

Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française	
Secrétariat : <i>M.-C. Carruana</i> , Rue du Onze novembre 24, B-7000 Mons (Belgique). Tél. : 32.(0)65.31.91.80; courriel : sbpm@sbpm.be . Site internet : http://www.sbpm.be	
Conseil d'administration : <i>B. Baudelet, M. Denis-Pecher, É. Deridiaux, P. Dupont, D. Foucart, M. Frémal, Chr. Géron, M. Goffin, R. Gossez-Ketels, M. Herman, J.-P. Houben, R. Lesplingart-Midavaine, M. Machtelings, Chr. Michaux, J. Miéwis, N. Miéwis-Seronveaux, Ch. Randour-Gabriel, R. Scrève, Ph. Skilbecq, G. Troessaert, Y. Vancaster</i>	
Président, Olympiades Internationales : <i>G. Troessaert</i> , Sur le Chêne 58, 6800 Libramont, Tél. 061.22.42.01	Vice-Présidents : <i>M. Herman</i> , Rue Rafhay 95, 4630 Soumagne, Tél. 087.26.70.23; <i>D. Foucart</i> , Rue du Colroy 18, 7050 Herchies
Administrateur délégué : <i>Chr. Michaux</i> , Rue Brigade Piron 290, 6061 Montignies-sur-Sambre, Tél. 065.35.47.06	Congrès, Publicité : <i>M. Denis-Pecher</i> , Rue de la Ferme 11, 5377 Noisieux (Somme-Leuze), Tél. 086.32.37.55
Trésorier : <i>R. Scrève</i> , Rue des Goutteaux 6, 6032 Mont-sur- Marchienne, Tél. 071.40.27.34	Secrétaire : <i>M. Frémal</i> , Rue W. Jamar 311/51, 4430 Ans, Tél. 04.263.68.17
Olympiades nationales : <i>Cl. Festraets-Hamoir</i> , Rue J.-B. Vandercammen 36, 1160 Bruxelles Tél. 02.673.90.44	Contact Presse : <i>N. Miewis-Seronveaux</i> , Avenue de Péville 150, 4030 Grivegnée Tél. 04.343.19.92
Math-Jeunes Junior : <i>A. Paternotte</i> , Rue du Moulin 78, 7300 Boussu, Tél. 065.78.50.64	Math-Jeunes Senior : <i>G. Noël</i> , Rue de la Culée 86, 6927 Resteigne, Tél. 084.38.72.89
SBPM-Infor : <i>R. Gossez</i> , Albert I Laan 13, 1560 Hoeilaart, Tél. 02.657.98.92	Site Internet : <i>R. Lesplingart</i> , Rue de Trazegnies 87, 6230 Pont-à-Celles, Tél. : 071.84.36.08
Mathématique et Pédagogie : <i>P. Dupont</i> , Rue du Stampia 77, 1390 Grez-Doiceau, Tél. 010.84.11.99 Comité de lecture : <i>J. Bair, A.-M. Bleuart, M. Denis-Pecher, V. Henry, M. Herman, J.-P. Houben, Chr. Michaux, J. Miewis, J. Navez, G. Noël, Ph. Skilbecq, Cl. Villers</i>	

Photo de couverture : *Néphroïde* (Dan Graham, *Two two-way-mirror half circles*, 2000 (Collection ING Belgium)); Ixelles, aout 2007 — Photo P. Dupont



Mathématique et Pédagogie

Sommaire

- Ronald Hellin, *Éditorial* 3

Articles

- Charlotte Bouckaert, Francis Buekenhout, Claude Culus, Monique Frédérickx, Annie Goo-
vaerts, Jacqueline Sengier, *Classification
objective des quadrilatères* 5
- Richard Choulet, *Soyons carrés !* 37
- Jean-Paul Houben, *Cabri-Géomètre et les
lieux (2)* 49

Rubriques

- C. Festraets, *Problèmes* 57
- C. Festraets, *Olympiades* 61
- J. Navez, *Bibliographie* 69
- R. Scrève, *Le coin du trésorier* 72

NOTE

- Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse :
Pascal Dupont, Rue du Stampia 77, B - 1390 Grez-Doiceau.
Courriel : `pascal.dupont@ulg.ac.be`
- Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique *stricto sensu*, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques, &c.
- Les auteurs sont responsables des idées qu'ils expriment. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.
- Les auteurs sont invités à envoyer leurs articles encodés sur un CD-rom ou par courrier électronique. L'usage de $\text{\LaTeX}$ est vivement recommandé ; d'autres traitements de texte ne devraient être utilisés que pour des textes ne comportant pas de formules ; dans ce cas, le format « texte seul » est finalement encore préférable. À défaut, les textes seront dactylographiés. *Les textes devant être réencodés, en tout ou en partie, risquent de voir leur délai de parution allongé de manière appréciable.*
- Si l'article en contient, la qualité des figures est extrêmement importante. Elles devraient être réalisées selon l'une des modalités suivantes, dans l'ordre des préférences décroissantes : l'usage, dans le texte, de l'environnement « tikzpicture » (défini dans le paquet « tikz ») ; l'inclusion de fichiers externes, au format PDF ou JPEG (éviter les compressions trop importantes) : le PostScript devra être converti ; dans le cas d'un article envoyé sur papier, des documents de bonne qualité et prêts à être scannés.
- L'auteur mentionnera dans l'article ses prénom, nom et adresse (personnelle ou professionnelle) ainsi que l'institution où il travaille et, éventuellement, une liste de mots clés (10 maximum).
- La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous.
Pour les livres :
DIEUDONNÉ J., *Foundations of Modern Analysis*, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pp.
Pour les articles :
GRIBAUMONT A., Les structures de programmation, *Mathématique & Pédagogie*, **36** (1982), 53–56.
- Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée ; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour ce faire.
- MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

©SBPMef - Toute reproduction partielle ou totale est interdite sans autorisation.
Éditeur responsable : Pascal Dupont, Rue du Stampia 77, 1390 Grez-Doiceau.
Publié avec l'appui de l'Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Service général du Pilotage du système éducatif.

Éditorial

Votre société, la SBPMef, est membre d'une confédération d'associations-sœurs. Nos représentants y sont Micheline DENIS et René SCRÈVE. Dans le texte qui suit, Ronald HELLIN, de l'Association belge des Professeurs d'Histoire, vous présente la *Capp*.

LA RÉDACTION

« Nos pères ont fondé les Associations. Nous avons fondé la *Capp*. »

Roland DELRONCHE

Coordination des Associations Pluralistes de Professeurs

Des professeurs au service des professeurs

La *Capp* concrétise ce que les Associations ne peuvent réaliser isolément. Dix ans de réalisations.

En 1992, à l'initiative de Marie-Louise DOCQUIER (FPGL), de Roland DELRONCHE et Émile CUNET (SBPF) d'abord, de Gérard COBUT (Probio), Jean WILMET (SBPM), Michel GOURDIN (SBPE) et Alfred BRUNEL (ABPH) ensuite, six associations d'enseignants décident d'unir leurs efforts afin de valoriser leur travail aux yeux des autorités et dans le souhait d'être consultées sur les questions importantes qui concernent l'enseignement en Communauté française. En octobre 1993, la *Capp* regroupe dix associations de professeurs. Elle se constitue en asbl en 1997 (Moniteur belge du 14 avril 1997) et regroupe quelque 7000 enseignants du secondaire.

Réunis d'abord dans les locaux de l'Institut royal des Sciences naturelles, puis à la Maison de la Francité à Bruxelles, les deux délégués de chacune des associations se rencontrent depuis 1997 dans les locaux de la Faculté universitaire des Sciences agronomiques de Gembloux, siège social de la *Capp*.

Dès 1994, la *Capp* diffuse une brochure de présentation avec toutes les indications utiles précises concernant les activités et les objectifs de chacune des associations participantes. La *Capp* possède son site internet (<http://capp.fsagx.ac.be/>) où elle diffuse, entre autres choses, une re-

vue de presse régulière concernant les questions d'enseignement en Belgique et en Europe.

Depuis 1995, la *Capp* présente l'éventail des associations de professeurs au Salon de l'Éducation à Namur. La même année, la *Capp* organise à Bruxelles une conférence-débat sur le thème « Perspectives de l'enseignement pour les vingt prochaines années ». En 2004, après l'enquête « PISA 2000 » de l'OCDE, et sans attendre 2015, la *Capp* renouvelle l'opération avec une conférence-débat organisée à Gembloux sur le thème « L'enseignement en 2004, sursaut ou enlisement ? ».

En 1997, grâce à l'appui actif de la société SOLVAY-Jemeppe et aux conseils avisés de Jacques SOLVAY et Jean-Marie CHAUVIER, la *Capp* met gratuitement à la disposition des enseignants quatre *Ensembles Pédagogiques Interdisciplinaires* (EPI), des « valises pédagogiques » utilisables en classe sur les thèmes :

- La communication ;
- Le temps ;
- Matière et éléments ;
- Semblable et différent.

Présentés à la Ministre de l'Éducation de l'époque, les EPI suscitent grand intérêt.

Chaque année, depuis 2004, un voyage emmène un groupe d'enseignants, membres de nos associations, vers une capitale ou une région d'Europe riche de culture et d'apports pédagogiques (Dresde, Barcelone, Rome, demain Berlin et Liverpool en 2008).

Dans le même temps, les associations œuvrent ensemble au sein de la *Capp* pour animer des ateliers pédagogiques et susciter des vocations dans un esprit d'interdisciplinarité : ateliers « Le monde des énigmes » et « Remue méninges » à Gembloux (2000–2001), « Le jardin des plantes et la couleur » à Namur (2005), « La sécurité par le partenariat » avec l'OTAN (2006), « Les métiers de l'eau » (2007).

Cette année 2007, la *Capp* fête le dixième anniversaire de sa constitution en asbl et de la diffusion des EPI dans les écoles. Son président actuel, Jean-Marie DEBRY (en fonction depuis 2000, après les premières années présidées par Gérard COBUT) « gouverne » l'aréopage des enseignants avec conviction et dynamisme. Au fil des années, les délégués et déléguées des différentes associations changent ; seuls les noms et les visages se renouvellent, la volonté de servir les enseignants demeure.

Classification objective des quadrilatères

CHARLOTTE BOUCKAERT,
FRANCIS BUEKENHOUT, CLAUDE CULUS,
MONIQUE FRÉDERICKX,
ANNIE GOOVAERTS, JACQUELINE SENGIER
UREM – ULB

1. Introduction

Lors d'une des multiples discussions que notre équipe a eues au sujet de la fleur chinoise [1], Francis Buekenhout nous a parlé de logiciels qui permettent de déterminer tous les sous-groupes d'un groupe G déterminé et ce à conjugaison près. Le groupe dont nous nous occupions était le groupe des automorphismes du cube, $\text{Aut}(\text{cube})$ qui est d'ordre 48. Une thèse de Francis Buekenhout est que, étant donné un objet, une structure géométrique Γ et son groupe d'automorphismes G , pour tout sous-groupe H de G , il doit exister une interprétation géométrique de H qui n'est pas forcément unique. Par ailleurs, on voit bien que Γ enrichi d'un aspect géométrique, d'un ajout K à la structure, donne lieu à un sous-groupe de G , à savoir le sous-groupe de G qui conserve cet ajout géométrique. Exemples : Γ est le plan et K est un carré ; Γ est un cube et K une direction d'arêtes. Le nom donné en physique à ce processus est une brisure de symétrie. Le cas que nous envisagions était celui de $G = \text{Aut}(\text{cube})$. Tout ceci est fort complexe. Par souci de simplification, nous avons étudié le groupe d'automorphismes du carré, $G = \text{Aut}(\text{carré})$ qui est le groupe diédrique d'ordre 8, D_8 . Nous avons recherché une interprétation géométrique pour chacun de ses sous-groupes. Il s'avère que cette approche livre une classification des quadrilatères. Nous

Adresses des auteurs : Charlotte Bouckaert, Avenue Forton 6, 1950 Kraainem ; courriels : charlotte.bouckaert@scarlet.be, buekenhout@skynet.be, anniegoovaerts@yahoo.fr, mgfrederickx@tele2allin.be, sengier@ulb.ac.be.

obtenons ainsi une classification des quadrilatères reposant sur un critère très précis, à savoir le groupe des automorphismes du quadrilatère et la manière dont il agit sur l'ensemble des sommets. Si H est un sous-groupe de D_8 , la famille de quadrilatères de type H est constituée des quadrilatères dont le groupe de symétries contient H . Pourquoi avoir choisi le mot *contient* plutôt que l'expression *est égal à* ? Parce que nous souhaitons tous qu'un carré (dont le groupe est d'ordre huit) soit aussi dans la famille des rectangles (dont le groupe H est d'ordre quatre).

2. Classifications classiques et non classiques des quadrilatères

Il existe plusieurs manières de classer et de définir différents types de quadrilatères. La manière classique présente de nombreuses failles, le classement se fait selon des critères qui ne sont pas explicités ou plutôt qui n'existent pas.

Première tradition

On dispose d'un stock de noms (rectangle, carré, losange, parallélogramme, trapèze) qu'on s'efforce à utiliser correctement sans y par-



FIG. 1 – Paléolithique ancien et moyen

venir. Cet état de fait débute à la maternelle et perdure largement à tout niveau d'étude. Le stock de noms ne s'enrichit jamais (ou presque), par exemple, on ne verra que rarement un cerf-volant ou une pointe de flèche en mathématique. Des formes familières durant des millénaires au paléolithique et au néolithique n'entreront pas dans notre discipline. Ces dernières méritent également notre attention car nous les rencontrons sou-

vent sans peut-être nous en rendre compte. Les chasseurs cueilleurs du paléolithique maîtrisaient des quadrilatères qui ont échappé à leurs descendants mathématiciens. Ils fabriquaient de manière systématique des pointes de flèches et harpons qui réalisent deux quadrilatères que nous appelons deltaplane et cerf-volant.



FIG. 2 – Pointe de flèche (40 000 ACN)



FIG. 3 – Pointe de flèche (néolithique)



FIG. 4 – Pointe de flèche pédonculée à ailerons (Mancey) – $L = 2,5$ cm

Ne perdons pas de vue que ces objets représentent aussi des formes de dimension 3 qui sont des « octaèdres pointes de flèches » ou des « dipyramides pointes de flèches ». Citons un ouvrage consacré à la géométrie du paléolithique : [6].

Deuxième tradition

On insiste sur les caractéristiques suivantes : égalité de longueurs et d'angles, parallélisme des côtés. Ces critères ne sont pas explicités pour un

quadrilatère général. Nul ne sait pourquoi la convexité du quadrilatère est souvent supposée de manière implicite et pourquoi le cerf-volant est souvent ignoré malgré sa convexité. Qui sait que tout quadrilatère convexe du plan euclidien possédant quatre angles égaux est un rectangle ? Qui sait qu'il n'y a pas de quadrilatère convexe sur la sphère ayant quatre angles droits mais qu'il existe néanmoins des rectangles sur la sphère ?

Cette double tradition est sans espoir pour les polygones généraux. Essayez de classer les hexagones ! Cette tradition est sans espoir pour les polyèdres. Elle maintient la notion de polyèdre régulier dans un état lamentable au sein de l'enseignement.

Troisième tradition

Une approche plus récente d'essai de classification des quadrilatères est de partir du stock figé des noms de familles et d'observer les transformations qui conservent les quadrilatères étudiés, mais sans les composer.

Sans espoir. On creuse sans cesse l'ornière des débuts.

L'avenir : Accepter le groupe des automorphismes ou isométries et ses sous-groupes

Le groupe diédrique d'ordre huit du carré et ses sous-groupes permettent une classification simple et complète de tous les quadrilatères quel que soit l'espace dans lequel ils sont plongés. Cette classification respecte le contenu des traditions évoquées : noms, caractéristiques, symétries. C'est la voie ouverte vers toutes les perspectives évoquées, la réponse aux besoins mathématiques, la rigueur et la réponse aux besoins scientifiques. Il convient d'accepter le quadrilatère combinatoire (ou intrinsèque) c'est-à-dire la structure interne du quadrilatère. Ensuite, on le plonge dans un espace ambiant sans difficulté. Bien naturellement nous voulons représenter ou visualiser le quadrilatère combinatoire 1234 dans le plan. Ceci est possible de plusieurs manières. Par exemple

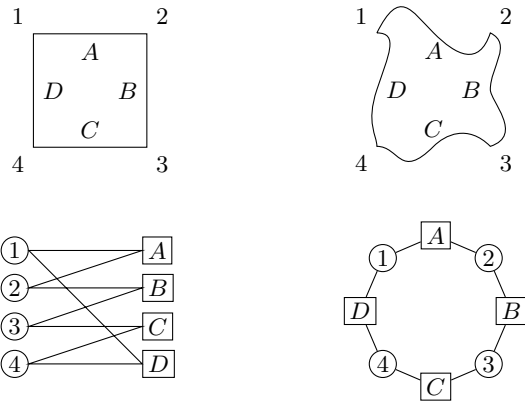


Ces représentations ne sont pas innocentes. Ainsi, la symétrie $(1, 2)(3, 4)$ nous apparaît soit comme une symétrie bilatérale, soit comme une symétrie centrée. Du point de vue combinatoire, nous nous permettons de l'appeler « symétrie bilatérale ». Toute autre symétrie combinatoire donne lieu à un choix de noms « entre guillemets » inspirée par la représentation du quadrilatère carré.

