Photo de couverture : *Conchospirales (Copenhague, ancienne Bourse)* ; septembre 2007 — Photo Quentin Dupont

Mathématique et Pédagogie

Sommaire

Articles

Rubriques

N° 164 Novembre – Décembre 2007

NOTE

- Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse : Pascal Dupont, Rue du Stampia 77, B - 1390 Grez-Doiceau. Courriel : `pascal.dupont@ulg.ac.be`
- Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique *stricto sensu*, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques, &c.
- Les auteurs sont responsables des idées qu'ils expriment. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.
- Les auteurs sont invités à envoyer leurs articles encodés sur un CD-rom ou par courrier électronique. L'usage de LaTeX est vivement recommandé ; d'autres traitements de texte ne devraient être utilisés que pour des textes ne comportant pas de formules ; dans ce cas, le format « texte seul » est finalement encore préférable. À défaut, les textes seront dactylographiés. *Les textes devant être réencodés, en tout ou en partie, risquent de voir leur délai de parution allongé de manière appréciable.*
- Si l'article en contient, la qualité des figures est extrêmement importante. Elles devraient être réalisées selon l'une des modalités suivantes, dans l'ordre des préférences décroissantes : l'usage, dans le texte, de l'environnement « tikzpicture » (défini dans le paquet « tikz ») ; l'inclusion de fichiers externes, au format PDF ou JPEG (éviter les compressions trop importantes) : le PostScript devra être converti ; dans le cas d'un article envoyé sur papier, des documents de bonne qualité et prêts à être scannés.
- L'auteur mentionnera dans l'article ses prénom, nom et adresse (personnelle ou professionnelle) ainsi que l'institution où il travaille et, éventuellement, une liste de mots clés (10 maximum).
- La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous.
  Pour les livres :
  Dieudonné J., *Foundations of Modern Analysis*, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pp.
  Pour les articles :
  Gribaumont A., Les structures de programmation, *Mathématique & Pédagogie*, **36** (1982), 53–56.
- Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée ; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour ce faire.
- MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

Éditeur responsable : Pascal Dupont, Rue du Stampia 77, 1390 Grez-Doiceau.
Publié avec l'appui de l'Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Service général du Pilotage du système éducatif.

Bon voyage avec les maths

ANTOINE GAGGERO
Haute École Pédagogique
Berne - Jura - Neuchâtel

1. Introduction

Comment j'ai découvert la nouvelle des « Sept messagers »

Dino Buzzati est un grand écrivain italien du siècle passé. Il est né en 1906 et décédé en 1972. Il fit des études d'avocat puis s'engagea comme journaliste au *Corriere della Sera*, profession qu'il exerça jusqu'à sa mort. Il publia de nombreuses nouvelles et ouvrages dont le célèbre *K*, ou encore *Le Désert des Tartares*, que tous les lycéens ont lu.

J'ai bien lu quelques œuvres de Buzzati, mais pas *Les sept messagers*. C'est une nouvelle de quatre pages qui n'a pas la même aura que le *K* auprès du public. En octobre 2006, lorsque je me suis rendu à Parme, pour participer aux rencontres internationales du Rallye Mathématique Transalpin, j'ai fait connaissance avec cette nouvelle d'une manière inattendue. À cette occasion, des étudiants d'une classe de Parme ont raconté et mimé cette nouvelle de Buzzati en mettant en évidence certains aspects mathématiques. Je me suis renseigné auprès de mes collègues italiens qui m'ont signalé la récente parution d'un recueil de récits mathématiques, *Racconti Matematici*, sous la direction de Claudio Bartocci, Einaudi Editore, 2006, dont cette nouvelle de Buzzati fait partie. Outre Buzzati, on trouve dans ce livre un ensemble d'écrivains connus, dont le seul point commun est celui d'avoir écrit une histoire dans laquelle les mathématiques occupent une place importante.

Adresse de l'auteur : HEP BEJUNE, site de Bienne, Ciblerie 45, CH - 2503 Bienne ; courriel : `Antoine.Gaggero@hep-bejune.ch`.
Ce texte a précédemment été publié dans *Enjeux pédagogiques*, que nous remercions de nous avoir autorisés à le reproduire.

Je citerais à titre d'exemple, Isaac Asimov, avec sa nouvelle *Sept fois neuf*, écrite en anglais que l'on trouve traduite en français et en italien dans ce recueil. De retour chez moi, j'ai lu *Les Sept Messagers*, récit que Buzzati avait écrit en 1942, période pendant laquelle il était correspondant de guerre au *Corriere della Sera*.

Lecture mathématique du texte

La nouvelle de Buzzati se trouve en annexe à la fin de ce texte en traduction française. Je vous invite à vous plonger dans ce parcours littéraire mathématique *via* la langue originale italienne, si vous pouvez vous la procurer, ou sa traduction. Je vous invite en outre, tout comme moi, à vous prendre au jeu de suivre ce Prince parti dans une quête personnelle sans fin et de vérifier toutes ses affirmations mathématiques.

Pour vous aider dans votre lecture et suivi mathématique, j'ai numéroté uniquement les paragraphes qui me semblaient significatifs, car contenant des affirmations du Prince en lien avec les mathématiques. Pour les lecteurs rapides ou peu familiers avec le monde mathématique, j'ai prévu, dans la partie qui suit mon introduction, quelques explications qui vous donneront une idée du contenu de cette nouvelle. Dans cette partie que j'ai intitulée « Les affirmations du Prince », j'ai aussi réalisé une simulation de ce voyage en supposant que le Prince s'est mis en route le premier janvier 1970. Pour les lecteurs enseignants, c'est peut-être l'idée d'une collaboration entre les disciplines du français et des mathématiques et qui sait, de l'italien, si cela s'enseigne encore.

Voilà, si le cœur vous en dit, lisez un auteur à la pensée profonde, relevez les défis mathématiques liés à ce texte, et découvrez d'autres relations que celles décrites ici. Bonne lecture.

2. Les affirmations du Prince

2.1. Analyse mathématique des paragraphes 4, 5 & 6

Dans cette partie, nous prenons en compte les affirmations du Prince concernant l'organisation de ses déplacements, ce qui nous permettra de trouver les fonctions exprimant le déplacement du Prince et de ses messagers en fonction du nombre de jours de voyage :

– Le Prince exprime les distances en lieues, car en 1942, date de la parution de cette nouvelle, le Système International des Unités n'est pas systématiquement employé.
– Le Prince se déplace à raison de 40 lieues par jour.
– Le Prince et les messagers s'arrêtent tous les soirs.
– Le Prince et les messagers ne voyagent pas la nuit.
– Les messagers se déplacent à raison de 60 lieues par jour.
– Le Prince et les messagers ne prennent jamais de jours de repos.

En intégrant les éléments ci-dessus ainsi que les hypothèses de régularité, nous pouvons formuler les fonctions qui expriment le déplacement des différents personnages que sont le Prince et les messagers :

Nombre de jours de voyage	Progression du Prince en lieues	Progression du 1er messager en lieues	Progression du 2e messager en lieues
1	40	0	0
2	80	0	0
3	120	60	0
4	160	120	60
5	200	180	120
6	240	240	180
7	280	300	240
8	320	360	300
...	...	...	...
x	$40x$	$60(x-2)$	$60(x-3)$

Ce qui donne les fonctions exprimant le chemin parcouru :
Prince : $x \mapsto 40x$, où x est le nombre de jours de voyage ;
Messager partant après d jours de voyage du Prince : $x \mapsto 60(x-d)$.

