvent, par versement à son compte, devenir membres de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (France). Le prix de l'abonnement est de 50 €. Ils recevront le *Bulletin* de l'APMEP, le BGV (*Bulletin à Grande Vitesse*) et *PLOT*.

Les membres de la SBPMef peuvent aussi commander par celle-ci les publications de l'APMEP ; ils bénéficient du prix « adhérents ».

Autres publications (brochures et CD-ROM)

Les prix indiqués sont les prix des publications ; les frais d'expédition (port et emballage) sont en sus. Les prix réduits sont réservés aux membres de la SBPMef ou de sociétés associées (comme l'APMEP) et aux étudiants. N'hésitez pas à consulter notre secrétariat ou à visiter notre site Internet.

Pour toutes nos publications non périodiques, à partir du dixième exemplaire, toute la commande bénéficie d'une réduction de 10 %.

Modalités de paiement :

Pour effectuer une commande, versez le montant indiqué sur un des comptes suivants :

- **Si vous habitez en Belgique** : Compte 000-0728014-29 de SBPMef.
- **Si vous habitez en France** : Compte CCP Lille 10 036 48 S de SBPMef.
- **Si vous habitez ailleurs** : Virement international sur l'un de nos deux comptes avec les références internationales suivantes :
CCP BELGIQUE : IBAN BE26 0000 7280 1429 / BIC BPOTBEB1
ou CCP LILLE :
IBAN FR68 2004 1010 0510 0364 8S02 683 / BIC PSSTFRPPLIL

Le coin du trésorier

	Prix plein	Prix réduit	Frais d'expédition
Séries RÉNOVER			
Série 1 (n° 12)	1 €	—	T ₁
Série 2 (n°s 7-11 & 13)	5 €	—	T ₂
Série 3 (n° 14)	5 €	—	T ₂
Les 3 séries	7,50 €	—	T ₂
Dossiers d'exploration didactique			
Dossier 2 : <i>Autour du PGCD</i>	1,80 €	1,20 €	T ₁
Dossier 3 : <i>Isomorphisme et Dimension</i>	1,80 €	1,20 €	T ₁
Dossier 6 : <i>Statistique</i>	7,40 €	6 €	T ₁ ⁽¹⁾
Dossier 7 : <i>Vers les infiniment petits</i> (Simone TROMPLER et Guy NOËL)	6 €	—	T ₁
Dossier 8 : <i>La démonstration en géométrie plane dans les premières années l'enseignement secondaire</i> (Claude VILLERS et al.)	9 €	—	T ₂ ⁽²⁾
Dossier 9 : <i>Des démonstrations à la rencontre des compétences à travers de thèmes</i> (Claude VILLERS et al.)	9 €	—	T ₂ ⁽²⁾
Dossier 10 : <i>Narrations de recherche — De la théorie à la pratique dans les enseignements secondaire et supérieur</i> (Jacques BAIR, Jean-Claude DELAGARDELLE, Valérie HENRY)	6 €	—	T ₁
Jacques BAIR, <i>Mathématique et Sport</i>	5 €	3,70 €	T ₁
François JONGMANS, <i>Eugène Catalan, Géomètre sans patrie, ...</i>	12 €	9,50 €	T ₂
G. ROBERT, CD-ROM, logiciels mathématiques	5 €	—	T ₁
Recueils de questions des OMB			
Tome 5	6 €	—	T ₁ ⁽¹⁾
Tome 6	6 €	—	T ₁ ⁽¹⁾
Tomes 5 & 6 ensemble	10 €	—	T ₁ ⁽¹⁾

⁽¹⁾ 2-3 ex. : T₂; 4-6 ex. : T₃; 7-12 ex. : T₄; au-delà : consulter le secrétariat.
⁽²⁾ 2 ex. : T₃; 3-4 ex. : T₄; au-delà : consulter le secrétariat.

Frais d'expédition (non-PRIOR)			
	Belgique	Europe	Autres pays
Tarif 1	1,80 €	4,50 €	6 €
Tarif 2	3,50 €	8,50 €	12 €
Tarif 3	5 €		
Tarif 4	7 €		

Pour les expéditions PRIOR :
consulter le secrétariat.

Pour la définition d'« Europe »,
voir les tarifs postaux.

Pour tout problème,
consulter le secrétariat.