3. Comment déterminer le groupe $\text{Aut}(Q)$ des automorphismes d'un quadrilatère intrinsèque ?

Deux manières de procéder :

A) Un quadrilatère Q comprend 4 objets nommés sommets $(1, 2, 3, 4)$ et 4 objets nommés côtés (A, B, C, D) unis par des conditions d'incidence telles que tout sommet appartient à deux arêtes, toute arête contient deux sommets, le sommet 1 est voisin des sommets 2 et 4, etc. Sous ses conditions, Q se représente par différents schémas tels que :



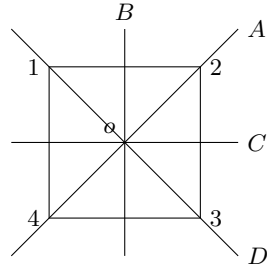
Quels sont les automorphismes de Q ou quelles sont les permutations de 1, 2, 3 et 4 qui conservent la structure de Q ? Un quadrilatère est un graphe de quatre sommets dans lequel tout sommet est sur deux arêtes. Le sommet 1 peut prendre quatre positions. Si 1 est fixé, on peut choisir deux positions pour 2, voisin de 1. Si 1 et 2 sont fixés, les autres éléments sont

fixés. Il existe donc $4 \times 2 = 8$ automorphismes de Q qui conservent points et côtés et les relations d'incidence qui les unissent. Ces automorphismes sont $(1, 2, 3, 4)$; $(1, 4, 3, 2)$; $(1, 2)(3, 4)$; $(1, 4)(2, 3)$; $(1, 3)(2, 4)$; $(1)(2, 4)(3)$; $(2)(1, 3)(4)$; $(1)(2)(3)(4)$. Ils sont les éléments du groupe diédrique D_8 . La composition de ces huit automorphismes livre le groupe D_8 des automorphismes du quadrilatère.

B) Le groupe des automorphismes d'un quadrilatère est le groupe engendré par deux transformations d'ordre 2 (involutions) r_1 et r_2 telles que $r_1^2 = r_2^2 = (r_1 r_2)^4 = 1$. Remarquons que pour le carré, r_1 est une symétrie bilatérale ayant pour axe une médiane du carré et r_2 une symétrie bilatérale ayant pour axe une diagonale du carré. Quel sont les éléments de ce groupe ?

1. r_1 ;
2. r_2 ;
3. 1 ;
4. $r_1 r_2$;
5. $r_2 r_1$ ($r_1 r_2 \neq r_2 r_1$; en effet, si $r_1 r_2 = r_2 r_1$, on a $(r_2 r_1)^2 = r_2 r_1 r_2 r_1 = r_2 r_1 r_1 r_2 = r_2 r_2 = 1$, ce qui n'est pas vrai) ;
6. $r_1 r_2 r_1$;
7. $r_2 r_1 r_2$ ($r_1 r_2 r_1 \neq r_2 r_1 r_2$; en effet, si $r_1 r_2 r_1 = r_2 r_1 r_2$, on a $(r_2 r_1)^3 = r_2 r_1 r_2 r_1 r_2 r_1 = r_2 r_1 r_2 r_2 r_1 r_2 = r_2 r_1 r_1 r_2 = r_2 r_2 = 1$, ce qui n'est pas vrai) ;
8. $r_1 r_2 r_1 r_2 = r_2 r_1 r_2 r_1$.

Par ces deux méthodes, nous retrouvons bien les mêmes automorphismes :

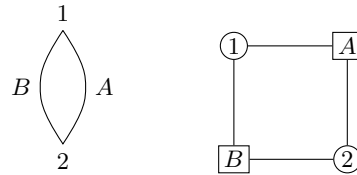


$(1, 2, 3, 4)$	$r_2 r_1$	Rotation d'un quart de tour de centre o (sens horlogique)
$(1, 4, 3, 2)$	$r_1 r_2$	Rotation d'un quart de tour de centre o (sens antihorlogique)
$(1, 2)(3, 4)$	r_1	Symétrie bilatérale d'axe B
$(1, 4)(2, 3)$	$r_2 r_1 r_2$	Symétrie bilatérale d'axe C
$(1, 3)(2, 4)$	$r_1 r_2 r_1 r_2$	Symétrie centrale de centre o
$(1)(2, 4)(3)$	$r_1 r_2 r_1$	Symétrie bilatérale d'axe D
$(2)(1, 3)(4)$	r_2	Symétrie bilatérale d'axe A
$(1)(2)(3)(4)$	1	Identité

Généralisation : Le groupe diédrique d'ordre $2n$, D_{2n} , peut être vu de deux manières assez différentes :

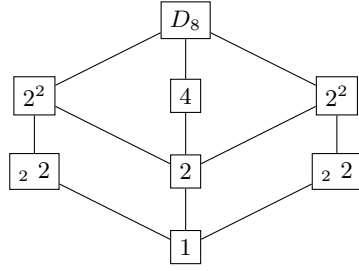
- Soit comme le groupe des automorphismes d'un n -gone ($n \geq 3$) ;
- Soit comme le groupe engendré par r_1 et r_2 tels que $r_1^2 = r_2^2 = (r_1 r_2)^n = 1$, où r_1 et r_2 sont deux symétries orthogonales d'axes voisins.

Il est à remarquer que la seconde définition convient également pour $n = 2$; D_4 est même un des groupes diédriques les plus importants : D_4 est le groupe engendré par r_1 et r_2 tels que $r_1^2 = r_2^2 = (r_1 r_2)^2 = 1$. On en vient ainsi à l'admission du digone ou 2-gone que voici :



4. Le groupe diédrique D_8 et ses sous-groupes

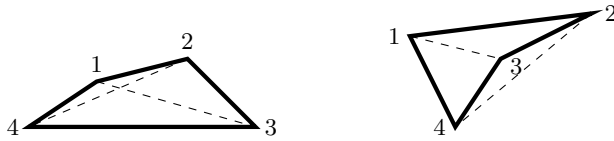
D_8 est le groupe des symétries du carré. Ce groupe a différents sous-groupes que l'on peut représenter de manières différentes. Voici une des possibilités qui est expliquée dans les pages suivantes.



Chaque case rectangulaire représente un sous-groupe de D_8 (deux sous-groupes dans le cas où le nombre 2 apparaît dans le coin inférieur gauche du rectangle). Il y a donc dix sous-groupes. Les segments de droite qui relient les divers rectangles indiquent les inclusions entre ces ensembles. Un mot d'explication s'impose. Nous le fournissons dans les pages suivantes.

5. Classification objective des quadrilatères

À présent, considérons un quadrilatère 1234 du plan. Dans ce cas, un sommet est un point, un côté ($[12]$, $[23]$, $[34]$, $[41]$) est un segment dont les extrémités sont deux sommets consécutifs. De plus nous considérons qu'une diagonale est un segment dont les sommets sont opposés ($[13]$, $[24]$).



Donnons-nous le sous-groupe des isométries du plan conservant 1234, ce qui signifie la classe de conjugaison de ce groupe au sein de D_8 . Que peut-on dire de celui-ci ? Nous parcourons les cas pour G sous-groupe de D_8 .

Nous introduisons également un critère de classification bien naturel selon que les segments diagonaux ont ou n'ont pas de point commun (*critère diagonal*).

D'autre part, nous distinguerons le cas où deux côtés opposés du quadrilatère n'ont pas de point commun du cas où il existe deux côtés opposés du quadrilatère qui se coupent (*critère des côtés opposés*).

En résumé, les critères de classification que nous utilisons sont :

- Le groupe des isométries du quadrilatère ;
- Le critère diagonal ;
- Le critère des côtés opposés.

Lemme. Tout automorphisme de 1234 qui fixe le sommet a fixe le sommet opposé $\text{opp}(a)$.

En effet, tout sommet a admet un opposé $\text{opp}(a)$ (sommet qui est le plus éloigné de a). Si la symétrie g fixe a , alors elle fixe $\text{opp}(a)$ car l'opposé de a est non adjacent à a et doit le rester.

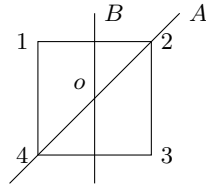
5.1. $G = D_8$

Que dire de 1234 ? Nous pensons que c'est un carré. Quel est le statut logique de cette affirmation ? Est-ce une conjecture ? Une définition ? Un théorème ? Dans l'esprit de notre démarche, un carré serait défini comme quadrilatère dont le groupe des isométries est D_8 . Le lecteur peut avoir une autre approche du carré. Dans ce cas, il faut prouver que cette approche implique que le groupe est D_8 . Nous le ferons en détail à la section 6. Comment ? Si $G = D_8$, G contient $\mathbf{Z}_4$ et dans la section 6 nous examinons cette situation en détail, y compris neuf définitions du carré dont nous montrerons l'équivalence.

Rappelons les deux approches **(A)** et **(B)** vues dans la section 3 pour D_8 .

Selon **(A)**, D_8 est le groupe des automorphismes du quadrilatère intrinsèque. Le carré est le quadrilatère plan qui réalise ce groupe par des isométries. C'est le quadrilatère parfait, régulier.

Selon **(B)**, D_8 est engendré par deux générateurs r_1 et r_2 tels que $r_1^2 = r_2^2 = (r_1 r_2)^4$. Dans le quadrilatère plan, r_1 est la symétrie bilatérale S_A d'axe diagonal $A = 24$ et r_2 la symétrie bilatérale S_B d'axe médian B qui passe par le milieu de $[12]$ et le milieu de $[34]$. A et B sont deux axes de symétrie proches l'un de l'autre. On a bien $(S_A)^2 = (S_B)^2$ et $(S_A \circ S_B)^4 = (R_{1/4})^4 = I$ où $R_{1/4}$ est une rotation d'un quart de tour de centre $o = A \cap B$.



Les automorphismes du carré sont : $(1, 2, 3, 4)$; $(1, 4, 3, 2)$; $(1, 2)(3, 4)$; $(1, 4)(2, 3)$; $(1, 3)(2, 4)$; $(1)(2, 4)(3)$; $(2)(1, 3)(4)$; $(1)(2)(3)(4)$.

5.2. Sous-groupes à deux éléments

À la troisième ligne du diagramme de la p. 12, apparaissent les cases suivantes

$$\boxed{\begin{smallmatrix} & \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{smallmatrix} & \\ 2 & \end{smallmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{smallmatrix} & \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}}$$

Expliquons cela. Le nombre 2 situé dans la case du milieu représente le sous-groupe

$$\{(1)(2)(3)(4), (1, 3)(2, 4)\}$$

(identité et symétrie centrale). Dans la case de gauche, $\begin{smallmatrix} & \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}$ représente le sous-groupe

$$\{(1)(2)(3)(4), (1, 2)(3, 4)\}$$

(identité et symétrie médiane) et son conjugué

$$\{(1)(2)(3)(4), (1, 4)(2, 3)\}$$

(identité et symétrie médiane). Dans la case de droite, $\begin{smallmatrix} & \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}$ représente le sous-groupe

$$\{(1)(2)(3)(4), (1)(2, 4)(3)\}$$

(identité et symétrie diagonale) et son conjugué

$$\{(1)(2)(3)(4), (2)(1, 3)(4)\}$$

(identité et symétrie diagonale).

Le quadrilatère possède soit un axe, soit un centre de symétrie.

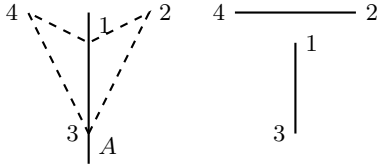
5.2.1. Quadrilatères possédant un axe de symétrie

Envisageons le cas où le quadrilatère possède un axe de symétrie A . Ce dernier comprend 2, 1 ou 0 sommet du quadrilatère. Le cas où l'axe comprend 1 sommet est à exclure comme le prouve le lemme vu dans la section 5. Nous abordons donc deux cas.

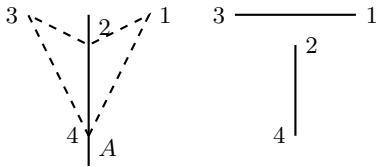
5.2.1.1 Deltaplane et cerf-volant

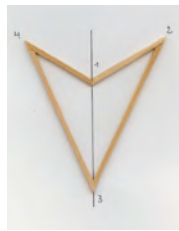
Premier cas : L'axe de symétrie comprend 2 sommets du quadrilatère. Ces sommets ne peuvent être consécutifs car le lemme de la section 5 nous apprend que tous les sommets seraient fixes. Deux sommets non consécutifs (opposés) du quadrilatère appartiennent donc à l'axe de symétrie. Nous obtenons les possibilités suivantes en tenant compte du critère diagonal, c'est-à-dire selon que les segments diagonaux ont ou n'ont pas de point commun.

1) Le *deltaplane*  dont le groupe d'automorphismes est

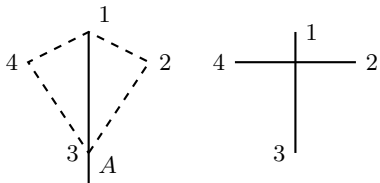
$$\{(1)(3)(2, 4); (1)(2)(3)(4)\} :$$


ou

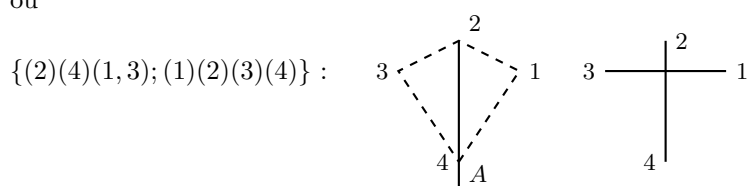
$$\{(2)(4)(1, 3); (1)(2)(3)(4)\} :$$




2) Le *cerf-volant*  dont le groupe d'automorphismes est

$$\{(1)(3)(2, 4); (1)(2)(3)(4)\} :$$


ou



Le critère des côtés opposés ne fait pas apparaître d'autres cas.

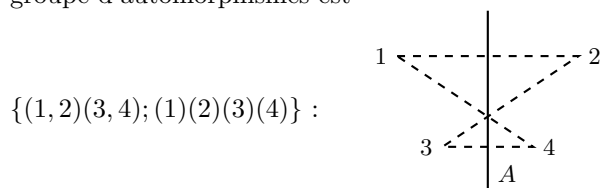
5.2.1.2 Papillon trapèze à côtés parallèles, trapèze isocèle, papillon trapèze à diagonales parallèles

Deuxième cas : L'axe de symétrie ne contient aucun sommet du quadrilatère. On place le sommet 1. Appelons 1_A l'image de 1 par la symétrie d'axe A . Le segment $[1, 1_A]$ est soit un côté du quadrilatère, soit une de ses diagonales.

5.2.1.2.1

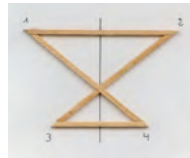
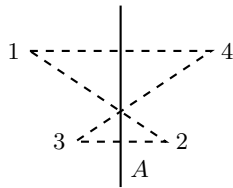
$[1, 1_A]$ est un côté du quadrilatère ; dans ce cas, 1_A est le point 2 ou le point 4, ces deux possibilités étant identiques du point de vue combinatoire.

1) Si le point 3 se situe du même côté que 1 par rapport à l'axe $(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix} \bigg| A)$ nous obtenons le *papillon trapèze isocèle à côtés parallèles*  dont le groupe d'automorphismes est



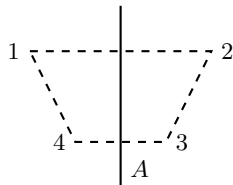
ou

$\{(1, 4)(2, 3); (1)(2)(3)(4)\}$:



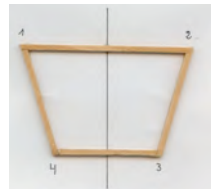
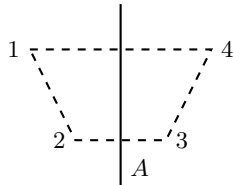
2) Si les points 1 et 3 ne se situent pas du même côté de l'axe ($\begin{smallmatrix} 1 \\ \diagdown \\ A \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 3 \\ \diagup \\ A \end{smallmatrix}$) nous obtenons le *trapèze isocèle*  dont le groupe d'automorphismes est

$\{(1, 2)(3, 4); (1)(2)(3)(4)\}$:



ou

$\{(1, 4)(2, 3); (1)(2)(3)(4)\}$:



Remarquons que ces deux cas se distinguent par le critère diagonal :
 – Les diagonales du trapèze isocèle se coupent ;

- Les diagonales du papillon trapèze isocèle à côtés parallèles ne se coupent pas.

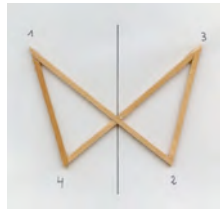
5.2.1.2.2

$[1, 1_A]$ est une diagonale du quadrilatère ; dans ce cas, 1_A est le point 3 et nous obtenons le *papillon trapèze isocèle à diagonales parallèles*



dont le groupe d'automorphismes est

$$\{(1, 3)(2, 4); (1)(2)(3)(4)\} : \quad \text{ou} \quad \{(1, 3)(2, 4); (1)(2)(3)(4)\}$$



Le papillon trapèze isocèle à diagonales parallèles est quant à lui, l'occasion de repréciser que notre classification des quadrilatères se fait à partir des sous-groupes du groupe diédrique D_8 (section 2). Le sous-groupe $\{(1, 3)(2, 4); (1)(2)(3)(4)\}$ comprend l'identité et la « symétrie centrée » $(1, 3)(2, 4)$. Cette dernière se réalise sur le carré par une symétrie centrée. Pour le papillon trapèze isocèle à diagonales parallèles elle se réalise par une symétrie bilatérale.

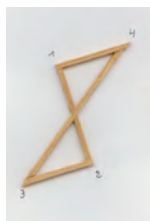
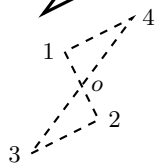
Le critère des côtés opposés ne fait pas apparaître d'autres cas.

5.2.2. Quadrilatères possédant un centre de symétrie

Envisageons le cas où le quadrilatère possède un centre de symétrie o . On place le sommet 1. Son opposé, 3, est son symétrique ou non. Le critère diagonal nous livre les deux quadrilatères suivants :

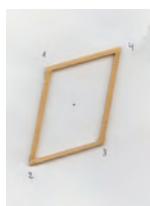
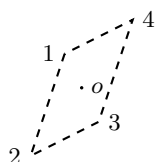
1) Le *papillon parallélogramme*  dont le groupe d'automorphismes est

$\{(1, 2)(3, 4); (1)(2)(3)(4)\}$:



2) Le *parallélogramme*  dont le groupe d'automorphismes est

$\{(1, 3)(2, 4); (1)(2)(3)(4)\}$:



Le critère des côtés opposés ne fait pas apparaître d'autres cas.