2.2. Analyse mathématique des paragraphes 5, 6 & 7

Les affirmations des paragraphes 5, 6 et 7 amènent le Prince à conclure dans le paragraphe 7 : « Je compris vite qu'il suffisait de multiplier par cinq les jours passés jusque-là pour connaître la date du retour de chaque messager ».

En utilisant les fonctions de déplacement trouvées ci-dessus, nous calculons la date de retour des messagers selon les indications du texte. Le messager part le matin du d^{e} jour du voyage, se rend à la capitale et rejoint le Prince qui continue son chemin. Le jour où le Prince et son messager se rencontrent est le soir du a^{e} jour du voyage. Le raisonnement ci-dessous permet de trouver a :

Parcours du messager, du d^{e} jour jusqu'au jour a où il rejoindra le Prince	$=$	Parcours du Prince, du premier jour au jour a	$+$	Retour du messager vers la ville à partir du jour d.

Exprimons cette condition par une équation :

$$\begin{aligned} 60(a-d) &= 40a + 40d \\ 6(a-d) &= 4a + 4d \\ a &= 5d. \end{aligned}$$

Donc, le jour d'arrivée a du messager est le quintuple du jour de départ d. Remarquons que ces deux nombres a et d sont toujours calculés en fonction du premier jour de l'expédition. On retrouve bien l'affirmation du Prince donnée dans le paragraphe 7. Par exemple, le premier messager, Alexandre, parti au soir du deuxième jour, reviendra au dixième. Il aura alors parcouru 480 lieues, soit 8×60. Ce qui correspond exactement à la somme des deux distances qu'il a à parcourir : 80 lieues pour retourner à la ville et 400 lieues, 10×40, pour rejoindre le Prince.

2.3. Analyse mathématique des paragraphes 8 & 9

Dans ces deux paragraphes, le Prince parle de l'espacement des retours des messagers en fonction de son éloignement progressif de la capitale. Avec les fonctions de déplacement des différents personnages, nous pouvons vérifier et quantifier ces assertions. Commençons avec le messager Alexandre :

Le messager Alexandre

Ce messager est le premier à partir en direction de la ville, dès l'aube du troisième jour, soit après que le Prince ait fait $d = 2$ jours de trajet, puis reviendra le soir du $a = 10^{\text{e}}$ jour de trajet du Prince, et ainsi de suite. Ce qui donne le tableau :

Numéro du trajet d'Alexandre	1	2	3	4	5	6
Durée du trajet en jours	2	10	50	250	1250	6250

L'analyse de ce tableau montre que le jour a du retour est fonction du premier jour de départ d et du numéro du trajet. Ainsi le jour du retour a d'Alexandre est donné par la fonction

$$(2, n) \mapsto a = 2 \cdot 5^{n-1}.$$

Pour les autres messagers

Les premiers départs des messagers s'échelonnent entre la fin du deuxième jour et la fin du huitième jour. Soit d la variable entière qui prend successivement les valeurs 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Nous exprimons le jour du retour a d'un messager par la fonction :

$$(d, n) \mapsto a = d \cdot 5^{n-1},$$

où $2 \leqslant d \leqslant 8$. Cette relation vient compléter celle du point 2. Nous établissons ici une relation indépendante du jour du départ. On observe en effet que le jour du retour du messager est uniquement fonction du tout premier jour de départ d et du numéro du trajet, n.

Pour Dominique

Dominique est un personnage clé dans ce récit, c'est pourquoi on donne plus précisément sa fonction, sachant qu'il part à la fin du cinquième jour :

$$(5, n) \mapsto a = 5 \cdot 5^{n-1} = 5^n.$$

Pour les espacements des retours

En utilisant ces fonctions, nous pouvons vérifier que l'espacement des messagers augmente effectivement avec l'éloignement du Prince à la capitale et selon ses prévisions faites au paragraphe 9. Pour les résultats détaillés, on pourra consulter la dernière colonne du tableau 1. On y observera que la durée des espacements des retours des messagers est fonction du numéro du trajet, plus précisément $5(n-1)$.

2.4. Analyse mathématique des paragraphes 10, 11 & 12

Toutes les données sont maintenant réunies pour comprendre la décision du Prince : « Il repartira pour la dernière fois... je ne pourrai revoir Dominique que dans trente-quatre ans. » En effet, lorsque Dominique revient de son cinquième voyage, le Prince a 38 ans. Il sera de retour de son sixième voyage dans 34 ans, soit quand le Prince aura 72 ans. Plus loin dans le texte, le Prince s'interroge à propos d'Émile. En effet, si Émile repartait pour son sixième voyage, il serait de retour pour les 81 ans du Prince. Le Prince décide donc de ne pas le laisser repartir vers sa capitale, car dit-il, « je serai probablement déjà mort. » Le tableau 1 permet de vérifier toutes ces affirmations.

2.5. Situation de ce récit à l'aide du paragraphe 2

Dans ce paragraphe, le Prince donne une indication quant à la durée du voyage au moment où il s'exprime dans ce récit, « ... plus de huit ans se sont écoulés, exactement huit ans six mois et quinze jours... ». Nous pouvons convertir cette affirmation en jours, en prenant 8 années de 365 jours, 4 mois de 31 jours, 2 mois de 30 jours et 3 années bissextiles, donc $2920 + 180 + 15 + 3 + 4 = 3122$ jours. En consultant le tableau 1, nous constatons que ce récit se situe 3 jours avant le retour de Dominique.

2.6. Simulation de tous ces évènements

Ce récit a été écrit par Buzzati en 1942. Pour donner une dimension réaliste et actuelle à cette nouvelle, j'ai replacé tous les évènements qu'elle décrit en supposant le départ du Prince le 1er janvier 1970. Les résultats sont consignés dans le tableau 2.

Nb de trajets	Âge du Prince en années	Durées des trajets en jours							Écart entre les arrivées
		Alexandre	Barthélémy	Caius	Dominique	Émile	Frédéric	Grégoire	
1	30	2	3	4	5	6	7	8	
2		10	15	20	25	30	35	40	5
3		50	75	100	125	150	175	200	25
	30,5	250							
	31		375						
	31,5			500					
4	32				625				125
	32					750			
	32,5						875		
	33							1000	
	33,5	1250							
	35		1875						
	37			2500					
5	38				3125				625
	40					3750			
	42						4375		
	43,5							5000	
	47	6250							
	55,5		9375						
	64			12 500					
6	72				15 625				3125
	81					18 750			
	90						21 875		
	98							25 000	
d		$2 \cdot 5^{d-1}$	$3 \cdot 5^{d-1}$	$4 \cdot 5^{d-1}$	$5 \cdot 5^{d-1}$	$6 \cdot 5^{d-1}$	$7 \cdot 5^{d-1}$	$8 \cdot 5^{d-1}$	5^{d-1}

Tab. 1 – Durées des trajets des messagers

Évènements	Dates	N° du jour	Âge du Prince
Naissance du Prince	01/01/1940		
Départ de l'expédition	01/01/1970		30 a
Départ 1 de A	03/01/1970	2	
Départ 1 de B	04/01/1970	3	
Départ 1 de C	05/01/1970	4	
Départ 1 de D	06/01/1970	5	
Départ 1 de E	07/01/1970	6	
Départ 1 de F	08/01/1970	7	
Départ 1 de G	09/01/1970	8	
Retour-Départ 2 de A	11/01/1970	10	
Retour-Départ 2 de B	16/01/1970	15	
Retour-Départ 2 de C	21/01/1970	20	
Retour-Départ 2 de D	26/01/1970	25	
Retour-Départ 2 de E	31/01/1970	30	30 a 1 m
Retour-Départ 2 de F	05/02/1970	35	
Retour-Départ 2 de G	10/02/1970	40	
Retour-Départ 3 de A	20/02/1970	50	
Retour-Départ 3 de B	17/03/1970	75	30 a 2 m
Retour-Départ 3 de C	11/04/1970	100	
Retour-Départ 3 de D	06/05/1970	125	30 a 4 m
Retour-Départ 3 de E	31/05/1970	150	30 a 5 m
Retour-Départ 3 de F	25/06/1970	175	30 a 6 m
Retour-Départ 3 de G	20/07/1970	200	30 a 7 m
Retour-Départ 4 de A	08/09/1970	250	30 a 9 m
Retour-Départ 4 de B	11/01/1971	375	31 a
Retour-Départ 4 de C	16/05/1971	500	31 a 5 m
Retour-Départ 4 de D	18/09/1971	625	31 a 9 m
Retour-Départ 4 de E	21/01/1972	750	32 a
Retour-Départ 4 de F	25/05/1972	875	32 a 5 m
Retour-Départ 4 de G	27/09/1972	1000	32 a 9 m

TAB. 2 – Simulation à partir de la date conventionnelle du 1$^{\text{er}}$ janvier 1940

Évènements	Dates	N° du jour	Âge du Prince
Retour-Départ 5 de A	04/06/1973	1250	33 a 6 m
Retour-Départ 5 de B	19/02/1975	1875	35 a 2 m
Retour-Départ 5 de C	05/11/1976	2500	37 a
Retour-Départ 5 de D	23/07/1978	3125	38 a 7 m
Retour-Départ 5 de E	08/04/1980	3750	40 a 4 m
Retour-Départ 5 de F	24/12/1981	4375	42 a
Retour-Départ 5 de G	10/09/1983	5000	43 a 9 m
Retour-Départ 6 de A	11/02/1987	6250	47 a 2 m
Retour-Départ 6 de B	02/09/1995	9375	55 a 9 m
Retour-Départ 6 de C	23/03/2004	12 500	64 a 3 m
Retour-Départ 6 de D	12/10/2012	15 625	73 a
Retour-Départ 6 de E	03/05/2021	18 750	81 a 5 m
Retour-Départ 6 de F	22/11/2029	21 875	90 a
Retour-Départ 6 de G	13/06/2038	25 000	98 a 6 m

TAB. 2 – (Suite)

3. Texte de la nouvelle

Tant l'auteur de l'article que la rédaction de la revue auraient aimé reproduire ici le texte original italien juxtaposé à sa traduction française. Malheureusement, l'éditeur italien détenteur des droits de reproduction, Mondadori, *n'a jamais daigné ne fût-ce qu'accuser réception de nos multiples demandes.*

Les sept messagers

1. Depuis que je suis parti explorer le royaume de mon père, je m'éloigne chaque jour davantage de la ville et les nouvelles qui me parviennent se font de plus en plus rares.

2. Quand j'ai entrepris ce voyage, j'avais à peine trente ans et plus de huit ans se sont écoulés, exactement huit ans six mois et quinze jours d'une route ininterrompue. Au moment du départ, je croyais pouvoir aisément parvenir en quelques semaines aux frontières du royaume, mais je n'ai fait que rencontrer toujours de nouvelles gens et de nouveaux villages et de

nouvelles provinces ; et partout des hommes parlant ma propre langue et se prétendant mes vassaux.

Il m'arrive parfois de penser que la boussole de mon géographe s'est affolée et que, tout en croyant aller toujours vers le sud, nous ne faisons que tourner autour de nous-mêmes, sans jamais parvenir à nous éloigner davantage de la capitale ; cela pourrait peut-être expliquer que nous ne pouvons atteindre les confins du royaume.

Mais je me sens plus souvent taraudé par l'idée que ces frontières n'existent pas, que le royaume s'étend sans aucune limite et que, malgré ce voyage incessant, jamais je n'en verrai la fin.

3. Je me suis mis en route à trente ans, trop tard peut-être. Mes amis, mes proches même, raillaient mon projet qu'ils jugeaient une perte inutile des meilleures années de la vie. En vérité quelques rares fidèles seulement consentirent à m'accompagner.

4. Malgré mon insouciance —une insouciance que je ne connais plus !— j'eus à cœur de prévoir le moyen de communiquer, pendant le voyage, avec ceux qui m'étaient chers et je choisis parmi les cavaliers de mon escorte les sept meilleurs, qui allaient devenir mes messagers. Dans mon ignorance, je croyais qu'en choisissant sept messagers j'exagérais un peu. Mais je m'aperçus, à mesure que le temps passait, que ce nombre était tout au contraire ridiculement faible. Aucun d'eux pourtant n'est jamais tombé malade, ni ne s'est fait prendre par les brigands, aucun n'a crevé sa monture. Ils m'ont servi tous les sept avec une ténacité, un dévouement que je parviendrai difficilement à jamais récompenser.

5. Afin de plus facilement les reconnaître je leur imposai de nouveaux noms dans l'ordre alphabétique : Alexandre, Barthélemy, Caius, Dominique, Émile, Frédéric et Grégoire. Comme j'étais peu habitué à m'éloigner de ma demeure, j'y envoyai le premier, Alexandre, dès le soir du deuxième jour de voyage, après avoir parcouru déjà près de quatre-vingts lieues. Le lendemain soir, afin d'assurer la permanence des communications, je déléguai le deuxième messager, puis le troisième, puis le quatrième, et ainsi de suite, jusqu'au huitième soir du voyage, celui où partit Grégoire. Le premier n'était pas encore de retour.

6. Il nous rejoignit le dixième jour dans une vallée déserte où nous préparions le camp pour y passer la nuit. Alexandre m'apprit qu'il avait dû aller moins vite que nous n'avions prévu : j'avais pensé que, puisqu'il serait seul et montant un remarquable coursier, il pourrait aller deux fois

plus vite que nous ; en fait, il n'avait pu franchir qu'une fois et demie la même distance ; en une journée, tandis que nous faisions quarante lieues, il en dévorait soixante. Mais pas plus.

7. Il en fut de même pour les autres. Barthélemy, parti en direction de la ville le troisième soir de notre voyage, nous rejoignit au bout d'une quinzaine ; Caius, parti le quatrième jour, fut seulement de retour le vingtième. Je compris vite qu'il suffisait de multiplier par cinq les jours passés jusque-là pour connaître la date du retour de chaque messager.