REMARQUES : Dans le cas du trapèze isocèle, du cerf-volant, du deltaplane et des papillons isocèles le générateur est une symétrie bilatérale. Dans le cas du parallélogramme et du papillon parallélogramme le générateur est une symétrie centrale.

Le papillon parallélogramme est à nouveau l'occasion de préciser que notre classification des quadrilatères se fait à partir des sous-groupes du groupe diédrique D_8 (section 2). Le sous-groupe $\{(1, 2)(3, 4); (1)(2)(3)(4)\}$ comprend l'identité et la « symétrie bilatérale » $(1, 2)(3, 4)$. Cette dernière

se réalise sur le carré par une symétrie bilatérale par rapport à une médiane du carré. Pour le papillon parallélogramme, elle se réalise par une symétrie centrée.

En conclusion, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème. Soit 1234 un quadrilatère plan et s une isométrie d'ordre 2 du plan qui conserve 1234. Alors une des situations suivantes a lieu :

i	1234 est un delta-plane	s est bilatérale	Axe(s) est diagonal	$13 \cap 24 = \emptyset$
ii	1234 est un cerf-volant	s est bilatérale	Axe(s) est diagonal	$13 \cap 24$ est un point
iii	1234 est un papillon trapèze à côtés parallèles	s est bilatérale	Axe(s) est médian	$13 \cap 24 = \emptyset$
iv	1234 est un trapèze isocèle	s est bilatérale	Axe(s) est médian	$13 \cap 24$ est un point
v	1234 est un papillon trapèze à diagonales parallèles	s est bilatérale	Axe(s) est la droite reliant le milieu des diagonales	
vi	1234 est un papillon parallélogramme	s est centrée	Centre(s) est l'intersection des côtés	
vii	1234 est un parallélogramme	s est centrée	Centre(s) est l'intersection des diagonales	

5.3. Sous-groupe $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$

Abordons maintenant la deuxième ligne du tableau de la p. 12.

$$\boxed{2^2}$$

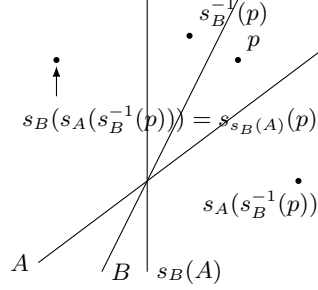
2^2 est une autre notation de $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$, c'est-à-dire l'ensemble des composées d'un élément de $\mathbf{Z}_2$ et d'un élément d'un autre $\mathbf{Z}_2$ de telle manière que si u est un élément du premier $\mathbf{Z}_2$ et v un élément du second $\mathbf{Z}_2$, on ait $u \circ v = v \circ u$.

Ce groupe d'ordre 4 comporte l'identité et trois autres symétries d'ordre deux non identiques qui sont soit une symétrie axiale, soit une symétrie cen-

trale. Le groupe ne pouvant contenir au plus qu'une seule symétrie centrale, deux symétries sont obligatoirement axiales S_A et S_B d'axes A et B . La composée de ces dernières étant une rotation, ne peut être qu'une rotation de 180° ou symétrie centrée. Dès lors les axes des deux symétries axiales sont perpendiculaires.

Une autre manière de prouver ceci est la suivante : On a $S_A \circ S_B = S_B \circ S_A$ ou $S_A = S_B \circ S_A \circ S_B^{-1}$. Or $S_B \circ S_A \circ S_B^{-1}$ est la symétrie qui a pour axe la droite $S_B(A)$.

Donc S_A est la symétrie qui a pour axe la droite $S_B(A)$. Les droites A et $S_B(A)$ sont confondues, ce qui n'est possible que si A est perpendiculaire à B .

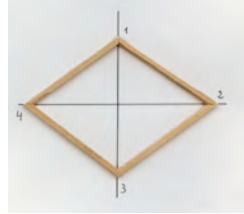
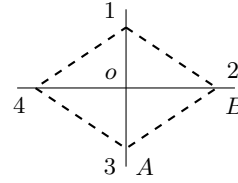


En résumé, le groupe contient deux symétries axiales S_A et S_B d'axes A et B et une symétrie centrale S_o de centre $o = A \cap B$.

5.3.1. Losange

Si un sommet du quadrilatère appartient à un des axes, son opposé doit alors appartenir à cet axe (voir le lemme de la section 5) et les deux autres sommets doivent appartenir à l'autre axe. On obtient le *losange*  dont le groupe d'automorphismes est

$\{(1, 3)(2, 4); (1)(2, 4)(3); (2)(1, 3)(4); (1)(2)(3)(4)\}$:



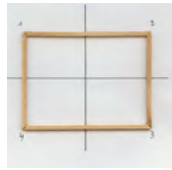
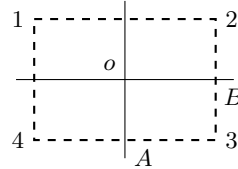
Le critère diagonal et le critère des côtés opposés ne font pas apparaître d'autres cas.

5.3.2. Rectangle, papillon rectangle

Si aucun des sommets du quadrilatère n'appartient à un des axes de symétrie, le critère diagonal nous livre deux quadrilatères.

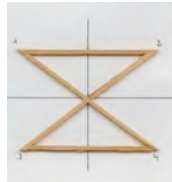
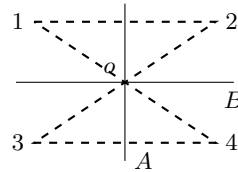
1) Si les diagonales se coupent $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, on obtient le *rectangle*  dont le groupe d'automorphismes est

$\{(1, 2)(3, 4); (1, 4)(2, 3); (1, 3)(2, 4); (1)(2)(3)(4)\}$:



2) Si les diagonales ne se coupent pas $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, on obtient le *papillon rectangle*  dont le groupe d'automorphismes est également

$\{(1, 2)(3, 4); (1, 4)(2, 3); (1, 3)(2, 4); (1)(2)(3)(4)\}$:



a) Dans le premier cas (cas du losange), les deux groupes $\mathbf{Z}_2$ ont respectivement pour générateur les symétries bilatérales ayant pour axes les diagonales du losange.

b) Dans le second cas (cas du rectangle et du papillon rectangle), les deux groupes $\mathbf{Z}_2$ ont respectivement pour générateur les symétries bilatérales ayant pour axes les médianes du rectangle.

Le critère des côtés opposés ne fait pas apparaître d'autres cas.

5.4. Sous-groupe d'ordre 1

Envisageons maintenant le groupe $\mathbf{Z}_1$ qui est l'identité. Les quadrilatères qui ont l'identité pour groupe de symétries ne possèdent ni axe ni centre de symétrie. On distingue différents cas en utilisant le critère diagonal (section 5).

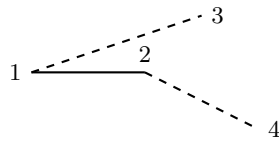
Les quadrilatères dont l'intersection des diagonales est un point sont les quadrilatères convexes et les quadrilatères dont l'intersection des diagonales est vide sont les quadrilatères non convexes.

Définition. Un quadrilatère est *convexe* si pour toute droite support d'un côté du quadrilatère, tous les sommets se situent dans le même demi-plan limité par cette droite.

Théorème. Un quadrilatère est convexe si et seulement si ses diagonales se coupent.

DÉMONSTRATION : Pour démontrer que si les diagonales d'un quadrilatère se coupent, alors le quadrilatère est convexe, démontrons que si le quadrilatère n'est pas convexe, alors les diagonales ne se coupent pas.

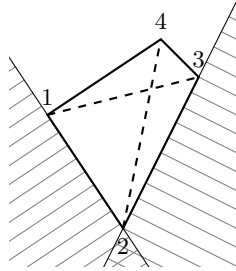
Plaçons les sommets 1, 2 et 3.



Appliquons la définition d'un quadrilatère convexe à la droite support 12. Le sommet 4 doit se situer dans le demi-plan limité par 12, dans lequel 3 ne se trouve pas. Dès lors, [13] et [24] se situent dans des demi-plans différents et ne se coupent pas.

Pour démontrer que si le quadrilatère est convexe alors ses diagonales se coupent, il faut se rappeler l'axiome qui dit que si deux points se situent de part et d'autre d'une droite, alors le segment reliant les deux points coupe la droite. Si 1 et 2 sont les sommets d'un quadrilatère, la droite 12

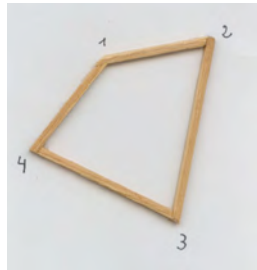
délimite deux demi-plans. Le sommet 3 se situe dans un de ces demi-plans et le point 4 doit se situer dans le même demi-plan. Une fois le sommet 3 placé, la droite 23 partage le plan en deux demi-plans et le sommet 4 doit se situer dans le même demi-plan que le sommet 1. La droite 13 détermine deux demi-plans et les points 2 et 4 ne peuvent pas se situer dans le même sinon les sommets 2 et 3 seraient situés dans des demi-plans différents par rapport à la droite 14 et le quadrilatère serait non convexe. Il en découle que les diagonales [13] et [24] se coupent, cqfd.



Utilisons le critère des diagonales.

5.4.1. Les quadrilatères dont l'intersection des diagonales est un point, ou quadrilatères convexes

Nous obtenons les *quadrilatères convexes quelconques*.

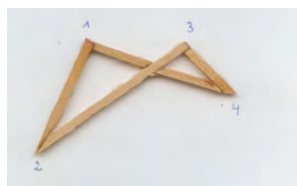
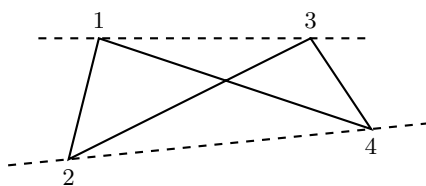


5.4.2. Les quadrilatères dont l'intersection des diagonales est vide ou quadrilatères non convexes

Le critère des côtés opposés fait apparaître deux sous-cas :

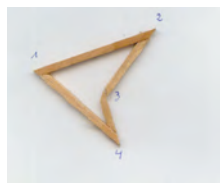
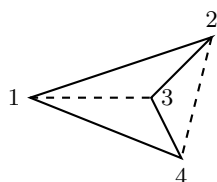
5.4.2.1 Quadrialtère papillon quelconque

Si les côtés $[14]$ et $[23]$ se coupent, on obtient le *quadrilatère papillon quelconque*.



5.4.2.2 Quadrilatère bec

Si les côtés $[14]$ et $[23]$ ne se coupent pas, on obtient le *quadrilatère bec*.



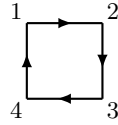
5.5. Sous-groupe Z_4

Abordons maintenant le dernier cas de la deuxième ligne du tableau de la p. 12.

Le nombre indiqué dans cette case signifie qu'un sous-groupe de D_8 est un groupe cyclique d'ordre 4. Un tel groupe se note souvent $\mathbf{Z}_4$. Un groupe cyclique d'ordre n ($\mathbf{Z}_n$) est le groupe des rotations d'un polygone régulier convexe de n côtés. Ce groupe a un seul générateur a , soumis à la condition $a^n = 1$.

Théorème. Un quadrilatère soumis à ces conditions est un carré. Le générateur du groupe est une rotation d'un quart de tour.

HYPOTHÈSE : 1234 est un quadrilatère dont le groupe d'automorphismes est $\mathbf{Z}_4$.



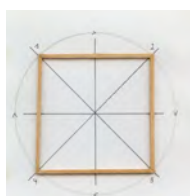
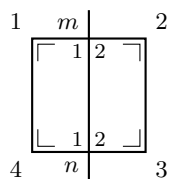
THÈSE : 1234 est un carré.

DÉMONSTRATION : Un groupe d'automorphismes du quadrilatère 1234 est $\{(1, 2, 3, 4); (1, 4, 3, 2); (1, 3)(2, 4); (1)(2)(3)(4)\}$. Pour montrer que le quadrilatère obtenu est bien un carré, nous devons prouver que son groupe d'automorphismes est

$$\{(1, 2, 3, 4); (1, 4, 3, 2); (1, 2)(3, 4); (1, 4)(2, 3); (1, 3)(2, 4); (1)(2, 4)(3); (2)(1, 3)(4); (1)(2)(3)(4)\}.$$

Montrons par exemple que le quadrilatère est conservé par l'automorphisme $(1, 2)(3, 4)$. Comme le quadrilatère étudié est conservé par rotations, les côtés ont même longueur et les angles ont même amplitude. De plus, par la rotation d'un demi-tour de centre o , 1 a pour image 3 et 2 a pour image 4. Les diagonales se coupent en leur milieu o et le quadrilatère est donc convexe. La somme des angles d'un quadrilatère convexe valant 360° , chaque angle vaut 90° . (Remarquons que dans notre classification, ceci ne suffit pas pour affirmer que le quadrilatère est un carré.) Soit m le milieu de $[12]$ et n le milieu de $[34]$. Les triangles $1m4$ et $2m3$ sont isométriques (un angle égal compris entre deux côtés de mêmes longueurs). On en déduit que $|3m| = |4m|$ et que par conséquent les triangles $4mn$ et $3mn$ ont trois côtés de même longueur et sont isométriques. Les angles $\hat{n}_1$ et $\hat{n}_2$ ont par conséquent même mesure et valent chacun 90° . On montre de même que $\hat{m}_1$ et $\hat{m}_2$ valent chacun 90° . Comme m est le milieu de 12 et n le milieu de 34, mn est un

axe de symétrie et le quadrilatère est conservé par la symétrie $(1, 2)(3, 4)$,
cqfd.

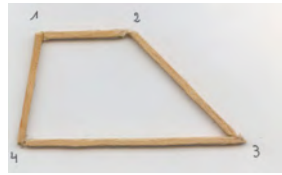


5.6. Synthèse

Notre étude fait apparaître 14 types de quadrilatères :

- Les quadrilatères convexes :
 1. Le carré ;
 2. Le rectangle ;
 3. Le losange ;
 4. Le parallélogramme ;
 5. Le trapèze isocèle ;
 6. Le cerf-volant ;
 7. Le quadrilatère convexe quelconque ;
- Les quadrilatères papillons :
 8. Le papillon rectangle ;
 9. Le papillon parallélogramme ;
 10. Le papillon trapèze à côtés parallèles ;
 11. Le papillon trapèze à diagonales parallèles ;
 12. Le papillon quelconque ;
- Les quadrilatères becs :
 13. Le deltaplane ;
 14. Le quadrilatère bec.

REMARQUE : Nos critères font apparaître le trapèze quelconque comme quadrilatère quelconque.



6. Définitions du carré

Le carré existe depuis longtemps. Prenons pour exemple la base de la Grande Pyramide (3800 ACN). Mais comment définir un carré ?

Traditionnellement le carré est défini comme étant un quadrilatère ayant quatre angles droits et quatre côtés de même longueur. Dans ce texte, le carré est défini comme un quadrilatère dont le groupe des automorphismes est soit D_8 soit $\mathbf{Z}_4$ (voir section 4 et section 5.5). Beaucoup de définitions sont possibles. En voici quelques exemples :

- (a) Quadrilatère convexe ayant 4 angles droits et 4 côtés de même longueur ;
- (b) Rectangle ayant 4 côtés de même longueur ;
- (c) Rectangle ayant deux côtés consécutifs de même longueur ;
- (d) Losange ayant un angle droit ;
- (e) Parallélogramme ayant les diagonales perpendiculaires et de même longueur ;
- (f) Quadrilatère conservé par une rotation d'ordre 4 ($\mathbf{Z}_4$) ;
- (g) Quadrilatère ayant 4 axes de symétrie ;
- (h) Quadrilatère dont le groupe d'isométries est d'ordre 8 (D_8) ;
- (i) Quadrilatère losange et rectangle.

La définition traditionnelle du carré est celle notée en (a). Il est aisé de montrer que (b), (c), (d), (e), (g) et (i) sont des définitions équivalentes à (a). Les définitions (f) et (h) sont moins usuelles. Montrons que ces deux définitions du carré sont équivalentes à la définition (a) ou encore que

$$(a) \Leftrightarrow (f) \Leftrightarrow (h).$$

(f) $\Rightarrow$ (h) : Ce point a été démontré en section 5.5.

(h) $\Rightarrow$ (f) : Ceci est évident étant donné que le groupe $\mathbf{Z}_4$ est contenu dans le groupe D_8 .

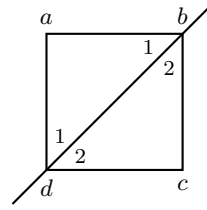
(a) $\Rightarrow$ (h) : Pour démontrer qu'un quadrilatère convexe ayant 4 angles droits et 4 côtés de même longueur a pour groupe d'isométries D_8 , il suffit de démontrer que ce quadrilatère a deux axes de symétries voisins (non perpendiculaires) car par composition de ces deux symétries on retrouve toutes les autres.

HYPOTHÈSE : $\hat{a} = \hat{b} = \hat{c} = \hat{d} = \frac{\pi}{2}$ et $|ab| = |bc| = |cd| = |da|$.

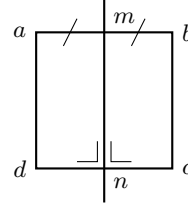
THÈSE 1 : bd est un axe de symétrie du quadrilatère.

THÈSE 2 : Il existe un axe de symétrie du quadrilatère passant par m , milieu de $[ab]$.