8. Comme nous nous éloignions toujours davantage de la capitale, le trajet de mes envoyés devenait chaque fois plus long. Après cinquante jours de route, l'intervalle entre l'arrivée d'un messager et celle du suivant était devenu sensiblement plus grand : alors qu'au début tous les cinq jours l'un d'eux rejoignait le camp, il fallait désormais attendre vingt-cinq jours ; le bruit de ma ville s'affaiblissait de cette sorte toujours davantage ; des semaines entières passaient sans qu'aucune nouvelle me parvînt.

9. Quand j'en fus au sixième mois de mon voyage —nous avions déjà franchi les monts Fasani— l'intervalle entre l'arrivée de chacun de mes messagers s'accrut à quatre bons mois. Désormais, ils ne m'apportaient que des nouvelles lointaines, ils me tendaient des lettres toutes chiffonnées, roussies par les nuits humides que le messager devait passer en dormant à même les prairies.

Nous marchions toujours. Je tentais en vain de me persuader que les nuages qui roulaient au-dessus de ma tête étaient encore ceux-là mêmes de mon enfance, que le ciel de la ville lointaine ne différait en rien de la coupole bleue qui me surplombait, que l'air était semblable et semblable le souffle du vent, et semblable le chant des oiseaux. Les nuages, le ciel, l'air, les vents, les oiseaux m'apparaissaient en réalité comme des choses nouvelles ; et je me sentais un étranger.

En avant, en avant ! Des vagabonds rencontrés sur les plaines me disaient que les frontières n'étaient plus loin. J'incitais mes hommes à continuer la route sans répit, faisant mourir sur leurs lèvres les mots désabusés qu'ils s'apprêtaient à dire. Quatre ans avaient passé ; quelle longue fatigue ! La capitale, ma demeure, mon père étaient curieusement éloignés, je n'y croyais même presque plus. Vingt bons mois de silence et de solitude séparaient désormais les retours successifs des messagers. Ils m'apportaient de curieuses missives jaunies par le temps, dans lesquelles je découvrais des noms oubliés, des tournures de phrases insolites, des sentiments que je ne parvenais pas à comprendre.

10. Et le lendemain matin, après une seule nuit de repos, tandis que nous reprenions notre route, le messager partait dans la direction opposée, portant vers la ville des lettres préparées par moi depuis longtemps.

Mais huit ans et demi ont passé. Ce soir je soupais seul sous ma tente quand est entré Dominique, qui parvenait encore à me sourire malgré cette fatigue qui le terrassait. Je ne l'avais pas revu depuis près de sept ans. Et pendant ces sept ans-là, il n'avait fait que courir, à travers les prairies, les forêts et les déserts, changeant Dieu sait combien de fois sa monture, pour m'apporter ce paquet d'enveloppes que je n'ai pas encore eu à cette heure l'envie d'ouvrir. Déjà il s'en est allé dormir, il repartira demain matin à l'aube.

Il repartira pour la dernière fois. J'ai calculé sur mon carnet que, si tout va bien, si je continue ma route comme je l'ai fait jusqu'ici et lui la sienne, je ne pourrai revoir Dominique que dans trente-quatre ans. J'en aurai alors soixante-douze. Mais je commence à ressentir ma lassitude et la mort probablement m'aura cueilli avant. Ainsi donc je ne pourrai jamais plus le revoir.

11. Dans trente-quatre ans (même avant, bien avant) Dominique découvrira soudain les feux de mon campement, et il se demandera comment il est possible qu'en un si long temps je n'aie pu faire que si peu de chemin. Le brave messager entrera sous ma tente, comme ce soir, tenant les lettres jaunies par les années, emplies de nouvelles absurdes d'un temps déjà révolu ; mais il s'arrêtera sur le seuil, en me voyant immobile, étendu sur ma couche, deux soldats à mes côtés portant des torches, mort.

12. Et pourtant va, Dominique, et ne m'accuse point de cruauté ! Porte mon dernier salut à cette ville où je suis né. Tu es le seul lien qui me reste avec un monde qui jadis était aussi le mien. Les plus récentes nouvelles m'ont appris que bien des choses ont changé, que mon père est mort, que la couronne est allée sur la tête de mon frère aîné, que l'on me croit perdu, qu'on a construit de grands palais de pierre là où naguère se trouvaient les chênes sous lesquels j'aimais m'en aller jouer.

Mais c'est pourtant toujours mon ancienne patrie. Dominique, tu es mon dernier lien avec eux. Le cinquième messager, Émile, qui me rejoindra si Dieu le veut dans un an et huit mois, ne pourra repartir : il n'aurait plus le temps de revenir. Après toi le silence, oh ! Dominique, à moins que je ne trouve enfin cette frontière tant attendue. Mais plus j'avance, plus je suis convaincu qu'il n'y a pas de frontière.

Je le soupçonne, il n'existe pas de frontière, du moins dans le sens que nous entendons habituellement. Il n'existe pas de murailles de séparation, ni de vallées profondes, ni de montagnes fermant la route. Je franchirai probablement les confins sans même m'en apercevoir, et continuerai dans mon ignorance à aller de l'avant.

Pour cela, j'entends que désormais Émile, et les autres après lui, quand ils me seront revenus, ne reprennent plus la route de ma capitale mais qu'ils partent de l'autre côté, qu'ils me précèdent afin que je puisse savoir à l'avance ce qui m'attend. Un trouble inconnu s'empare de moi le soir depuis quelque temps déjà et ce n'est plus le regret des joies que j'ai laissées, comme il advenait dans les débuts de mon voyage ; c'est plutôt l'impatience de connaître les terres inconnues vers lesquelles je me dirige.

Je remarque toujours davantage —et je ne l'ai confié à personne jusqu'ici— je remarque comment de jour en jour, à mesure que j'avance vers l'improbable fin de ce voyage, une lueur insolite brille dans le ciel, une lueur que je n'ai jamais vue, pas même en rêve ; et comment les ombres et les montagnes, les fleuves que nous traversons semblent devenir d'une essence toute diverse ; et l'air est tout chargé de présages d'un je-ne-sais-quoi.

Demain matin, une espérance nouvelle me portera encore plus avant, vers ces montagnes inexplorées que les ombres de la nuit cachent encore.

Une fois encore je lèverai mon camp, tandis que Dominique disparaîtra de l'autre côté de l'horizon, pour transmettre à la trop lointaine cité mon message inutile.

Enseignement de la Province de Hainaut
Région Mons-Borinage

Direction Générale Régionale Mons-Borinage
065/40.80.80

Haute Ecole Provinciale de Mons-Borinage-Centre Catégorie Economique à Mons (065/88.12.28)

Haute Ecole Provinciale de Mons-Borinage-Centre Catégorie Paramédicale à Mons (065/22.12.60)

Lycée Technique Provincial Richard Stiévenart à Hornu (065/61.39.40)

Lycée Provincial d'Enseignement Technique du Hainaut à Saint-Ghislain (065/71.42.11)

Institut d'Enseignement Secondaire Provincial à Mons (065/39.93.40)

Institut d'Enseignement Secondaire Paramédical Provincial à Mons (065/32.89.00)

Ecole Fondamentale Provincial Victor Mirguet à Mons (065/ 32.05.53)

Lycée Provincial Albert Libiez à Colfontaine (065/61.33.99)

Centre d'Education et de Formation en Alternance de l'Athénée Provincial Jean d'Avesnes à Mons (065/40.01.08)

Athénée Provincial Jean d'Avesnes à Mons (065/40.01.01)

Académie Provinciale des Métiers à Mons (065/39.89.79)

Haute Ecole Provinciale de Mons-Borinage-Centre Catégorie Pédagogique à Mons (065/32.04.90)

Haute Ecole Provinciale de Mons-Borinage-Centre Catégorie Artistique à Saint-Ghislain (065/71.42.11)

Institut Provincial d'Enseignement de Promotion sociale Mons-Formations à Mons (065/35.38.13)

Centre Provincial d'Enseignement de Promotion sociale du Borinage à Hornu (065/76.76.18)

Ecole Industrielle Supérieure Provinciale à Mons (065/39.89.39)

Cours des Métiers d'Arts du Hainaut (065/84.96.32)

Conseiller en informations scolaires à Mons (065/40.80.80)

Les représentations planes comme fil conducteur pour l'enseignement de la géométrie

GINETTE CUISINIER, CHRISTINE DOCQ, THÉRÈSE GILBERT, CHRISTIANE HAUCHART, NICOLAS ROUCHE, ROSANE TOSSUT
Groupe d'Enseignement Mathématique

RÉSUMÉ — D'une part, l'étude de la géométrie de l'espace s'appuie sur des représentations planes de solides, et d'autre part on ne réalise de telles représentations qu'en s'appuyant sur des notions de géométrie. Ainsi, ces représentations entretiennent avec la géométrie un lien substantiel et constant. Elles vont des dessins d'enfants à la perspective centrale, en passant par les projections orthogonales et parallèles, c'est-à-dire du dessin naïf vers des formes de projection de plus en plus évoluées et complexes. Pour ces diverses raisons, elles constituent un fil conducteur intéressant pour l'apprentissage de la géométrie. Dans cet atelier, nous illustrerons ce point de vue par quelques questions jalonnant l'enseignement de la prime enfance à l'âge adulte.

Introduction

Le présent article résulte d'un travail au Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM) de Louvain-la-Neuve. Ce groupe rassemble, entre

Adresse de l'auteur : Gem, Chemin du Cyclotron 2, 1348 Louvain-la-Neuve ; courriel : `hauchart@math.ucl.ac.be`.
Le présent article a fait l'objet d'un atelier au Colloque du CREM, Mons, 2005, et une partie a été publiée dans le Supplément spécial des Annales de didactique et de sciences cognitives, volume 11, Colloque de Mons 2005, IREM de STRASBOURG

15 et 30 fois par an, des enseignants de tous niveaux, de la maternelle à l'université, bénévoles, pour travailler des questions liées à l'enseignement des mathématiques. Il s'est attaché à l'idée que les représentations planes de solides constituent un contexte intéressant pour l'enseignement de la géométrie, d'un bout à l'autre de la scolarité.

Afin d'illustrer ce point de vue, nous avons sélectionné quelques activités de représentations planes d'objets de l'espace qui peuvent jalonner l'enseignement à différents âges de la scolarité.

Bien que l'on puisse imaginer représenter des objets aux formes les plus libres, notre présentation est globalement centrée sur des objets du plan ou de l'espace tels que des carrés, rectangles, assemblages et pavages de carrés, parallélipipèdes, cubes et assemblages de cubes, ...

Certaines activités ont été vécues en classe, d'autres ne sont que des propositions d'activités, qui doivent encore être expérimentées. En ce sens, la présente contribution est davantage un témoignage qu'un ensemble de résultats définitifs.

Les auteurs remercient les membres du GEM qui ont pris part à cette réflexion ainsi que ceux qui ont expérimenté des activités dans leurs classes : Micheline Citta, Lucie De Laet, Martine de Terwangne, Alain Desmaret, John Dossin, Stéphane Lambert, Sophie Loriaux, Monique Meuret, Bruno Taquet, Jean-Pascal Bodart.

1. Dessin d'enfants

La réflexion menée au GEM à propos de dessins d'enfants a permis de mieux cerner quelles compétences sont mobilisées, et quelles difficultés sont rencontrées par les enfants dans certaines activités de dessin. Ces activités ont été réalisées dans plusieurs classes de divers niveaux : troisième maternelle, première, troisième et cinquième primaires (enfants âgés d'environ 5, 6, 8 et 10 ans).

1.1. Dessiner une table

Dans toutes les classes, on a donné la consigne : « Dessine une table avec une assiette ». Dès que les réalisations ont été rassemblées, une question de méthode s'est imposée : comment rendre compte des dessins d'enfants ?

Notre premier réflexe a été de repérer ceux qui correspondaient à ce que nous aurions nous-même dessiné, en fait en perspective cavalière. Mais nous avons découvert des dessins très différents, manifestant des connaissances, une réflexion et une cohérence qu'il nous fallait tenter d'analyser. Nous proposons ci-après trois compétences qui peuvent servir à rendre compte des résultats : conceptualiser un objet, choisir un point de vue et respecter un code.

Conceptualiser l'objet. Dessiner une table quand on n'en a pas sous les yeux, c'est dessiner un concept. Il est encore différent de dessiner une table que l'on voit, ou de dessiner une table donnée d'un point de vue donné. Remarquons que, dans tous les cas, le dessinateur est obligé de conceptualiser pour dessiner.

Qu'est-ce qu'un concept de table ? C'est un concept qui intègre et schématise dans l'esprit de chacun toutes les tables qu'il a vues, de tous les points de vue possibles et avec tous les usages. Il en résulte l'idée de *quelques parties possédant chacune une forme définie et articulées les unes aux autres d'une certaine façon.* Dans chaque dessin, on trouve quelques--unes des propriétés suivantes (mais jamais toutes...) :

– Une table possède un plateau, souvent rectangulaire ;
– Ce plateau est horizontal ;
– Une table a en général quatre pieds ;
– Ces pieds sont articulés aux quatre coins du plateau ;
– Ils sont verticaux, parallèles entre eux et perpendiculaires au plateau ;
– Ils sont de même longueur ;
– Ils sont orientés vers le bas à partir du plateau ;
– Et ils descendent jusqu'au même niveau, celui du sol.

Les figures ci-dessous montrent quelques dessins typiques. La figure 1 montre un plateau rectangulaire avec quatre pieds articulés aux quatre coins du plateau et à peu près d'égales longueurs. Les pieds sont perpendiculaires à un bord du plateau.

À la figure 2 par contre, les quatre pieds sont orientés vers le bas ; montrer les quatre pieds ne permet pas de les dessiner parallèles.

La figure 3 montre un plateau rectangulaire avec quatre pieds verticaux, orientés vers le bas et descendant jusqu'à un même niveau ; ces choix empêchent d'articuler les pieds aux quatre coins.

On le voit, le fait de passer de trois à deux dimensions oblige à ne conserver qu'une partie des propriétés, et l'on imagine bien que le choix est parfois difficile.

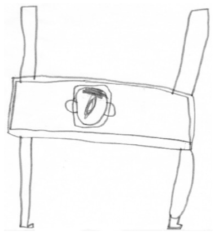


FIG. 1 – Quentin, 1e primaire

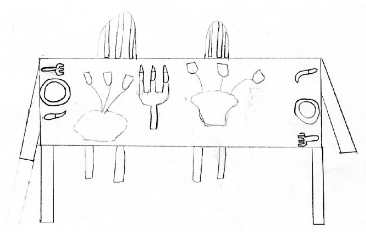


FIG. 2 – Joana, 5e primaire

La figure 4 montre que certains enfants parviennent à respecter à peu près toutes les propiétés, grâce au choix de dessiner un plateau transparent !