DÉMONSTRATION de la thèse 1 : Les triangles abd et bcd sont isométriques (ils ont trois côtés de même longueur) ce qui entraîne que $\hat{b}_1 = \hat{b}_2$ et que $\hat{d}_1 = \hat{d}_2$. Il s'en suit que dans la symétrie d'axe bd le côté $[bc]$ aura pour image le côté $[bc]$ et le côté $[ad]$ aura pour image le côté $[dc]$. Ce qui montre que bd est un axe de symétrie du quadrilatère.



DÉMONSTRATION de la thèse 2 : Soit m le point milieu de $[ab]$ et n le pied de la droite perpendiculaire abaissée de m sur dc . Les droites ad , bc et mn sont perpendiculaires à une même droite et sont donc parallèles, ce qui implique que mn est perpendiculaire à ab . Dès lors, les quadrilatères $amnd$ et $mbcn$ sont des quadrilatères qui ont 4 angles droits. Ceci implique que par la symétrie d'axe mn , $[ad]$ a pour image $[bc]$. Par conséquent mn est axe de symétrie du quadrilatère.

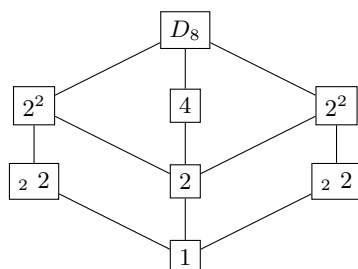


(h) $\Rightarrow$ (a) : Si le quadrilatère a pour groupe d'isométrie D_8 , il est conservé par les rotations d'un quart de tour. Les quatre angles du quadrilatère sont égaux. Comme la somme des angles d'un quadrilatère convexe vaut 360° , chaque angle a une mesure de 90° (section 5.5). De plus, par les rotations, $[ab]$ va successivement sur $[bc]$, $[cd]$ et $[da]$. Les côtés du quadrilatère ont donc même longueur, cqfd.

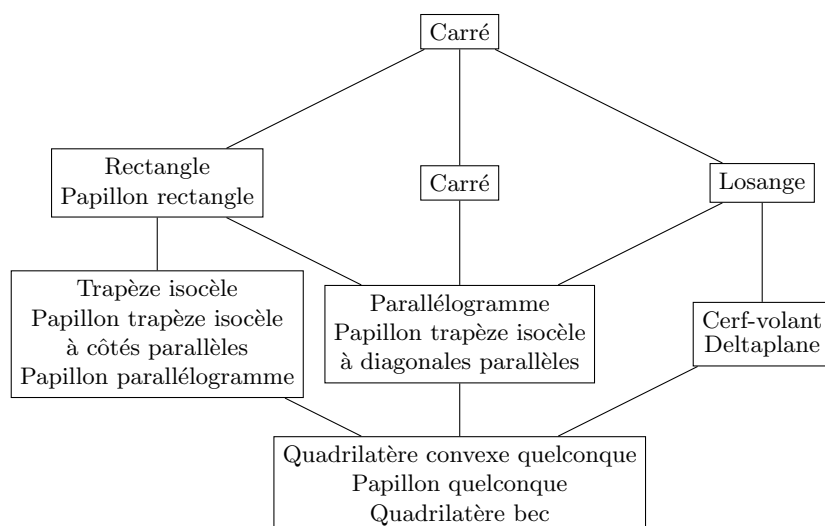
7. Représentation du groupe D_8 et de ses sous-groupes

Les pages précédentes nous permettent de conclure que le groupe diédrique D_8 peut se représenter

1. Par des symboles :

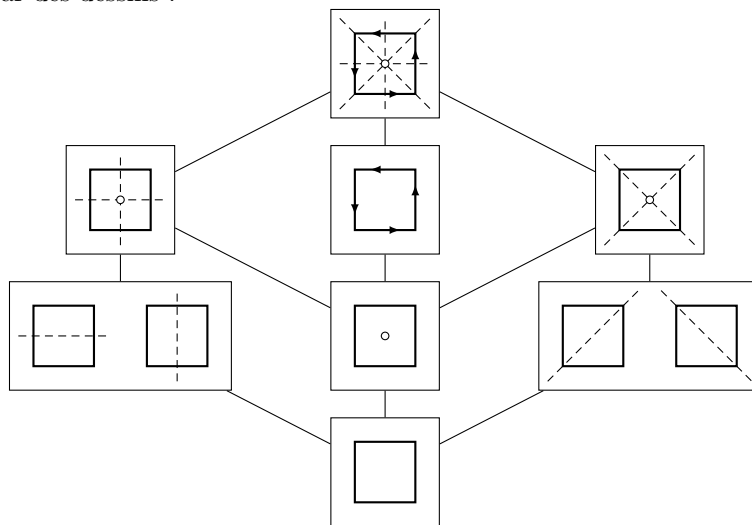


2. Par des mots :



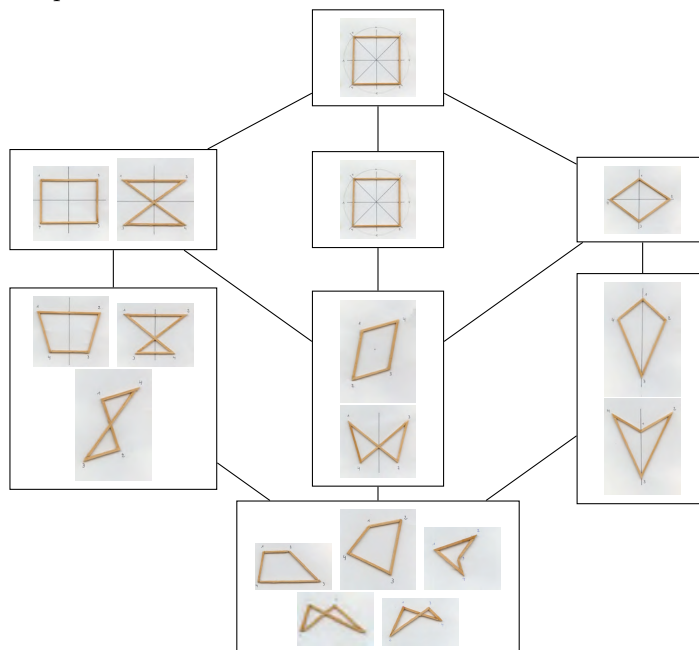
Remarquons qu'un quadrilatère de type A est déclaré cas particulier d'un quadrilatère de type B si le groupe des automorphismes du type B est sous-groupe de celui de A . Par exemple, un rectangle est un trapèze isocèle mais n'est pas un deltaplane.

3. Par des dessins :

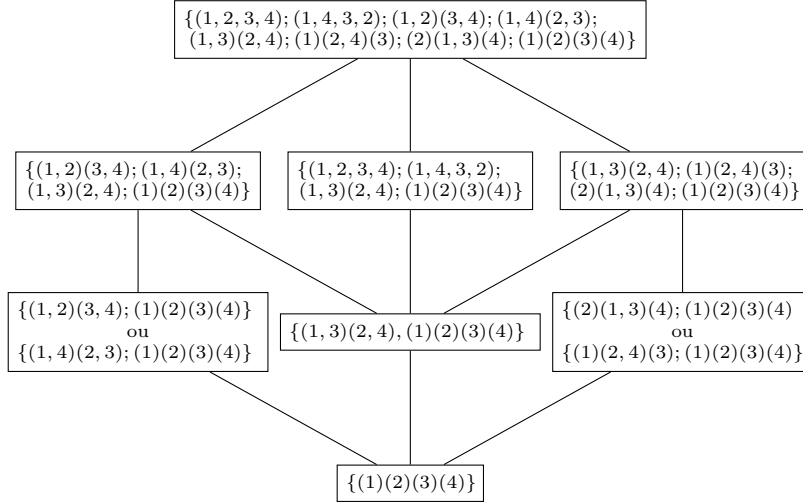


REMARQUES : Section 5.2.1 et section 5.2.2

4. Par des photos :



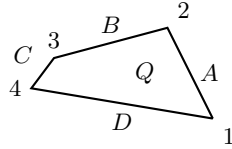
5. Par des automorphismes :



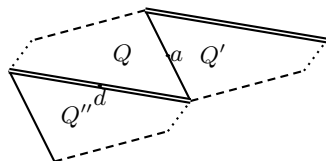
8. Un beau théorème en guise de dessert

Tout quadrilatère convexe engendre un pavage du plan.

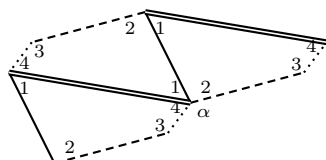
Soit Q un quadrilatère convexe quelconque d'angles de mesure 1, 2, 3, 4 et de côtés A , B , C et D .



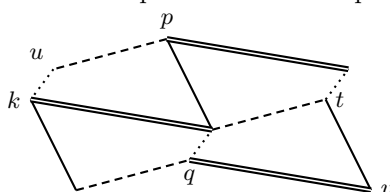
Soit a le milieu du côté A et Q' le symétrique de Q par la symétrie de centre a . Soit d le milieu du côté D et Q'' le symétrique de Q par la symétrie de centre d .



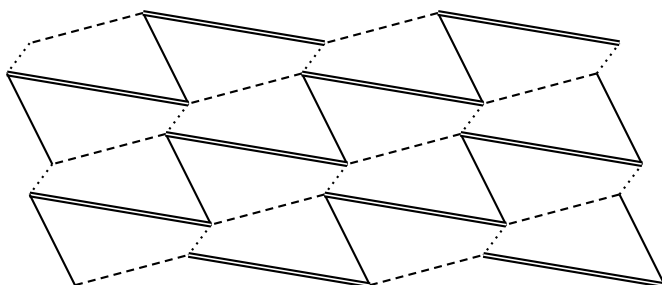
Par ces symétries les côtés du quadrilatère et leurs images sont parallèles et ont la même longueur et les angles du quadrilatère et leurs images ont la même amplitude.



L'angle α a la même amplitude que l'angle 3 car ils ont leurs côtés respectivement parallèles. Nous pouvons donc compléter notre dessin.



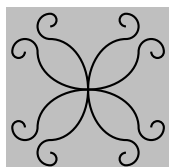
Le parallélisme des côtés et l'égalité d'amplitude des différents angles nous permet d'effectuer les translations $\vec{pq}$, $\vec{uv}$ et $\vec{kt}$ de la figure obtenue.



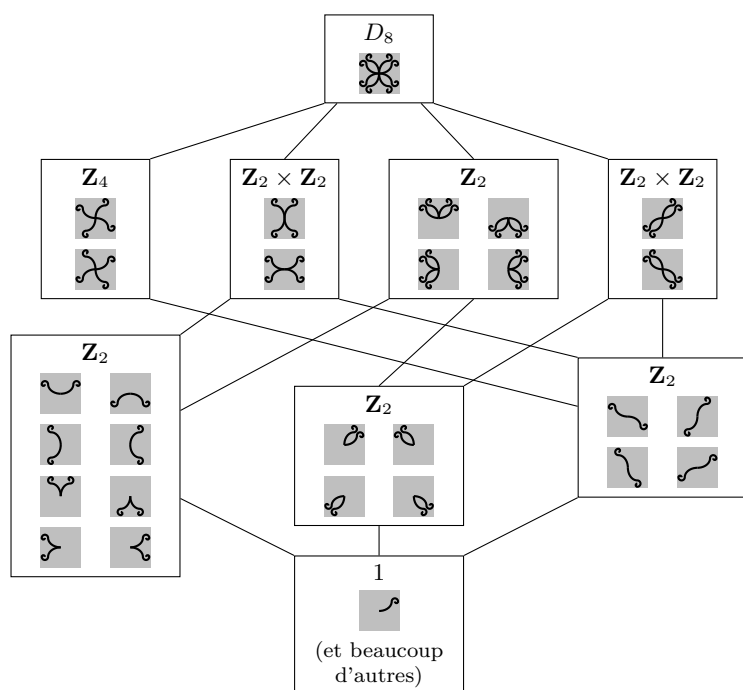
On peut à nouveau traduire cette figure et continuer de la même manière pour paver tout le plan.

9. Un deuxième dessert

Considérons la figure F suivante :



Son groupe d'automorphismes est D_8 . Examinons les sous-figures de F et leur groupe d'automorphismes.



À nouveau, partant du groupe D_8 , nous en avons illustré les sous-groupes. Cette méthode s'applique à n'importe quel groupe et a été utilisée notamment pour établir une classification des quadrilatères gauches ([4]).

10. Pour terminer

La notion de quadrilatère possède des liens avec de nombreux domaines que nous avons évoqués dans cet article ou que nous citons ici sans entrer dans leur étude :

- Quadrilatères gauches
- Polygones ;
- Quadrilatères du plan projectif, elliptique, de la sphère ;
- Immeubles de Tits ;
- Groupes de symétries ;
- Groupes de Coxeter ;
- Fondements de la géométrie ;
- Coordonnées ; longitude, latitude
- Calcul modulo 4 ; enroulement de $\mathbf{R}$ sur le cercle ;
- ...

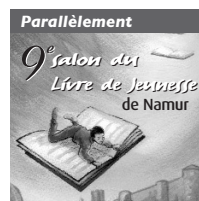
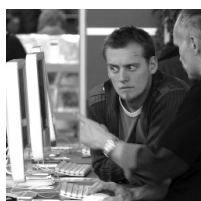
Bibliographie

- [1] Francis BUEKENHOUT, Charlotte BOUCKAERT, Claude CULUS, Monique FRÉDERICKX, *La fleur chinoise : un avatar du cube*, Dossier du CeDoP (2003) ;
http://www.ulb.ac.be/docs/cedop/index_12.html.
- [2] Francis BUEKENHOUT, Jean DOYEN, *Espaces euclidiens*, Presses Universitaires de Bruxelles, 1975.
- [3] Francis BUEKENHOUT, Jean DOYEN, *Ensembles structurés et groupes de symétries*, Université Libre de Bruxelles, 1982.
- [4] Francis BUEKENHOUT, Charlotte BOUCKAERT, Claude CULUS, Monique FRÉDERICKX, Annie GOOVAERTS, Jacqueline SENGIER, *Les quadrilatères gauches*, Dossier du CeDoP (en préparation) ;
http://www.ulb.ac.be/docs/cedop/index_12.html.
- [5] Annie GOOVAERTS, *Classification des quadrilatères à partir de leurs axes de symétrie*, Dossier du CeDoP (2006) ;
http://www.ulb.ac.be/docs/cedop/index_12.html.
- [6] Olivier KELLER, *Aux origines de la géométrie — Le Paléolithique — Le monde des chasseurs-cueilleurs*, Vuibert, 2004.



14^e salon éducation **EDUC**

*Tous les outils et tout l'équipement
pour tous les métiers de l'enseignement*



17 > 21 OCTOBRE 2007
10h-18h • NAMUR EXPO

→ Programme complet et pré-inscriptions sur
www.saloneducation.be

Thèmes des conférences

- Santé : Sexualité chez les 6-12 ans – Sexualité des ados
- Appliquer les nouvelles technologies à l'école
- Citoyenneté et initiatives de paix

- Extrascolaire
- Le développement durable
- Un métier à l'honneur : Médiateur

Journées spéciales

Mercredi 17 :

- Prix de l'innovation pédagogique
- 1^{re} Journée des futurs professionnels de l'Education

Judi 18 :

- Journée des Directions

Vendredi 19 :

- 2^e Journée des futurs professionnels de l'Education
- Journée des professionnels du livre et de l'enfance (Salon du Livre de Jeunesse)

Samedi 20 :

- Journée de l'accueil extrascolaire
- Journée des Logopèdes < NOUVEAU
- Journée des Cyber-enseignants < NOUVEAU

Entrée : 7 € (réduction de 2 € en cas de pré-inscription sur notre site)



pas-se-partout

LE JOURNAL de
L'ÉDUCATION



VIVACITÉ

Soyons carrés !

RICHARD CHOULET
Lycée Augustin Fresnel, Caen

Les numéros 153 et 154 de *M&P* (voir [2] et [3]) m'ont ouvert les yeux sur ce résultat qui ne bouleversera les mathématiques mais est assez amusant pour être signalé. Sa formulation est malaisée sans quelques petites remarques préalables.

Expliquons sur un exemple la notation qui va servir et illustre ce qu'on pourrait appeler une conversion de base mais qui n'est pas un changement de base, au sens où on le conçoit d'habitude.

Partons du nombre 315 (écriture habituelle, en base 10). C'est donc $3 \times 10^2 + 1 \times 10 + 5$. Son *converti* par $\Phi_{b/10}$ ($b > 1$, entier) est le nombre $3 \times b^2 + 1 \times b + 5$, qu'on écrira $(315)_b$. L'introduction de $\Phi_{b/10}$ se justifie dès qu'on utilise des expressions littérales : écrire $(n^2)_b$, en effet, n'a pas de sens, car n^2 n'est pas une liste de chiffres ; si je veux désigner le nombre dont l'écriture en base b a les mêmes chiffres que l'écriture de n^2 en base 10, c'est $\Phi_{b/10}(n^2)$ que je dois utiliser.

Voici donc le résultat annoncé :

Il existe un seul entier n compris entre 2 et 31 (on verra plus loin pourquoi le résultat est si modeste) pour lequel $\Phi_{b/10}(n^2)$ n'est un carré que dans une seule base : c'est 14 et la base est 10.

En fait il faut systématiser l'étude faite dans le problème 304 ([2]), avec un peu d'outils théoriques, sur tous les carrés de 2 à 31 en posant l'équation diophantienne à deux inconnues du premier ou du second degré qui en résulte. Au-delà on tombe au mieux sur des équations « à la Mordell » (cube = premier degré) avec des difficultés irrésolues même si l'on sait déjà trouver $b = 10$!

1. Explorations

J'ai fait l'inventaire des équations auxquelles on arrive et dans tous les cas sauf un, celles-ci ont une infinité de solutions car on a la chance d'avoir une solution évidente au problème avec les conditions de départ où intervient $b = 10$.

1.1. Pour n de 2 à 10

Pour chaque nombre entier n ($2 \leq n \leq 10$), la recherche des bases $b \geq 2$ pour lesquelles $\Phi_{b/10}(n^2)$ est un carré d'entier conduit à une infinité de solutions. Les calculs sont résumés dans le tableau 1.