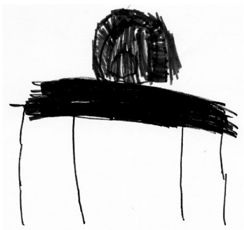


FIG. 3 – Nicolas, 3e maternelle

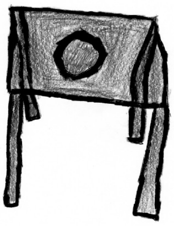


FIG. 4 – Julien, 5e primaire

Nous pointons ainsi un premier intérêt pédagogique du dessin, ainsi qu'une première difficulté. *Proposer une telle activité à un enfant l'amène à conceptualiser, mais le met aussi devant un choix difficile : quelles propriétés conserver ?*

Choisir un point de vue. Dessiner implique généralement de choisir un point de vue. Mais choisir un point de vue, c'est souvent être contraint de déformer la réalité, ici de faire fi de certaines caractéristiques d'une table et de ne pas tout dessiner.

De nombreux dessins d'enfants montrent un tel choix. Ainsi, à la figure 5, la table est vue de bout, ce qui implique que les pieds de derrière sont cachés. À la figure 6, la vue de bout pour le plateau est combinée à un effet de perspective pour les pieds (les pieds de derrière sont dessinés plus courts que ceux de devant). Enfin la figure 7 montre la table vue du dessus, ce qui ne montre pas grand chose de ses pieds...

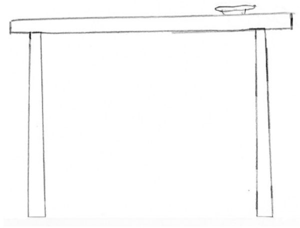


FIG. 5 – Céline, 3e primaire

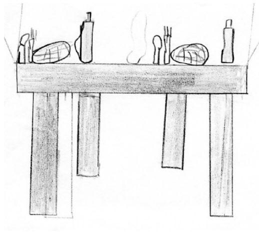


FIG. 6 – Wacil, 5e primaire

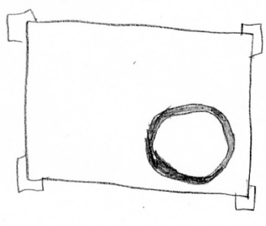


FIG. 7 – Joshua, 5e primaire

D'autres dessins encore s'apparentent plutôt à une vue de la table en perspective à point de fuite, pour le plateau seulement ou pour l'ensemble de la table...

Une deuxième difficulté du dessin est donc de choisir un point de vue et de renoncer à certaines propriétés de l'objet.

Respecter un code. Des dessins d'enfants révèlent déjà le respect de certaines règles de représentation. Certains élèves dessinent spontanément et sans défaut en perspective cavalière (figure 8). D'autres le font approximativement (figure 9).

Mais cela suffit à montrer que la perspective cavalière est dans l'air : ces élèves l'ont déjà rencontrée et tentent de s'y conformer. Le code qu'ils s'imposent consiste en deux règles au plus :

- Respecter le parallélisme,
- Respecter l'égalité des longueurs de segments parallèles, éventuellement alignés.

Respecter ce code demande de repérer les parallélismes utiles, de repérer les égalités de longueurs utiles, de choisir un point de vue, de réaliser qu'il

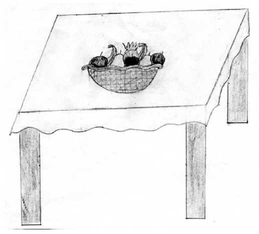


FIG. 8 – Lætitia, 5e primaire

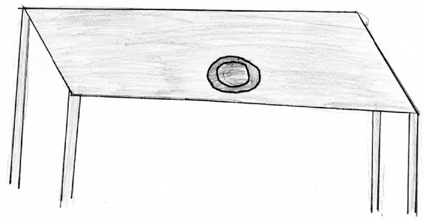


FIG. 9 – Valérie, 5e primaire

ne faut pas respecter plus de propriétés que nécessaire. Par exemple, les angles droits ne doivent généralement pas être dessinés droits.

Ainsi, respecter un code implique de repérer certaines propriétés de l'objet et c'est là aussi un intérêt pédagogique du dessin.

Qui plus est, il faut s'en tenir à un code et un point de vue, et ne pas en changer en cours de route. Certains dessins mélangent perspective cavalière et perpective à point de fuite, ou montrent un changement de point de vue entre le plateau et les pieds.

Un dessinateur entraîné s'aide de la perception de la forme globale qu'il a de l'objet. Dans le cas de la table rectangulaire, l'enveloppe de l'objet est en gros un parallélipipède rectangle. Sachant cela, on comprend que, le plateau étant dessiné en forme de parallélogramme, les bases des quatre pieds occupent aussi sur le dessin les sommets d'un parallélogramme (non dessiné), isométrique au premier et situé sous lui. Pour se rendre compte de cela, il suffit d'imaginer une corde entourant les quatre pieds à la base. La figure 10 montre un dessin où cette exigence de concevoir deux parallélogrammes translatés l'un de l'autre n'est pas respectée. Sans doute le besoin de dessiner quatre pieds est-il plus fort que celui de respecter les longueurs ou le parallélisme.

1.2. Achever le dessin d'une table

Dans une classe de cinquième primaire (11 ans), l'institutrice a poursuivi l'expérience en imposant implicitement un point de vue et un code. Elle a distribué aux enfants un dessin de table inachevé (figure 11) : un plateau de table rectangulaire dessiné en perspective cavalière sur du papier quadrillé. Au bas de ce dessin figure la consigne « Dessine les quatre pieds de la table ».

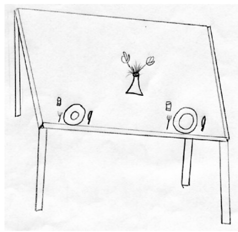


FIG. 10 – Selim, 5^e primaire

Le quadrillage joue un rôle d'incitant et de guide pour compléter le dessin selon le code de la perspective cavalière. En perspective cavalière, les propriétés suivantes doivent être respectées :

- Raccord du haut des pieds aux quatre coins du plateau,
- Alignement de certains segments en position frontale, comme AB et CD sur la figure 12, et parallélisme de ces segments au bord frontal HI de la table,
- Alignement des dessins de certains segments en position latérale, comme EF et GA sur la figure 12, et parallélisme de ces segments au bord latéral JH de la table,
- Égalité des longueurs des pieds.

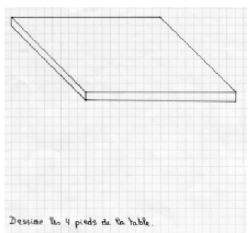


FIG. 11 –

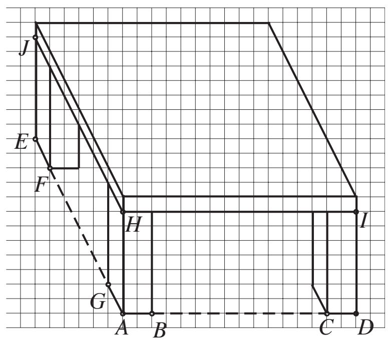


FIG. 12 –

Avec cette consigne, nous voulions voir, d'une part dans quelle mesure les élèves connaissent et respectent ce code, et d'autre part quelles propriétés de l'objet ils respectent. Rappelons que ces élèves n'ont reçu aucune instruction particulière sur les représentations planes d'objets de l'espace.