Équation	Cond. sur b	Valeurs de a	Valeurs de b
$(4)_b = 4 = a^2$	$b \geq 5$	$a = 2$	b quelconque
$(9)_b = 9 = a^2$	$b \geq 10$	$a = 3$	b quelconque
$(16)_b = b + 6 = a^2$	$b \geq 7$	$a \geq 4$ quelconque	$b = a^2 - 6$
$(25)_b = 2b + 5 = a^2$	$b \geq 6$	$a = 2k + 1, k \geq 2$	$b = 2k^2 + 2k - 2$
$(36)_b = 3b + 6 = a^2$	$b \geq 7$	$a = 3k, k \geq 2$	$b = 3k^2 - 2$
$(49)_b = 4b + 9 = a^2$	$b \geq 10$	$a = 2k + 1, k \geq 3$	$b = k^2 + k - 2$
$(64)_b = 6b + 4 = a^2$	$b \geq 7$	$a = 6k + 2, k \geq 1$ ou $a = 6k - 2, k \geq 2$	$b = 6k^2 \pm 4k$
$(81)_b = 8b + 1 = a^2$	$b \geq 9$	$a = 2k + 1, k \geq 4$	$b = \frac{k(k+1)}{2}$
$(100)_b = b^2 = a^2$	$b \geq 2$	a quelconque	$b = a$

TAB. 1 –

1.2. Pour n de 11 à 31

1.2.1. L'évidence

On voit effectivement tout de suite, que certains des nombres précédents sont toujours des carrés, quelle que soit la base considérée :

$$\begin{aligned} (121)_b &= (b+1)^2 & (b \geq 3) ; \\ (144)_b &= (b+2)^2 & (b \geq 5) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (169)_b &= (b+3)^2 & (b \geq 10) ; \\
 (441)_b &= (2b+1)^2 & (b \geq 5) ; \\
 (484)_b &= (2b+2)^2 & (b \geq 9) ; \\
 (961)_b &= (3b+1)^2 & (b \geq 10).
 \end{aligned}$$

1.2.2. Présentation des types d'équations auxquelles on arrive

Avec les notations ci-dessus, nous avons les équivalences :

$$\begin{aligned}
 (196)_b &= a^2 \Leftrightarrow (2b+9)^2 - 4a^2 = 57 \\
 (225)_b &= a^2 \Leftrightarrow (2b+1)^2 - 2a^2 = -9 \\
 (256)_b &= a^2 \Leftrightarrow (4b+5)^2 - 2(2a)^2 = -23 \\
 (289)_b &= a^2 \Leftrightarrow a^2 - 2(b+2)^2 = 1 \\
 (324)_b &= a^2 \Leftrightarrow (3b+1)^2 - 3a^2 = -11 \\
 (361)_b &= a^2 \Leftrightarrow a^2 - 3(b+1)^2 = -2 \\
 (529)_b &= a^2 \Leftrightarrow (5b+1)^2 - 5a^2 = -44 \\
 (576)_b &= a^2 \Leftrightarrow (10b+7)^2 - 20a^2 = -71 \\
 (625)_b &= a^2 \Leftrightarrow (6b+1)^2 - 6a^2 = -29 \\
 (676)_b &= a^2 \Leftrightarrow (12b+7)^2 - 6(2a)^2 = -95 \\
 (729)_b &= a^2 \Leftrightarrow (7b+1)^2 - 7a^2 = -62 \\
 (784)_b &= a^2 \Leftrightarrow (7b+4)^2 - 7a^2 = -12 \\
 (841)_b &= a^2 \Leftrightarrow (4b+1)^2 - 2a^2 = -1
 \end{aligned}$$

1.2.3. Le cas de 14 : l'équation $(196)_b = a^2$

En factorisant, cela équivaut à $(2(b-a)+9)(2(b+a)+9) = 3 \times 19$ d'où :

$2(b-a)+9$	1	-1	3	-3	19	-19	57	-57
$2(b+a)+9$	57	-57	19	-19	3	-3	1	-1
a	14	-14	4	-4	-4	4	-14	14
b	10	-19	1	-10	1	-10	10	-19

La seule solution avec des entiers naturels est donc $b = 10$ et $a = 14$, c'est-à-dire notre point de départ.

2. Quelques apports théoriques

2.1. Anneau des entiers d'un corps de nombres quadratiques $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ (d naturel non carré d'entier)

Rappelons pour commencer que sur $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$, on définit la *norme* d'un élément $x = \alpha + \beta\sqrt{d}$ comme étant $N(x) = \alpha^2 - d\beta^2$. Cette norme N vérifie pour tous éléments x et y du corps :

- $N(x) \in \mathbf{Q}$;
- $N(xy) = N(x)N(y)$;
- $N\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{N(x)}{N(y)}$ (ici $y \neq 0$) ;
- $N(x) = xx^*$ où $x^* = \alpha - \beta\sqrt{d}$ est le conjugué de x .

Qu'est-ce d'abord qu'un entier ? C'est un élément x du corps, donc de la forme $\alpha + \beta\sqrt{d}$ (α et β dans $\mathbf{Q}$), qui satisfait une relation du type $x^2 + ux + v = 0$ avec u et v dans $\mathbf{Z}$.

L'anneau des entiers de $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$ est constitué ainsi :

- Si $d \equiv 2$ ou $3 \pmod{4}$, c'est $\mathbb{A}_{\mathbf{K}} = \{\alpha + \beta\sqrt{d} : \alpha, \beta \in \mathbf{Z}\} = \mathbf{Z}(\sqrt{d})$;
- Si $d \equiv 1 \pmod{4}$, c'est $\mathbb{A}_{\mathbf{K}} = \mathbf{Z}\left(\frac{1 + \sqrt{d}}{2}\right)$.

2.2. Unités de l'anneau des entiers de $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$

Ce sont les éléments inversibles de l'anneau ; ils forment un groupe qu'on note $\mathbb{A}_{\mathbf{K}}^{\times}$ et l'on a :

$$\varepsilon \in \mathbb{A}_{\mathbf{K}}^{\times} \Leftrightarrow |N(\varepsilon)| = 1.$$

Ceci peut être détaillé dans le cas qui nous occupe ($d \in \mathbf{N}^*$) par le résultat suivant : *Il existe une unité $\omega \neq 1$ (appelée unité fondamentale) telle que*

$$\mathbb{A}_{\mathbf{K}}^{\times} = \{\pm\omega^n : n \in \mathbf{Z}\}.$$

2.3. L'équation de Fermat-Pell : $a^2 - db^2 = 1$ ($a, b \in \mathbf{N}$)

La plus petite solution (x_1, y_1) non triviale, donc autre que $(1, 0)$, est appelée *solution fondamentale*. On démontre qu'elle se recherche en formant les réduites successives dans le développement de $\sqrt{d}$ en fractions continues régulières.

Le résultat suivant vient alors donner toutes les solutions à l'équation ci-dessus :

Soient (x_n, y_n) les solutions de l'équation vérifiant $x_n \geq 0, y_n \geq 0$, rangées dans l'ordre croissant. Alors :

- *Pour tout n , $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$;*
- *Pour tout n , $x_{n+2} = (2x_1)x_{n+1} - x_n$ et $y_{n+2} = (2x_1)y_{n+1} - y_n$ (on a posé $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$).*

On peut calculer explicitement x_n et y_n par les formules :

$$x_n = \frac{1}{2} \left[(x_1 + y_1\sqrt{d})^n + (x_1 - y_1\sqrt{d})^n \right],$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{d}} \left[(x_1 + y_1\sqrt{d})^n - (x_1 - y_1\sqrt{d})^n \right].$$

2.4. Le produit de Brahmagupta

C'est là qu'intervient ([3]) le produit de Brahmagupta pour écrire encore autrement les solutions.

Pour d non carré d'entier, on le définit sur $\mathbf{Q}^2$ par

$$(a, b) \odot (a', b') = (aa' + dbb', ab' + a'b)$$

qui munit $\mathbf{Q}^2$, privé de $(0, 0)$, d'une structure de groupe abélien isomorphe à $(\mathbf{Q}(\sqrt{d}), \cdot)$.

Par exemple, on a pour $d = 2$: $(1, 1)^{(2)} = (3, 2)$, $(1, 1)^{(3)} = (7, 5)$ et $(1, 1)^{(5)} = (41, 29)$.

Cette notation permet d'écrire commodément les solutions de l'équation de Fermat-Pell.

Prenons l'équation $a^2 - 19b^2 = 1$. La solution fondamentale est $(170, 39)$. Toutes les solutions sont les $(170, 39)^{(n)}$ où $n \in \mathbf{N}$.

Cette suite commence donc par

$$\begin{aligned}(170, 39)^{(2)} &= (57\,799, 13\,260), \\ (170, 39)^{(3)} &= (19\,651\,490, 4\,508\,361), \\ &\vdots\end{aligned}$$

Remarquons que, dans le cas simple par exemple de $d = 2$ pour lequel $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \dots]$, les réduites sont successivement $1 = \frac{1}{1}$, $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ puis $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5}$, $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{17}{12}$, ..., c'est-à-dire données par les couples puissances de $(1, 1)$.

2.5. « D'où » la résolution de $a^2 - db^2 = c$

Supposant que l'équation : $a^2 - db^2 = c$ ($d \neq 0$ non carré d'entier) admet (ce qui n'est pas évident : voir par exemple [1]) une solution $\gamma_0 = (a_0, b_0)$, alors tout γ du type $\gamma = \pm \gamma_0 \omega^n$, où ω est une unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ et $n \in \mathbf{Z}$, est solution de l'équation.

Donnons un exemple concret de ce résultat : soit à résoudre $(361)_b = a^2$.

On a vu que cela se ramène à :

$$B^2 - 3A^2 = -2 \tag{1}$$

avec $B = a$ et $A = b + 1$.

Cette équation a pour couples solutions $(B, A) : (1, 1), (5, 3), (19, 11)$, et plus généralement tout $(1, 1) \odot (2, 1)^{(n)}$, puisque $(2, 1)$ est unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$.

Le retour à notre problème concret donne ensuite, outre $b = 10$ et $a = 19$, $b = 40$ et $a = 71$... Nous y reviendrons dans le paragraphe 4.

3. Les résultats

Les résultats figurent dans le tableau 2.

Problème	Équation	Cond. sur b	Valeurs de b	Valeurs de a
$(121)_b = a^2$	$(2b+9)^2 - 4a^2 = 57$	$b \geq 3$	b quelconque	$a = b+1$
$(144)_b = a^2$	$(2b+9)^2 - 4a^2 = 57$	$b \geq 5$	b quelconque	$a = b+2$
$(169)_b = a^2$	$(2b+9)^2 - 4a^2 = 57$	$b \geq 10$	b quelconque	$a = b+3$
$(196)_b = a^2$	$(2b+9)^2 - 4a^2 = 57$	$b \geq 10$	$b = 10$	$a = 14$
$(225)_b = a^2$	$(2b+1)^2 - 2a^2 = -9$	$b \geq 6$	$b = 10, 61, 358, \dots$	$a = 15, 87, 507, \dots$
$(256)_b = a^2$	$(4b+5)^2 - 2(2a)^2 = -23$	$b \geq 7$	$b = 10, 213, 382, \dots$	$a = 16, 303, 542, \dots$
$(289)_b = a^2$	$a^2 - 2(b+2)^2 = 1$	$b \geq 10$	$b = 10, 68, 406, \dots$	$a = 17, 99, 577, \dots$
$(324)_b = a^2$	$(3b+1)^2 - 3a^2 = -11$	$b \geq 5$	$b = 10, 144, 2010, \dots$	$a = 18, 250, 3482, \dots$
$(361)_b = a^2$	$a^2 - 3(b+1)^2 = -2$	$b \geq 7$	$b = 10, 40, 152, \dots$	$a = 19, 71, 265, \dots$
$(400)_b = a^2$	$(2b)^2 - a^2 = 0$	$b \geq 5$	b quelconque	$a = 2b$
$(441)_b = a^2$	$(2b+1)^2 - a^2 = 0$	$b \geq 5$	b quelconque	$a = 2b+1$
$(484)_b = a^2$	$(2b+2)^2 - a^2 = 0$	$b \geq 9$	b quelconque	$a = 2b+2$
$(529)_b = a^2$	$(5b+1)^2 - 5a^2 = -44$	$b \geq 10$	$b = 10, 36, 70, \dots$	$a = 23, 81, 157, \dots$
$(576)_b = a^2$	$(10b+7)^2 - 20a^2 = -71$	$b \geq 8$	$b = 10, 95, 3450, \dots$	$a = 24, 294, 7716, \dots$
$(625)_b = a^2$	$(6b+1)^2 - 6a^2 = -29$	$b \geq 7$	$b = 10, 19, 998, \dots$	$a = 25, 47, 2445, \dots$
$(676)_b = a^2$	$(12b+7)^2 - 6(2a)^2 = -95$	$b \geq 8$	$b = 10, 355, \dots$	$a = 26, 871, \dots$
$(729)_b = a^2$	$(7b+1)^2 - 7a^2 = -62$	$b \geq 10$	$b = 10, 429, \dots$	$a = 27, 162, \dots$
$(784)_b = a^2$	$(7b+4)^2 - 7a^2 = -12$	$b \geq 9$	$b = 10, 168, 2686, \dots$	$a = 28, 446, 7108, \dots$
$(841)_b = a^2$	$(4b+1)^2 - 2a^2 = -1$	$b \geq 9$	$b = 10, 348, \dots$	$a = 29, 985, \dots$
$(900)_b = a^2$	$(3b)^2 - a^2 = 0$	$b \geq 10$	b quelconque	$a = 3b$
$(961)_b = a^2$	$(3b+1)^2 - a^2 = 0$	$b \geq 10$	b quelconque	$a = 3b+1$

TAB. 2 –

4. Étude détaillée de deux exemples, et quelques formules inoubliables !

4.1. Retour sur $(361)_b = a^2$

Nous avons obtenu toutes les solutions de $B^2 = 3A^2 - 2$ (Attention : on cherche les couples (B, A)), qui assurent une solution du problème posé, sous la forme $(19, 11) \odot (2, 1)^{(n)}$. Nous savons que les B et A obtenus sont les termes consécutifs d'une suite récurrence linéaire d'ordre deux satisfaisant la même relation :

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n.$$

Il en est « presque » de même pour a et b . Plus précisément les solutions (a, b) de $(361)_b = a^2$ sont les couples (a_n, b_n) tels que

- (a_n) vérifie la récurrence : $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$ avec $a_1 = 19$ et $a_2 = 71$;
- (b_n) vérifie la récurrence : $b_{n+2} = 4b_{n+1} - b_n + 2$ avec $b_1 = 0$ et $b_2 = 40$.

Pour de amples renseignements sur ce genre de problèmes diophantiens et sur les suites, qui inévitablement apparaissent, ayez la curiosité d'aller voir le site [4] de Neil Sloane.

4.2. Un exemple de suites imbriquées : $(256)_b = a^2$

En ayant posé $X = 4b + 5$ et $Y = 2a$, on cherche d'abord les solutions de $X^2 = 2Y^2 - 23$ sur les entiers naturels. Les solutions en sont les couples (X_n, Y_n) tels que les sous-suites des termes de rangs pair et celle des termes de rang impair satisfont la même relation de récurrence :

$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - u_n.$$

Ceci s'explique par le fait, dans cet exemple et contrairement à 4.1, qu'il y a deux solutions de base $(3, 4)$ et $(7, 6)$ qui permettent de générer l'ensemble des solutions par réunion des deux sous-ensembles associés à chacune d'elles avec $(3, 4) \odot (3, 2)^{(n)}$ et $(7, 6) \odot (3, 2)^{(n)}$.

Le retour à a et b n'est pas automatique du moins pour ce qui est de b puisque $b = (X - 5)/4$. C'est ainsi que les couples (a, b) apparaissent comme les termes consécutifs de la suite (a_{n+1}, b_{n+1}) , $n \geq 1$ pour laquelle

- (a_n) a ses deux sous-suites des termes de rang pair et de rang impair qui satisfont la même récurrence : $u_{n+2} = 34u_{n+1} - u_n$ avec $a_1 = 9$,

$a_2 = 16$, $a_3 = 303$ et $a_4 = 542$ d'où $a_5 = 10293$ et $a_6 = 18412$ par exemple ;

- (b_n) a ses deux sous-suites des termes de rang pair et de rang impair qui satisfont la même récurrence : $u_{n+2} = 34u_{n+1} - u_n + 40$ avec $b_1 = 5$, $b_2 = 10$, $b_3 = 213$ et $b_4 = 382$ d'où $b_5 = 7277$ et $b_6 = 13018$ par exemple.

4.3. Quelques morceaux choisis

Vous découvrirez ici quelques relations qui auraient paru stupéfiantes sans toutes les précautions précédentes !

$$\begin{aligned}(256)_{13\,018} &= 18\,412^2, \\ (676)_{101\,770} &= 249\,286^2, \\ (784)_{682\,318} &= 1\,805\,404^2.\end{aligned}$$

5. Et au-delà de 31 ?

Après 31, la situation n'est pas brillante, comme on l'a dit, car l'équation obtenue, malgré sa solution évidente, ne se laisse pas démonter.

En reprenant des notations plus classiques, le tableau 3 indique pour les entiers considérés, à partir de 32, uniquement ceux pour lesquels il y a une autre solution que la triviale obtenue avec $Y = 10$ dans un « temps machine raisonnable », en ayant testé tous les entiers dans la fourchette proposée, ce qui ne veut pas dire qu'il n'y a pas des solutions plus grandes.

6. Moralité : Vive le Calvados

Évidemment pour les esprits et les estomacs sensibles, je ne prône pas la consommation de ce délicieux breuvage qu'on sert chez nous, sous le nom poétique (?) de trou normand, mais je voulais attirer l'attention de manière provocante sur une particularité du nombre 14 qui, comme personne ne l'ignore, du moins je l'imagine, est le numéro de mon département.

POST SCRIPTUM :

1) Avec [4], vous découvrirez que 361 en base $4 \times A046178(n) - 2$ est le carré

X	X^2 en base Y	Équation	Valeurs de X	et de $Y < 4000$
32	$(1024)_Y = X^2$	$Y^3 + 2Y + 4 = X^2$	32 4486 40 277	10 272 1175
35	$(1225)_Y = X^2$	$Y^3 + 2Y^2 + 2Y + 5 = X^2$	35 40	10 11
40	$(1600)_Y = X^2$	$Y^3 + 6Y^2 = X^2$	$n(n^2 - 6)$	$n^2 - 6$
41	$(1681)_Y = X^2$	$Y^3 + 6Y^2 + 8Y + 1 = X^2$	41 89 1217 45 473	10 18 112 1272
45	$(2025)_Y = X^2$	$2Y^3 + 2Y + 5 = X^2$	45 221 641	10 29 59
47	$(2209)_Y = X^2$	$2Y^3 + 2Y^2 + 9 = X^2$	47 111 297 5073	10 18 85 234
50	$(2500)_Y = X^2$	$2Y^3 + 5Y^2 = X^2$	$(2n + 1)(2n^2 + 2n - 2)$	$2n^2 + 2n - 2$
53	$(2809)_Y = X^2$	$2Y^3 + 8Y^2 + 9 = X^2$	53 3453	10 180

TAB. 3 –

de $6 \times A046179(n) - 1$!

2) Petit bijou final : $(1225)_{5602} = 419\,365^2$.

Bibliographie

- [1] Daniel DUVERNEY, *Théorie des nombres*, Dunod, Paris, 1998.
- [2] P. LE GALL, Problème 304, *M&P*, **153** (2005), 57–59.
- [3] Pierre PAQUAY, Petite étude des fractions continues et leur application à l'équation de Pell-Fermat, *M&P*, **154** (2005), 21–37.
- [4] <http://www.research.att.com/~njas/sequences>

Enseignement de la Province de Hainaut

Région Mons-Borinage

Direction Générale Régionale Mons-Borinage
065/40.80.80



Haute Ecole Provinciale de Mons-Borinage-Centre
Catégorie Economique à Mons (065/88.12.28)

Haute Ecole Provinciale de Mons-Borinage-Centre
Catégorie Paramédicale à Mons (065/22.12.60)

Lycée Technique
Provincial Richard
Stiévenart à Hornu
(065/61.39.40)

Lycée Provincial
d'Enseignement
Technique du Hainaut
à Saint-Ghislain
(065/71.42.11)

Institut d'Enseignement
Secondaire Provincial
à Mons (065/39.93.40)

Institut d'Enseignement
Secondaire
Paramédical Provincial
à Mons (065/32.89.00)

Ecole
Fondamentale
Provincial
Victor Mirguet à
Mons (065/
32.05.53)

Centre d'Education et
de Formation en
Alternance de l'Athénée
Provincial Jean
d'Avesnes à Mons
(065/40.01.08)

Lycée Provincial Albert
Libiez à Colfontaine
(065/61.33.99)

Athénée Provincial
Jean d'Avesnes
à Mons
(065/40.01.01)

Académie Provinciale
des Métiers à Mons
(065/39.89.79)

Haute Ecole Provinciale de Mons-Borinage-Centre
Catégorie Pédagogique à Mons (065/32.04.90)

Haute Ecole Provinciale de Mons-Borinage-Centre
Catégorie Artistique à Saint-Ghislain (065/71.42.11)

Institut Provincial d'Enseignement de Promotion sociale Mons-Formations à Mons (065/35.38.13)

Centre Provincial d'Enseignement de Promotion sociale du Borinage à Hornu (065/76.76.18)

Ecole Industrielle Supérieure Provinciale à Mons (065/39.89.39)

Cours des Métiers d'Arts du Hainaut (065/84.96.32)

Conseiller en informations scolaires à Mons (065/40.80.80)

Cabri-Géomètre et les lieux (2)

JEAN-PAUL HOUBEN

Université Catholique de Louvain

Dans un premier article sur les lieux ([3]), il était indiqué que seuls les lieux obtenus par la méthode des génératrices pouvaient trouver une solution lorsqu'on utilise Cabri-Géomètre. Qu'en est-il des autres situations lorsqu'une relation métrique intervient ?

Si la relation métrique est simplement une distance, tout le monde va bien sûr penser au cercle. Comme l'outil cercle ou compas est présent dans Cabri-Géomètre, nous sommes sauvés dans la recherche d'une représentation du lieu de notre problème.

Si le relation est une somme (ou une différence) de distances, il est naturel de regarder les coniques (ellipses ou hyperboles) qui sont des objets de Cabri-Géomètre.

Dans d'autres cas, il nous faut retrouver des propriétés géométriques qui nous ramènent au cercle ou à la droite.

En voici des exemples qui en général ne sont malheureusement plus enseignés ⁽¹⁾. Lorsque le relation proposée fait intervenir un rapport, il faut songer au théorème de la bissectrice : *Dans tout triangle, la bissectrice divise le côté opposé en segments proportionnels aux côtés de l'angle.*

On a aussi la bissectrice extérieure et la proposition : *Dans tout triangle, la bissectrice extérieure détermine sur le côté opposé deux segments proportionnels aux côtés de l'angle.*

Ces deux propositions nous donnent la figure 1 et les relations associées :

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|M_1B|}{|M_1C|} = \frac{|M_2B|}{|M_2C|}.$$

Adresse de l'auteur : Jean-Paul Houben, Rue de l'Église 78, 1301 Bierges; courriel : houbenjp@versateladsl.be.

⁽¹⁾ On trouvera ces situations dans les anciens ouvrages de géométrie d'avant le réforme des « maths modernes », p. ex. [1] ou [2].

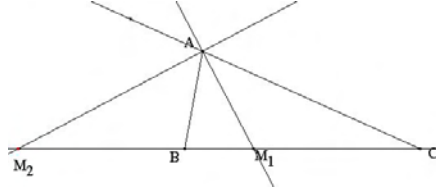


FIG. 1 –

Lorsqu'on peut fixer les points M_1 et M_2 , le lieu de A est un cercle de diamètre M_1, M_2 . En effet les bissectrices forment en A un angle droit.

Les deux théorèmes de Ptolémée sur les médianes, qui donnent la somme et la différence des carrés de deux côtés d'un triangle en fonction de la médiane relative aux troisième cotés, permettent aussi d'introduire un lieu géométrique. Plus précisément, avec la figure 2, nous avons, pour le premier

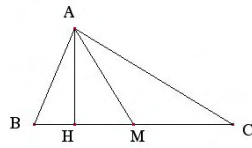


FIG. 2 –

théorème de la médiane : *La somme des carrés de deux côtés d'un triangle est égal à deux fois le carré de la médiane relative au troisième côté plus deux fois le carré de la moitié de ce troisième coté.*

$$|AB|^2 + |AC|^2 = 2|AM|^2 + 2|BM|^2$$

Si le membre de gauche est constant et les points B et C fixes, $|AM|$ est alors constant et est le rayon ⁽²⁾ d'un cercle de centre M . Le lieu est un cercle.

Quant au second théorème de la médiane : *La différence positive des carrés de deux côtés d'un triangle est égale à quatre fois le produit du troisième coté avec la projection de la médiane relative au troisième côté sur ce côté.*

$$||AB|^2 - |AC|^2| = 4|BC| \cdot |HM|$$

⁽²⁾ $|AM| = \frac{1}{2} \sqrt{|AB|^2 + |AC|^2 - \frac{1}{2}|BC|^2}$

Si le membre de gauche est constant et les points B et C fixes, le point H est alors fixe et le point A a pour projection H ou son symétrique H' par rapport à M ; le lieu est constitué de deux perpendiculaires à AB .

Venons-en à une application.

Une conique peut être définie par son excentricité : *Le lieu des points dont le rapport des distances de ces points à un point fixe et à une droite fixe est une conique. Le point fixe est le foyer de la conique et la droite fixe en est la directrice*

Commençons par deux situations où le rapport est particulier : prenons par exemple $e = \frac{3}{2}$ et $e = \frac{2}{3}$. Le début de la construction est le même dans les deux cas.

On trace la droite d et on fixe le point F (v. les figures 3 ou 4). Sur le

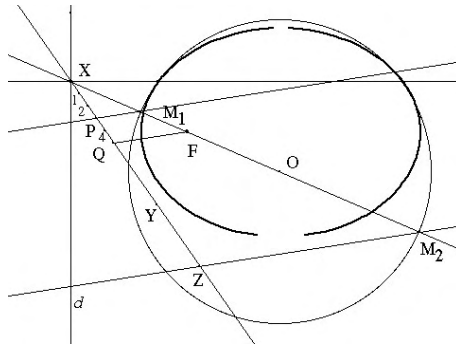


FIG. 3 –

droite d on place un point quelconque X d'où l'on mène une perpendiculaire à la directrice d . On trace la droite XF . C'est sur cette droite que l'on doit trouver les deux points M_1 et M_2 tels que :

$$\frac{M_1F}{M_1X} = \frac{M_2F}{M_2X} = e.$$

Lorsque ces points ont été trouvés, il faut tracer le cercle de diamètre M_1M_2 et rechercher les intersections avec la perpendiculaire en X à la directrice d . Le lieu de ces points lorsque X parcourt la directrice nous donne une conique.

Pour fixer les points M_1 et M_2 il faudra utiliser le théorème de Thalès avec une droite auxiliaire passant par le point X .

Pour $e = \frac{2}{3}$, nous avons l'ellipse de la figure 3. Pour utiliser le théorème de Thalès, on a placé sur la droite auxiliaire un point arbitraire noté 1. Le point 2 a été obtenu en prenant le symétrique du point X par rapport au point 1. Le troisième point, P , est obtenu à partir du point 2, et ainsi de suite jusqu'au point Q . Le point Y est le symétrique de X par rapport à Q et enfin le point Z le symétrique de Q par rapport à Y . Les projections parallèles sur XF donnent les points M_1 et M_2 . Le rapport demandé est obtenu sur XF .

Pour $e = \frac{3}{2}$, nous avons l'hyperbole de la figure 4, avec le même type de

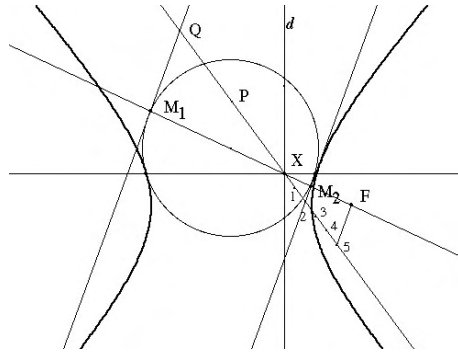


FIG. 4 –

constructions sur la droite auxiliaire afin d'utiliser le théorème de Thalès.

Ce qui serait intéressant, ce serait de pouvoir trouver les points M_1 et M_2 avec des valeurs variables pour e . Lorsque $0 < e < 1$ on aurait des ellipses et lorsque $e > 1$ ce seraient des hyperboles.

Or nous connaissons la proposition suivante : *Deux côtes d'un triangle et les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle formé par ces côtés forment un quaterne harmonique* ⁽³⁾.

Nous sommes dans cette situation. De plus : *Dans tout quadrilatère complet* ⁽⁴⁾, *une diagonale est divisée harmoniquement par les deux autres* ⁽⁵⁾.

Cette figure a été obtenue de la façon suivante :

⁽³⁾ On trouvera plus de détails dans [1, p. 319] ou [2, p. 244].

⁽⁴⁾ On appelle *quadrilatère complet* la figure formée de quatre droites qui se coupent deux à deux en six sommets. Il y a trois diagonales qui relient les sommets opposés.

⁽⁵⁾ On trouvera plus de détails sur cette proposition dans [1, p. 320] ou [2, p. 247].

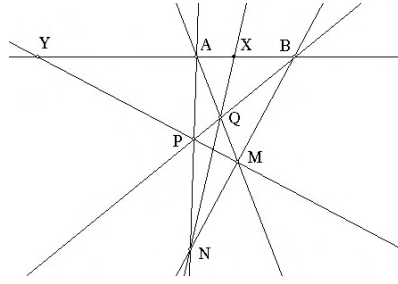


FIG. 5 –

- On fixe un segment $[AB]$, et on trace la droite passant par A et B ;
 - On place un point X sur le segment $[AB]$;
 - On place un point N quelconque et on trace la droite XN ;
 - On trace les droites AN et BN ;
 - On prend un point quelconque Q sur XN , et on trace les droites AQ et BQ . Elles rencontrent respectivement BN et AN en M et en P ;
 - On trace la droite MN qui rencontre la droite AB en Y .
- Si on déplace le point X , le point Y suit tout en respectant les rapports :

$$\frac{|XA|}{|XB|} = \frac{|YA|}{|YB|},$$

ce qu'on peut vérifier en mesurant les segments ⁽⁶⁾ et en calculant les rapports avec la calculatrice ⁽⁷⁾.

Il reste à incorporer cette construction du quadrilatère complet dans la construction des coniques en fonction de leurs excentricités.

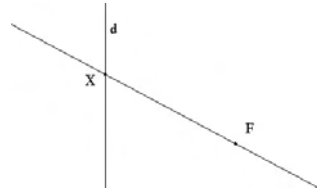


FIG. 6 –

Allons-y progressivement. D'abord la directrice d , le point variable X sur celle-ci, le foyer F , et enfin la droite FX . Nous avons la figure 6.

⁽⁶⁾ **Mesures** / Distances & longueurs

⁽⁷⁾ **Mesures** / Calculatrice

Plaçons maintenant un point variable M_1 sur XF et construisons, comme il a été décrit précédemment, le quadrilatère complet pour trouver le point M_2 . Nous avons maintenant la figure 7.

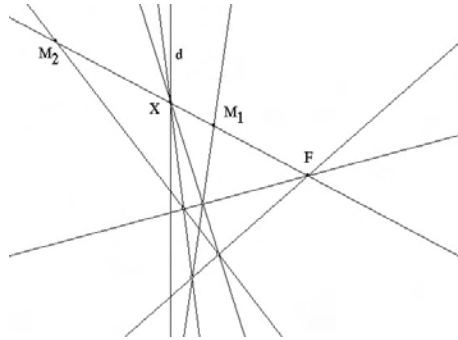


FIG. 7 –

Cachons les constructions pour ne garder que la figure 8. Cherchons le

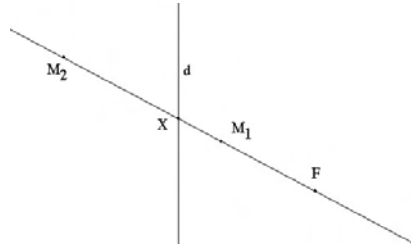


FIG. 8 –

point milieu du segment déterminé par les points M_1 et M_2 qu'on prend comme centre d'un cercle passant par M_1 . Par le point X traçons une perpendiculaire à la directrice d . Cette perpendiculaire rencontre le cercle en deux points. On recherche le lieu engendré par chacun de ces points lorsque X parcourt la directrice. Nous avons alors la figure finale (fig. 9).

Pour terminer, définissons les segments $[M_1X]$ et $[M_1F]$. On recherche la longueur ⁽⁸⁾ de chacun de ces segments, puis avec la calculatrice ⁽⁹⁾ on recherche le rapport des longueurs $|M_1F|$ et $|M_1X|$. Le résultat est pris avec

⁽⁸⁾ **Mesures** / Distances et longueurs

⁽⁹⁾ **Mesures** / Calculatrice

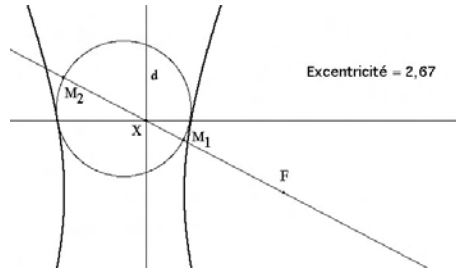


FIG. 9 –

la souris et placé dans le dessin. On édite ⁽¹⁰⁾ le texte « **Résultat :** » et on le remplace par « **Excentricité =** ».

La figure finale **exc.fig** correspondant à la figure 4 peut être chargée depuis le site de la SBPMef (<http://www.sbpme.be>).

En déplaçant le point M_1 , on modifie l'excentricité et on peut passer des hyperboles aux ellipses.

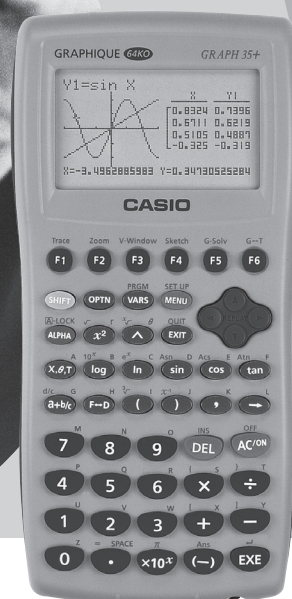
On ne peut avoir de parabole, car lorsque le point M_1 est au milieu de $[XF]$, le point M_2 est rejeté à l'infini. Mais, dans ce cas, on retrouve la construction vue dans l'article sur les paraboles. La parabole est le lieu du point d'intersection de la perpendiculaire à d menée en X avec la médiatrice de XF .

Bibliographie

- [1] Antoine DALLE, C. DE WAELE, *Géométrie plane et éléments de topographie*, Wemael-Charlier, Namur, 1962.
- [2] A. GUION, *Cours de géométrie plane, T. III*, ???.
- [3] Jean-Paul HOUBEN, Lieux avec Cabri-Géomètre, *M&P*, **146** (2005), 61–64.