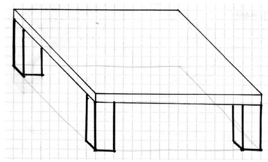


FIG. 13 – Billy, 5e primaire

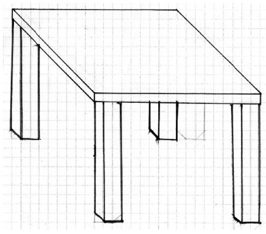


FIG. 14 – Duygu, 5e primaire

Un seul dessin sur seize a été réalisé selon les règles, et c'est le seul comportant un pied caché (figure 13). Qu'ont fait les enfants et que repère-t-on comme types d'erreurs ? Ils sont généralement partis des coins du plateau pour tenter d'y raccorder les quatre pieds. Quant aux erreurs, elles correspondent selon les cas à des problèmes de raccord de certains pieds au plateau, à des problèmes de longueur de pieds (11 élèves sur 16 n'ont pas respecté l'égalité des longueurs des pieds), ou encore de perte de l'alignement de segments disposés en position frontale ou en position latérale.

En ce qui concerne les alignements mentionnés ci-dessus, notons que la plupart des enfants ont respecté l'alignement des segments en position frontale (13 dessins sur 16) et pas l'alignement en position latérale (12 sur 16).

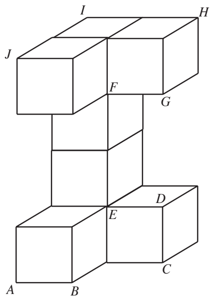
On trouve, à la figure 14, un problème de raccord du pied avant gauche au plateau. Et comme l'enfant s'est arrangé pour que les pieds au sol s'inscrivent dans un parallélogramme parallèle au plateau, ce problème se répercute en un problème de longueurs des pieds et un problème de raccord du pied arrière droit au plateau...

2. Vues coordonnées d'un objet appelé « module de paix »

Dans l'activité de représentation de tables, les enfants dessinent spontanément. On pourrait dire que les projections y sont implicitement présentes au sens où cette activité est en attente d'une théorisation qui s'appuie sur les projections. Mais les enfants n'y voient pas des projections, ils ignorent d'ailleurs ce que c'est : ils voient des tables, perçoivent sans doute un code.

Dans la deuxième activité que nous décrivons maintenant et qui s'adresse à des élèves du début du secondaire, le lecteur reconnaîtra les projections orthogonales, bien qu'elles ne sont pas abordées comme des transformations. Elles sont ici abordées de manière informelle et sont appelées *vues*.

1. Vous recevez un module de paix. Posez-le sur une table en l'orientant comme suggéré sur la figure ci-contre et représentez-le au moyen des trois vues orthogonales coordonnées : de haut, de face et de gauche.
2. Sur la figure ci-contre, certains sommets du module de paix sont désignés par les lettres A, B, C, D, E, F, G, H, I et J. Indiquez ces sommets sur chacune des vues de face, de gauche et de haut que vous avez réalisées en 1.



a) Sachant que la distance entre A et B vaut 1, quelles sont dans la réalité les distances suivantes : $d(C, D)$, $d(E, D)$, $d(E, F)$, $d(E, G)$, $d(F, G)$, $d(B, C)$, $d(G, H)$, $d(I, H)$, $d(I, J)$?
b) Retrouvez-vous ces distances en les mesurant sur les vues de haut, de face et de gauche ?

Avec cette activité, les élèves peuvent prendre conscience de l'intérêt du mode de représentation en trois vues coordonnées. Il fournit (figure 15) un dessin en vraie grandeur de parties bien disposées de l'objet : la face du dessus sur la vue de haut, celle de gauche sur la vue de gauche et celle de face sur la vue de face. Il est fréquemment utilisé dans la vie quotidienne, par exemple dans des domaines techniques. Il se réfère aux directions privilégiées que sont la verticale et l'horizontale. On peut le voir comme une première étape vers les projections parallèles. Une difficulté pour décoder ce mode de représentation tient à ce qu'il faut coordonner les trois vues.

Les enfants sont aussi amenés à réaliser que la représentation sur une des vues coordonnées fait perdre de l'information par rapport à la réalité : ainsi par exemple, un unique et même point représente sur la vue de face, les deux sommets distincts I et J de la réalité. Enfin, ils réalisent aussi que si dans certains cas (pour des parties privilégiées de l'objet), ce mode de représentation fournit une image en vraie grandeur, dans les autres cas, il raccourcit ou annule les distances. Ainsi par exemple,

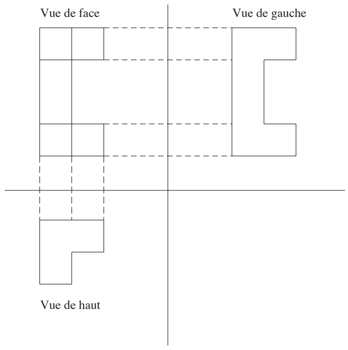


FIG. 15 –

- La distance entre A et B, qui vaut 1 dans la réalité, est conservée sur la vue de haut et sur celle de face et vaut 0 sur la vue de gauche ;
- La distance entre B et C, qui vaut $\sqrt{2}$ dans dans la réalité, est conservée sur la vue de haut et est réduite à 1 sur les vues de face et de gauche.

Enfin, la question relative aux distances sollicite des connaissances de géométrie plane, comme le théorème de Pythagore.

Notons au passage que la lecture de la question 1 passe par celle d'un dessin du module en perspective cavalière : même si la plupart des élèves n'en connaissent pas encore les règles, décoder un tel dessin ne leur pose pas de problème.

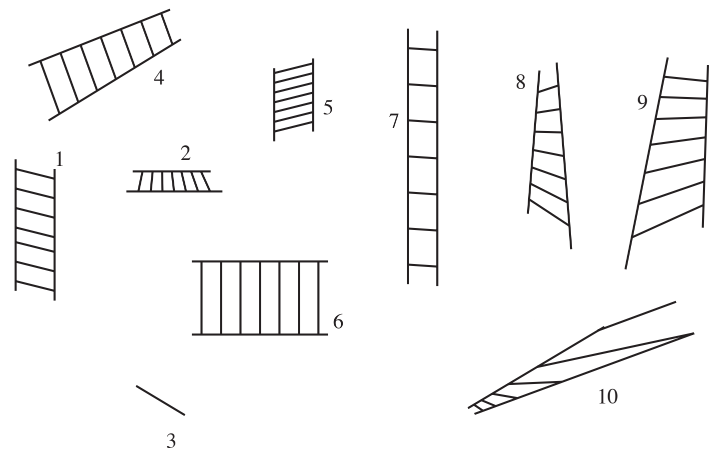
3. Ombres, au soleil et à la lampe, d'échelles et de quadrillages

Pour permettre à des élèves du début du secondaire de prendre conscience des différences entre perspective cavalière et perspective à point de fuite, nous leur proposons dans un premier temps d'observer des ombres pour qu'ils puissent acquérir un support intuitif aux propriétés géométriques sous-jacentes.