⁽¹⁰⁾ **Affichage** / *Texte*

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE



GRAPH 35+

DES CALCULATRICES ADAPTÉES À CHAQUE NIVEAU SCOLAIRE

- 9 modèles de calculatrices scientifiques et graphiques pour accompagner les élèves tout au long de leur scolarité
- Légères, solides et faciles à utiliser
- Tous les modèles scolaires sont garantis trois ans



CASIO
www.cas-bel.com

Problèmes

Claudine Festraets ⁽¹⁾

Impossible

Problème n° 334 de *M&P* n° 160

Démontrer que, $\forall x, y \in \mathbb{N}^*$, l'équation $(x + y)^{x+y} = x^x + y^y$ n'admet aucune solution.

Solution de A. Lafort, de Nivelles

x^{x+y} et y^{x+y} constituent le premier et le dernier termes du développement en binôme de Newton de $(x + y)^{x+y}$ dont tous les termes sont positifs. D'où $(x + y)^{x+y} > x^{x+y} + y^{x+y} > x^x + y^y$ puisque $x, y \geq 1$. L'équation proposée est donc bien impossible.

Autres bonnes solutions de R. CHOULET, d'Avenay et J. RASSE, de Méan.

Alignement

Problème n° 335 de *M&P* n° 160

Le triangle ABC est inscrit dans un cercle de centre O . On trace les diamètres $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$. Les tangentes au cercle en A' , en B' et en C' rencontrent respectivement BC en D , CA en E et AB en F . Démontrer que D , E , F sont colinéaires.

Solution de C. Villers, de Hyon

Préliminaires

$[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ sont des diamètres du cercle de centre O circonscrit au triangle ABC . Ils forment des angles au centre deux à deux de même amplitude car opposés par le sommet. Ces paires d'angles au centre de même amplitude interceptent donc sur le cercle des arcs de même amplitude qui sous-tendent des cordes de même longueur. Dès lors $|AC'| = |A'C|$, $|BC'| = |CB'|$ et $|AB'| = |A'B|$.

Outil de la démonstration

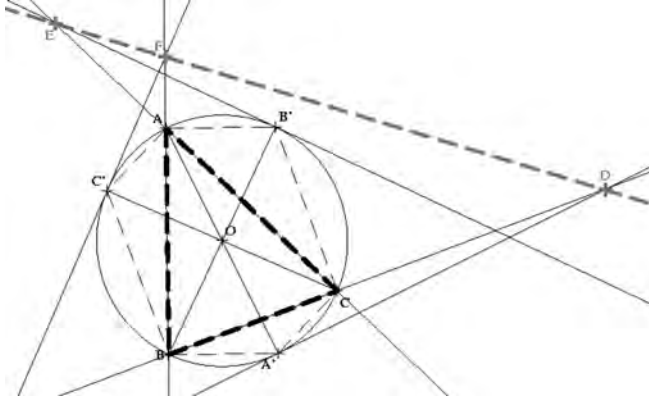
Nous utiliserons la réciproque du théorème de Ménélaüs pour les points D ,

⁽¹⁾ Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à Cl. FESTRAETS, Rue J.-B. Vandercammen 36, B-1160 Bruxelles ou à l'adresse e-mail hamoircl@brutele.be.

E et F qui appartiennent respectivement aux droites contenant les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ du triangle ABC .

Les points D , E et F sont extérieurs au triangle ABC car chacun d'eux appartient à une tangente au cercle circonscrit au triangle. Les rapports $\frac{|AF|}{|FB|}$, $\frac{|BD|}{|DC|}$ et $\frac{|CE|}{|EA|}$ sont positifs alors qu'en utilisant les mesures algébriques, chacun d'eux serait négatif.

Nous allons démontrer que le produit des rapports précédents vaut 1 (ce qui correspondrait à -1 en utilisant les mesures algébriques).



Démonstration

Il faut démontrer que

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1. \quad (1)$$

Or, en calculant les puissances de F , de D et de E par rapport au cercle, il vient

- $|FA| \cdot |FB| = |FC'|^2$, donc $\frac{|FA|}{|FB|} = \frac{|FC'|^2}{|FB|^2}$;
- $|DC| \cdot |DB| = |DA'|^2$, donc $\frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|DA'|^2}{|DC|^2}$;
- $|EA| \cdot |EC| = |EB'|^2$, donc $\frac{|EC|}{|EA|} = \frac{|EB'|^2}{|EA|^2}$.

La thèse (1) devient alors : $\frac{|FC'|^2}{|FB|^2} \cdot \frac{|DA'|^2}{|DC|^2} \cdot \frac{|EB'|^2}{|EA|^2} = 1$, ou encore

$$\frac{|FC'|}{|FB|} \cdot \frac{|DA'|}{|DC|} \cdot \frac{|EB'|}{|EA|} = 1 \quad (2)$$

puisque les longueurs sont positives.

Les triangles $FC'A$ et FBC' sont semblables car ils ont deux angles de même amplitude chacun à chacun. En effet, l'angle $\widehat{C'FA}$ est commun aux deux triangles et les angles $\widehat{FC'A}$ et $\widehat{FBC'}$ ont même amplitude car ce sont des angles tangentiel et inscrit qui interceptent le même arc. Donc $\frac{|FC'|}{|FB|} = \frac{|C'A|}{|BC'|}$. De la même manière, la similitude des triangles $DA'B$ et DCA' fournit $\frac{|DA'|}{|DC|} = \frac{|A'B|}{|CA'|}$ et celle de $EB'C$ et EAB' , $\frac{|EB'|}{|EA|} = \frac{|B'C|}{|AB'|}$.

La thèse (2) devient donc $\frac{|C'A|}{|BC'|} \cdot \frac{|A'B|}{|CA'|} \cdot \frac{|B'C|}{|AB'|} = 1$

Et cette égalité est établie puisque $|C'A| = |CA'|$, $|A'B| = |AB'|$ et $|B'C| = |BC'|$ en vertu des préliminaires. La propriété est ainsi démontrée.

Bonnes solutions de A. LAFORT, de Nivelles et J. RASSE, de Méan. Un autre lecteur m'a envoyé une solution que je ne comprends pas, il me semble qu'il part de la thèse pour aboutir à la thèse !

Trigonométrie

Problème n° 336 de *M&P* n° 160

Démontrer que $\sin(\cos x) < \cos(\sin x)$ pour tout réel x .

Solution de R. Choulet, de Avenay

L'idée est d'étudier sur $\mathbb{R}$ la fonction f telle que $f(x) = \cos(\sin x) - \sin(\cos x) = \cos(\sin x) - \cos(\frac{\pi}{2} - \cos x)$.

Il suffit de le faire sur $] -\pi ; \pi]$ par périodicité et même sur $I = [0 ; \pi]$ par parité de f .

Or $\cos$ décroît sur I donc il suffit d'établir que pour $x \in I$: $\sin x$ et $\frac{\pi}{2} - \cos x$ sont dans I avec de plus $\sin x < \frac{\pi}{2} - \cos x$.

Pour $x \in I$: $0 \leq \sin x \leq 1 \leq \pi$.

Pour $x \in I$: $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $\frac{\pi}{2} - \cos x \in [\frac{\pi}{2} - 1 ; \frac{\pi}{2} + 1] \subset [0 ; \pi]$.

Pour l'autre résultat annoncé, on étudie la variation de g : $g(x) = \frac{\pi}{2} - \cos x - \sin x$ dont la dérivée g' est telle que $g'(x) = \sin x - \cos x$ s'annule

en la seule valeur $\frac{\pi}{4}$ sur I ; $g' < 0$ entre 0 et ce zéro, $g' > 0$ sur $[\frac{\pi}{4}; \pi]$.

Le minimum de g est en $\frac{\pi}{4}$ égal à $\frac{\pi}{2} - \sqrt{2} > 0$ donc g est strictement positive sur I ce qui démontre bien $\frac{\pi}{2} - \cos x > \sin x$ et le résultat annoncé en découle comme on l'a expliqué.

Bonnes solutions de K. CHIRIAA, de Bruxelles, A. LAFORT, de Nivelles, J. OOMS, de Chimay, J. RASSE, de Méan et J. SEGERS, de Liège.

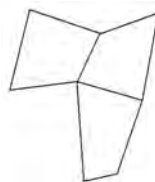
* *

*

Les solutions des problèmes que voici doivent me parvenir au plus tard deux mois après la parution de cette revue. Ces solutions peuvent être manuscrites, mais vous pouvez aussi les envoyer à mon adresse e-mail sous la forme d'un fichier L^AT_EX ou à défaut au format doc, pdf ou txt. Rédigez vos différentes solutions sur des feuilles séparées et n'oubliez pas d'indiquer votre nom sur chacune des feuilles.

343. Développement

Trois quadrilatères, n'ayant tous trois pas de côtés parallèles, constituent trois des six faces d'un hexaèdre. Avec la règle et le compas, construire les trois autres quadrilatères pour ainsi constituer un développement de cet hexaèdre. Préciser les conditions de solubilité du problème (on suppose que les trois quadrilatères forment un « L »).



344. Diagonales

Démontrer que les diagonales d'un quadrilatère sont perpendiculaires si et seulement si la somme des carrés de deux côtés opposés est égale à la somme des carrés des deux autres côtés.

345. Maximum et minimum

La somme des périmètres de deux triangles équilatéraux est une constante L . Déterminer les périmètres L_1 et L_2 de chacun des triangles pour que la somme de leurs aires

- (a) soit maximale,
- (b) soit minimale.

Olympiades

Claudine Festraets ⁽¹⁾

Voici successivement les énoncés des problèmes de la finale de l'Olympiade Mathématique Belge de 2007 et les questions du 25^e Annual American Invitational Mathematics Examination (AIME). Étaient invités à ce test les 42 étudiants de 4^e, 5^e et 6^e années ayant obtenu au moins 100 sur 150 à la demi-finale de l'Olympiade. Toutes les questions sauf la dernière ont été résolues par au moins un élève. Le meilleur résultat est celui de Hoan-Phung Bui, élève de 5^e à l'Athénée Robert Catteau, avec 11 sur 15.

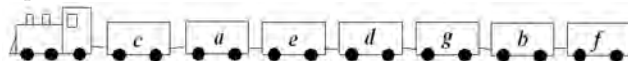
TRENTÉ-DEUXIÈME O.M.B.

MINI FINALE 2007

1. Dans ma classe, toutes les interrogations de mathématique sont notées sur 20. Ma moyenne jusqu'à présent était 12, mais avec le 17 que je viens d'obtenir, elle est passée à 13.
 - (a) Quelle doit être ma note à la prochaine interrogation pour que ma nouvelle moyenne soit 14 ?
 - (b) Cette moyenne de 14 peut-elle passer à 17 si j'obtiens 20 à toutes les interrogations suivantes ? Si oui, combien d'interrogations parfaites dois-je faire ?
2. Dans un centre ferroviaire, les installations permettent de détacher deux ou plusieurs des derniers wagons du train puis de les rattacher aux premiers wagons (ou à la locomotive, si aucun wagon n'a été laissé) après avoir inversé l'ordre des wagons détachés. Par exemple, le train représenté ci-dessous où on détache les quatre derniers wagons

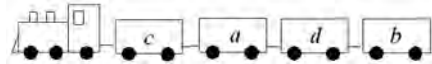


devient après une telle manœuvre



⁽¹⁾ Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à Cl. FESTRAETS, Rue J.-B. Vandercammen 36, B-1160 Bruxelles ou à l'adresse e-mail hamoircl@brutele.be.

- (a) Trier les wagons d'un train consiste à replacer ces wagons dans un ordre bien déterminé après un certain nombre de manœuvres. Est-il possible de trier les wagons du train figuré ci-dessous pour obtenir l'ordre « a-b-c-d » ?



Si oui, quel est le nombre minimum de manœuvres nécessaires ?

- (b) Est-il toujours possible de trier tous les wagons d'un train ? Expliquer votre réponse.
- (c) Est-il toujours possible de trier un train de trois wagons en au plus une manœuvre ? en au plus deux manœuvres ? en au plus trois manœuvres ?
3. On désigne par $\overline{ab}$ un nombre où a est le chiffre des dizaines et b celui des unités. Il existe des nombres naturels $\overline{ab}$ et $\overline{cd}$ tels que a, b, c, d sont non nuls, tous différents et $\overline{ab} \times \overline{cd} = \overline{ba} \times \overline{dc}$, par exemple $21 \times 36 = 12 \times 63$.
- (a) Trouver au moins deux autres exemples.
- (b) Déterminer une relation générale qui lie a, b, c et d lorsque $\overline{ab} \times \overline{cd} = \overline{ba} \times \overline{dc}$ et montrer qu'elle fournit toutes les solutions (a, b, c, d) .
- (c) Combien y a-t-il de solutions ?
4. Le triangle ABC est rectangle avec $\widehat{ABC}$ mesurant 90° . Le segment $[CP]$ est perpendiculaire à la droite AC et tel que $|CP| = |CB|$.
- (a) Si l'amplitude de l'angle $\widehat{BAC}$ vaut 26° , est-il vrai que la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ est soit parallèle, soit perpendiculaire à la droite BP ?
- (b) Cette propriété reste-t-elle vraie si l'amplitude de l'angle $\widehat{BAC}$ ne vaut pas 26° ?
- (c) La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ est-elle toujours parallèle à BP ? est-elle toujours perpendiculaire à BP ?

MIDI FINALE 2007

1. Le chiffre des unités du nombre naturel N est x . On effectue successivement les opérations suivantes :

- supprimer le chiffre des unités x du nombre N ;
- retrancher $2x$ du nombre obtenu.

Par exemple, le nombre 203 devient 20, puis 14.

Est-il toujours vrai que le nombre final est un multiple de 7 si et seulement si le nombre initial N est un multiple de 7 ?

2. (a) Trouver tous les couples d'entiers strictement positifs dont la somme est égale au produit. Prouver qu'il n'en existe pas d'autres.
- (b) Trouver tous les triplets d'entiers strictement positifs formant une suite arithmétique dont la somme est égale au produit. Prouver qu'il n'en existe pas d'autres.
(La suite (a, b, c) est appelée suite arithmétique lorsqu'il existe un entier r tel que $(a, b, c) = (a, a + r, a + 2r)$.)
- (c) Que devient la réponse au point (b) si la suite arithmétique est formée d'entiers quelconques (positifs, négatifs ou nuls) ?

3. Le triangle ABC est rectangle avec $\widehat{ABC}$ mesurant 90° . Le pied de la hauteur relative à l'hypoténuse est D et les pieds des perpendiculaires abaissées de D respectivement sur $[BA]$ et $[BC]$ sont E et F . Soient r_1 , r_2 et r_3 les rayons des cercles inscrits aux triangles AED , EDF et FDC respectivement. La formule $r_2 = \sqrt{r_1 \cdot r_3}$ est-elle toujours correcte ?

4. Déterminer tous les nombres entiers a , b tels que

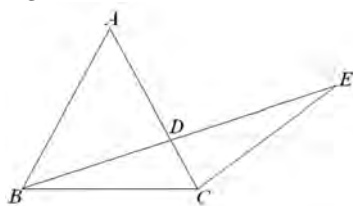
$$(a + b)^n = a^n + b^n$$

- (a) pour $n = 2$;
- (b) pour $n = 3$;
- (c) pour $n > 3$.

MAXI FINALE 2007

1. Le triangle ABC est équilatéral. La demi-droite $[BE$ coupe le segment $[AC]$ en D et est telle que $\widehat{CBE}$ mesure 20° et $|DE| = |AB|$. Que

vaut l'amplitude de l'angle $\widehat{BEC}$?



2. Autour d'un cercle, on dispose successivement n chiffres $a_1, a_2, \dots, a_n$ (chacun valant de 0 à 9). Partant de a_1 et tournant autour du cercle, on forme le nombre $A_1 = \overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$ (dont les chiffres successifs sont $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$) ; partant de a_2 et tournant dans le même sens, on forme le nombre $A_2 = \overline{a_2 a_3 a_4 \dots a_n a_1}$ et ainsi de suite. La proposition « si d est un diviseur de A_1 , alors d est aussi un diviseur de chacun des A_i pour $i \in \{2, 3, 4, \dots, n\}$ » est-elle vraie

- (a) pour $d = 9$?
- (b) pour $d = 27$ et $n = 2007$?
- (c) pour $d = 27$ et pour tout n ?

3. Considérons les ensembles de n points dont trois quelconques ne sont pas alignés. Pour un tel ensemble, formons tous les triangles dont les sommets sont dans cet ensemble.

- (a) Si les n points sont toujours pris dans le plan et si $n = 7$, quel est le nombre maximal de triangles qu'une droite de ce plan ne comprenant aucun des 7 points peut couper ?
- (b) Si les n points sont toujours pris dans l'espace et si $n = 7$, quel est le nombre maximal de triangles qu'un plan ne comprenant aucun des 7 points peut couper ?
- (c) Généralisez au cas où n est quelconque.

4. Soit f une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que

$$f(n+1) > f(n) \quad \text{et} \quad f(f(n)) = 3n.$$

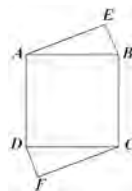
Que vaut $f(2007)$?

**25th ANNUAL AMERICAN INVITATIONAL
MATHEMATICS EXAMINATION 2007**

1. Une association mathématique produit un ensemble de plaques d'immatriculation commémoratives. Chaque plaque contient une suite de cinq caractères choisis parmi les lettres de AIME et les quatre chiffres de 2007. Dans une plaque, aucun caractère ne peut apparaître plus de fois qu'il n'apparaît parmi les quatre lettres de AIME ou les quatre chiffres de 2007. Un ensemble de plaques sur lesquelles chaque suite possible apparaît exactement une fois contient N plaques. Trouvez $\frac{N}{10}$.
2. Trouvez le nombre de triplets ordonnés (a, b, c) où a , b et c sont des entiers positifs, a est un facteur de b , a est un facteur de c et $a + b + c = 100$.
3. Le côté du carré $ABCD$ mesure 13 et les points E et F sont extérieurs au carré de sorte que $BE = DF = 5$ et $AE = CF = 12$. Trouvez $(EF)^2$.
4. Les ouvriers d'une usine produisent des gadgets et des machines. Pour chaque produit, le temps de production est constant et identique pour tous les ouvriers, mais pas nécessairement égal pour les deux produits. En une heure, 100 ouvriers peuvent produire 300 gadgets et 200 machines. En deux heures, 60 ouvriers peuvent produire 240 gadgets et 300 machines. En trois heures, 50 ouvriers peuvent produire 150 gadgets et m machines. Trouvez m .
5. On trace le graphe de l'équation $9x + 223y = 2007$ sur du papier quadrillé, chaque carré représentant une unité dans chaque direction. Combien de carrés 1×1 ont leurs intérieurs situés entièrement sous le graphe et entièrement dans le premier quadrant ?
6. Un entier est dit de *parité monotone* si sa représentation décimale $a_1a_2a_3 \dots a_k$ satisfait à $a_i < a_{i+1}$ si a_i est impair et $a_i > a_{i+1}$ si a_i est pair. Combien y a-t-il d'entiers de parité monotone de quatre chiffres ?
7. Pour un nombre réel x , $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x . Pour un certain entier k , il existe 70 entiers positifs $n_1, n_2, \dots, n_{70}$ tels que

$$k = \lfloor \sqrt[3]{n_1} \rfloor = \lfloor \sqrt[3]{n_2} \rfloor = \dots = \lfloor \sqrt[3]{n_{70}} \rfloor$$

et k divise n_i pour tous les i tels que $1 \leq i \leq 70$. Trouvez la valeur maximale de $\frac{n_i}{k}$ pour $1 \leq i \leq 70$.

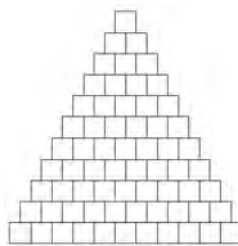


8. Une pièce rectangulaire de papier mesure 4 unités par 5 unités. On trace plusieurs lignes parallèles aux bords du papier. On appelle *basique* un rectangle déterminé par les intersections de quelques unes de ces lignes si :
- (i) les quatre côtés du rectangle sont tous des segments de segments de droites tracées, et
 - (ii) aucun segment de droites tracées ne se situe à l'intérieur du rectangle.
- Étant donné que la longueur totale de toutes les droites tracées est exactement de 2007 unités, soit N le nombre maximum de rectangles basiques qu'il est possible de déterminer. Trouvez le reste de la division de N par 1000.
9. Soit un rectangle $ABCD$ où $AB = 63$ et $BC = 448$. les points E et F sont sur $\overline{AD}$ et $\overline{BC}$ respectivement, de sorte que $AE = CF = 84$. Le cercle inscrit dans le triangle BEF est tangent à $\overline{EF}$ au point P et le cercle inscrit dans le triangle DEF est tangent à $\overline{EF}$ au point Q . Trouvez PQ .
10. Soit S un ensemble de six éléments. Soit P l'ensemble de tous les sous-ensembles de S . Les sous-ensembles A et B de S , non nécessairement distincts, sont tirés indépendamment et au hasard de P . La probabilité que B soit contenu dans au moins l'un de A ou $S - A$ est $\frac{m}{n^r}$, où m , n et r sont des entiers strictement positifs, n est premier, m et n sont premiers entre eux. Trouvez $m + n + r$.
11. Deux longs tubes cylindriques de même longueur mais de diamètres différents sont placés parallèles l'un à l'autre sur une surface plane. Le grand tube, de rayon 72, roule le long de la surface vers le petit tube, de rayon 24. Il roule par dessus le petit tube et continue de rouler le long de la surface plane jusqu'à ce qu'il s'arrête au même point de sa circonférence qu'au départ, après avoir fait un tour complet. Si le petit tube ne bouge jamais et le roulement se fait sans glissade, le grand tube s'arrête à une distance x de son point de départ. La distance x peut s'exprimer sous la forme $a\pi + b\sqrt{c}$, où a , b et c sont des entiers et c n'est divisible par le carré d'aucun nombre premier. Trouvez $a + b + c$.
12. Toute la suite géométrique croissante $x_0, x_1, x_2, \dots$ consiste en des puissances entières de 3. Étant donné que

$$\sum_{n=0}^7 \log_3(x_n) = 308 \quad \text{et} \quad 56 \leq \log_3 \left(\sum_{n=0}^7 x_n \right) \leq 57,$$

trouvez $\log_3(x_{14})$.

13. Une disposition triangulaire de carrés a un carré dans la première rangée, deux dans la seconde et en général k carrés dans la k^{e} rangée, pour $1 \leq k \leq 11$. Sauf pour la rangée du bas, chaque carré repose sur deux carrés de la rangée immédiatement au-dessous, comme illustré sur la figure. Dans chaque carré de la onzième rangée, on place un 0 ou un 1. Puis on place des nombres dans les autres carrés, la valeur dans chaque carré étant la somme des valeurs dans les deux carrés sous lui. Pour combien de distributions initiales de 0 et de 1 dans la rangée du bas le nombre dans le carré au sommet est-il un multiple de 3 ?



14. Soit $f(x)$ un polynôme à coefficients réels tel que $f(0) = 1$, $f(2) + f(3) = 125$ et , pour tout x , $f(x)f(2x^2) = f(2x^3 + x)$. Trouver $f(5)$.
15. On trace quatre cercles ω , ω_A , ω_B et ω_C de même rayon à l'intérieur du triangle ABC de sorte que ω_A est tangent aux côtés AB et AC , ω_B à BC et BA , ω_C à CA et CB et ω est tangent extérieurement à ω_A , ω_B et ω_C . Si les côtés du triangle ABC sont 13, 14 et 15, le rayon de ω peut s'exprimer sous la forme $\frac{m}{n}$ où m et n sont des entiers strictement positifs premiers entre eux. Trouvez $m + n$.

Réponses

1	2	3	4	5
372	200	578	450	888
6	7	8	9	10
640	553	896	259	710
11	12	13	14	15
179	091	640	676	389



**POLYTECH
MONS**

**L'Espace Terre et Matériaux
de la Faculté Polytechnique de Mons**
présente
du 8 septembre au 16 décembre 2007



Vignobles et Géologie

l'amour du vin et des pierres

Exposition ouverte

Les jeudis et vendredis de 13 à 16 h
Les samedis et dimanches de 13 à 18 h
Fermé les jours fériés

Droit d'entrée : 2 €

gratuit pour les groupes scolaires (sur réservation)
Possibilité de visites guidées (min. 20 pers.)

Bibliographie

Jacques Navez

Françoise VAN DIEREN, Sabine HAUSMANN
Clic & Maths 5^e/6^e, Technique de qualification, Tome 1,
De Boeck, Bruxelles, 2007, 190 pp.,
ISBN : 978-2-8041-5359-5.

Le contenu du livre est le suivant :

- Chapitres 1 et 2 : suites arithmétiques et géométriques ;
- Chapitres 3, 4, 5, 6 et 7 : approche de l'infini, graphiques, fonctions du second degré, trois familles de fonctions, fonctions trigonométriques ;
- Chapitres 8, 9 et 10 : intérêts simples et composés, annuités ;
- Chapitres 11 et 12 : régression linéaire, probabilités ;
- Chapitres 13 et 14 : vecteurs, coordonnées polaires et rotations.

Tous les chapitres de l'ouvrage sont structurés de la même manière :

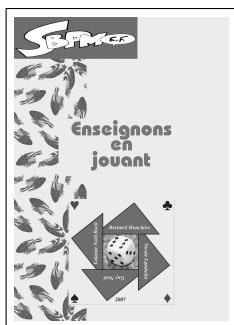
- Une introduction situe la notion étudiée soit dans l'histoire soit dans la vie courante ou professionnelle ;
- Une exploration permet d'aborder la nouvelle notion à partir de quelques problèmes pratiques ;
- Une synthèse permet de se débrouiller seul dans des cas analogues ;
- Des exercices « expliciter le savoir » permettent de fixer l'essentiel et d'appliquer directement ce qui précède ;
- Des exercices « appliquer une procédure » permettent d'acquérir des méthodes efficaces pour construire un tableau, interpréter un graphique, suivre une démarche, utiliser un logiciel ;
- Des problèmes apprennent à modéliser une situation et à interpréter le résultat ;
- Des exercices « pour aller plus loin » permettent d'aborder des problèmes plus complexes.

La présentation du livre est agréable et l'impression soignée bien qu'on puisse regretter qu'elle soit faite en seulement deux couleurs.

L'ouvrage a été réalisé selon les principes de la méthode d'apprentissage par résolution de problèmes. Les exemples, problèmes et exercices sont particulièrement bien choisis pour des élèves de l'enseignement technique de qualification. Le livre révèle de la part de ses auteurs une grande expérience de ce type d'enseignement et une compétence certaine pour aller à l'essentiel des notions étudiées. Le contenu mathématique est correct, clair et attrayant, il n'offre pas de digressions inutiles sur des cas pathogènes et est agréablement émaillé de conseils pertinents du genre « il ne faut pas confondre... ».

Les professeurs de l'enseignement technique, qui ne disposent pas d'une grande quantité de manuels, seront donc heureux de pouvoir disposer de cet ouvrage que nous leur recommandons.

Enseignons en jouant... Apprenons en jouant



Le travail réalisé par Bernard Honclaire, Nicole Lambelin, Guy et Yolande Noël, constitué d'un livre et d'un CD-Rom, a été présenté le 23 août 2007 au congrès de la SBPMef à Mons. Il concerne tous les niveaux de l'enseignement secondaire.

- Le **document écrit** est destiné aux enseignants. Chacune des soixante et une « fiches-prof » comprend un énoncé accompagné de commentaires, souvent à différents niveaux d'exploitation. L'index, rédigé en termes de matière, facilite la recherche de l'enseignant confronté à son programme. Chaque fiche donne une information en termes de compétences et de niveau(x) plus particulièrement visé(s).
- Le **CD-Rom** présente les mêmes énoncés que le document imprimé, avec la même numérotation, mais cette fois chaque énoncé est présenté sans aucune indication de solution, sans référence à une matière de cours, sans piste à suivre.

Deux versions du fichier d'énoncés figurent sur le CD-Rom.

1. Les fiches interactives sont conçues pour être exploitées avec un ordinateur et un projecteur.

Certaines d'entre elles présentent des icônes donnant accès à des logiciels tels que **Apprenti Géomètre**, **Cabri Géomètre II Plus**, **Excel** ou **Jeux2007**. Ces logiciels permettent de poursuivre l'exploitation de la fiche.

2. Les fiches à imprimer permettent l'impression et la photocopie.

Le **logiciel Jeux 2007** (qui est proposé en version Windows et en version Macintosh) permet de varier à l'infini les situations à exploiter

- soit en mode aléatoire
- soit en mode dirigé. (Dans ce cas, le mode Création aura été préalablement exploité par l'enseignant pour créer les fichiers à exploiter.)
- les énoncés de jeux peuvent être imprimés directement mais également être exportés en fichier .eps ou .bmp.

Des **annexes** offrent des pages de puzzle à découper, des pages à treillis triangulaire, carré ou hexagonal, une liste de carrés parfaits, de nombres premiers, des bandes dessinées réalisées par Frédéric Pourbaix, etc.

Prix : 15 € pour les membres de la SBPMef, 20 € pour les non-membres.
Frais de port : 3,5 €.

Le coin du trésorier

R. Scrève

Tarifs (Janvier 2006)

Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent *Mathématique et Pédagogie*, *SBPM-Infor* et les deux *Math-Jeunes*.

- Belgique :
 - Cotisation ordinaire : 24 € ;
 - Cotisation multiannuelle (5 ans) : 110 € ;
 - Cotisation familiale (réservée aux couples cohabitant ; les intéressés ne reçoivent qu'un exemplaire des publications, mais sont membres à part entière et participent donc aux élections) : 30 € ;
 - Cotisation réduite (réservée aux étudiants et aux sans-emploi) : 15 € ;
- Europe : 65 € (non-PRIOR), 72 € (PRIOR) ;
- Autres pays : 70 € (non-PRIOR), 79 € (PRIOR).

Abonnement à *Mathématique et Pédagogie*

- Belgique : 30 € ;
- Europe : 50 € (non-PRIOR), 54 € (PRIOR) ;
- Autres pays : 53 € (non-PRIOR), 58 € (PRIOR).

Anciens numéros :

- < 2005 : 0,75 €/n° + frais d'expédition.
- ≥ 2005 : 2,50 €/n° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : Belgique : 1,80 €, Europe : 4,50 €, Autres pays : 6 €.

Abonnement à *Math-Jeunes* ou *Math-Jeunes Junior*

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, supérieur et inférieur respectivement, sont idéalement pris de manière groupée par l'intermédiaire d'un professeur.

- Abonnements groupés (au moins 5) :

◦ Abonnements groupés à une des revues (3 numéros)	Belgique : 4 € ;
◦ Abonnements groupés aux deux revues (6 numéros)	Belgique : 8 €.

- Abonnements individuels :
 - Abonnements à une des revues (3 numéros)
Belgique : 6 € ;
France : 8 € (à prendre par l'intermédiaire de l'APMEP) ;
Europe : 18 € (non-PRIOR), 20 € (PRIOR) ;
Autres pays : 19 € (non-PRIOR), 22 € (PRIOR).
 - Abonnements aux deux revues (6 numéros)
Belgique : 12 € ;
France : 16 € (à prendre par l'intermédiaire de l'APMEP) ;
Europe : 24 € (non-PRIOR), 26 € (PRIOR) ;
Autres pays : 25 € (non-PRIOR), 28 € (PRIOR).

Anciens numéros :

- $\leq 2003-2004$: 0,25 €/n° + frais d'expédition.
- $\geq 2004-2005$: 0,50 €/n° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : Belgique : 1,50 €, Europe : 2,50 €, autres pays : 3 €.

Bulletin de l'APMEP

Les membres de la SBPMef peuvent, par versement à son compte, devenir membres de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (France). Le prix de l'abonnement est de 50 €. Ils recevront le *Bulletin* de l'APMEP, le BGV (*Bulletin à Grande Vitesse*) et *PLOT*.

Les membres de la SBPMef peuvent aussi commander par celle-ci les publications de l'APMEP ; ils bénéficient du prix « adhérents ».

Autres publications (brochures et CD-ROM)

Les prix indiqués sont les prix des publications ; les frais d'expédition (port et emballage) sont en sus. Les prix réduits sont réservés aux membres de la SBPMef ou de sociétés associées (comme l'APMEP) et aux étudiants. N'hésitez pas à consulter notre secrétariat ou à visiter notre site Internet.

Pour toutes nos publications non périodiques, à partir du dixième exemplaire, toute la commande bénéficie d'une réduction de 10 %.

Modalités de paiement :

Pour effectuer une commande, versez le montant indiqué sur un des comptes suivants :

- **Si vous habitez en Belgique** : Compte 000-0728014-29 de SBPMef.
- **Si vous habitez en France** : Compte CCP Lille 10 036 48 S de SBPMef.
- **Si vous habitez ailleurs** : Virement international sur l'un de nos deux comptes avec les références internationales suivantes :
CCP BELGIQUE : IBAN BE26 0000 7280 1429 / BIC BPOTBEB1
ou CCP LILLE :
IBAN FR68 2004 1010 0510 0364 8S02 683 / BIC PSSTFRPPLIL

	Prix plein	Prix réduit	Frais d'expédition
Séries RÉNOVER			
Série 1 (n° 12)	1 €	—	T ₁
Série 2 (n° 7–11 & 13)	5 €	—	T ₂
Série 3 (n° 14)	5 €	—	T ₂
Les 3 séries	7,50 €	—	T ₂
Dossiers d'exploration didactique			
Dossier 2 : <i>Autour du PGCD</i>	1,80 €	1,20 €	T ₁
Dossier 3 : <i>Isomorphisme et Dimension</i>	1,80 €	1,20 €	T ₁
Dossier 6 : <i>Statistique</i>	7,40 €	6 €	T ₁ ⁽¹⁾
Dossier 7 : <i>Vers les infiniment petits</i> (Simone TROMPLER et Guy NOËL)	6 €	—	T ₁
Dossier 8 : <i>La démonstration en géométrie plane dans les premières années l'enseignement secondaire</i> (Claude VILLERS et al.)	9 €	—	T ₂ ⁽²⁾
Dossier 9 : <i>Des démonstrations à la rencontre des compétences à travers de thèmes</i> (Claude VILLERS et al.)	9 €	—	T ₂ ⁽²⁾
Dossier 10 : <i>Narrations de recherche — De la théorie à la pratique dans les enseignements secondaire et supérieur</i> (Jacques BAIR, Jean-Claude DELAGARDELLE, Valérie HENRY)	6 €	—	T ₁
Jacques BAIR, <i>Mathématique et Sport</i>	5 €	3,70 €	T ₁
François JONGMANS, <i>Eugène Catalan, Géomètre sans patrie, ...</i>	12 €	9,50 €	T ₂
G. ROBERT, CD-ROM, logiciels mathématiques	5 €	—	T ₁
Recueils de questions des OMB			
Tome 5	6 €	—	T ₁ ⁽¹⁾
Tome 6	6 €	—	T ₁ ⁽¹⁾
Tomes 5 & 6 ensemble	10 €	—	T ₁ ⁽¹⁾

⁽¹⁾ 2–3 ex. : T₂; 4–6 ex. : T₃; 7–12 ex. : T₄; au-delà : consulter le secrétariat.
⁽²⁾ 2 ex. : T₃; 3–4 ex. : T₄; au-delà : consulter le secrétariat.

Frais d'expédition (non-PRIOR)			
	Belgique	Europe	Autres pays
Tarif 1	1,80 €	4,50 €	6 €
Tarif 2	3,50 €	8,50 €	12 €
Tarif 3	5 €		
Tarif 4	7 €		

Pour les expéditions PRIOR :
consulter le secrétariat.

Pour la définition d'« Europe »,
voir les tarifs postaux.

Pour tout problème,
consulter le secrétariat.