Les objets que nous proposons sont des objets plans (échelles miniatures à montants parallèles et quadrillages) qui faciliteront la découverte des invariants fondamentaux de ces perspectives.

Les élèves reçoivent une échelle miniature à montants parallèles et les consignes suivantes.

1. Imaginez et dessinez une ombre possible, sur une surface plane, de cette échelle
a) Placée au soleil ;
b) Placée devant une lampe ponctuelle.
Si nécessaire, réalisez concrètement l'expérience ([1]).
2. Voici quelques dessins :



Quels sont ceux qui peuvent être une ombre de l'échelle placée au soleil ?
Quels sont ceux qui peuvent être une ombre de l'échelle placée devant une lampe ponctuelle ?
3. Imaginez et dessinez des ombres possibles d'un quadrillage
a) Placé au soleil ;
b) Placé devant une lampe ponctuelle.

3.1. Imaginer des ombres d'échelles

Cette question très ouverte doit amener les élèves à s'interroger sur les caractéristiques principales de ces deux types d'ombre. Ils pourront ainsi avoir une première grille de lecture des dessins qui leur sont présentés dans la deuxième question.

([1]) Une lampe ponctuelle et, au cas où le soleil est caché, une lampe à faisceaux parallèles sont disponibles en classe.

3.2. Ombres d'échelles possibles ou impossibles

3.2.1. Ombres au soleil

L'observation de l'échelle et de son ombre semble indiquer que l'ombre au soleil conserve les alignements, le parallélisme des droites dans toutes les directions et les rapports de longueurs sur une droite ou sur des droites parallèles. Elle ne conserve généralement pas les longueurs, ni les angles.

Le débat en classe débouche sur l'explication suivante : le soleil est tellement loin de la planète terre que les rayons parvenant sur la terre sont quasi parallèles ; on peut donc modéliser le phénomène des ombres au soleil sur une surface plane par le concept mathématique de projection parallèle sur un plan, au phénomène de pénombre près.

On aboutit à la définition suivante de projection parallèle, pour un plan π et une droite d non parallèle à π :

> La *projection parallèle à la droite d sur le plan π* est la transformation qui envoie un point P de l'espace sur le point de percée dans le plan π de la droite menée par P parallèlement à d.
>
> Cette droite parallèle à d est appelée *rayon projetant.* Les points du plan π sont leur propre image.

Nous abordons les propriétés des projections parallèles en exploitant le lien étroit entre les représentations planes et la géométrie de l'espace. En effet, on justifie par des propriétés de géométrie synthétique de l'espace et du plan les propriétés suivantes des projections parallèles :
- Conservation de l'incidence et de l'alignement ;
- Conservation du parallélisme ;
- Conservation des rapports de longueurs sur une droite ou sur des droites parallèles ;
- L'image d'un rectangle est un parallélogramme ;
- L'image d'une figure située dans un plan parallèle au plan de projection est isométrique à la figure ;
- L'image d'une figure située dans un plan parallèle aux rayons projetants est réduite à un segment.

Ces mises au point sur l'ombre au soleil, sur sa modélisation sous forme de projection parallèle et sur les propriétés d'une telle projection, permettent de revenir à la question concernant les formes possibles de l'ombre de l'échelle .

Nous interprétons désormais cette ombre comme l'image d'une échelle idéalisée ([2]) par une projection parallèle. Elle peut être, selon le cas

- Un segment ;
- Une échelle ([3]) isométrique à l'échelle de départ ;
- Une échelle dont les montants sont de même longueur et parallèles entre eux, les échelons étant parallèles entre eux mais pas nécessairement perpendiculaires aux montants et les espaces inter-échelons sont en forme de parallélogrammes isométriques.

Ainsi, les dessins n^{os} 3, 6, 5 et 7 montrés à la figure 16 sont acceptés.

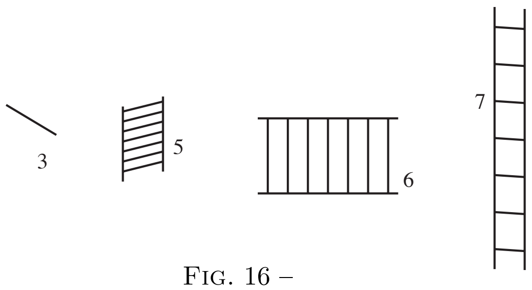


Fig. 16 –

Enfin, le lien entre les projections parallèles et les représentations planes est mis en évidence. À ce stade, on peut nommer la représentation plane associée à une projection parallèle : il s'agit d'une *perspective cavalière* (axonométrique suivant les dessins technologiques).

Quant aux projections orthogonales rencontrées dans l'activité précédente (les trois vues coordonnées), elles sont reconnues comme des cas particuliers de projections parallèles : les rayons projetants sont perpendiculaires au plan de projection.

([2]) Il s'agit d'une figure plane, correspondant à une échelle à montants parallèles de même longueur, et aux échelons perpendiculaires aux montants et régulièrement disposés (les espaces inter-échelons sont des rectangles isométriques).

([3]) Dans la suite de ce texte, nous commettons l'abus de langage qui consiste à utiliser échelle, montants, échelons, espaces inter-échelons, etc. au lieu de image de l'échelle, images des montants, images des échelons, images des espaces inter-échelons, etc. , estimant que le contexte permet de déterminer l'interprétation qu'il faut choisir.

3.2.2. Ombres à la lampe

L'observation de l'échelle et de son ombre semble indiquer que l'ombre à la lampe ponctuelle conserve les alignements, le parallélisme des droites parallèles au plan de l'ombre et les rapports de longueurs sur ces droites, mais ne conserve pas le parallélisme et les rapports de longueurs pour les autres droites.

À nouveau, la travail en classe débouche sur une modélisation : l'ombre portée par une lampe ponctuelle sur un plan est modélisée par une projection centrale de l'espace sur un plan.

La projection centrale est définie comme suit, pour un plan π donné et un point C n'appartenant pas à ce plan :

> La *projection centrale de centre C sur le plan* π est la transformation qui envoie un point P de l'espace (n'appartenant pas au plan parallèle à π passant par C) sur le point de percée dans le plan π de la droite déterminée par les points P et C.
>
> Cette droite est appelée *rayon projetant*. Les points de π sont leur propre image et aucun point du plan contenant C et parallèle à π n'a d'image.

On relève ensuite les premières propriétés des projections centrales :
- Conservation de l'alignement ;
- L'image d'une figure située dans un plan [4] parallèle au plan de projection est homothétique à la figure ;
- Les images de deux droites parallèles entre elles [5] mais non parallèles au plan de projection sont deux droites concourant en un point appelé *point de fuite* (figure 17).

On les justifie par des propriétés de géométrie synthétique de l'espace et du plan.

Avant de pouvoir déterminer quels dessins sont des ombres à la lampe de l'échelle, il nous a semblé intéressant d'étudier d'abord les ombres de quadrillages.

[4] Ne passant pas par C.
[5] Ne passant pas par le centre de projection.

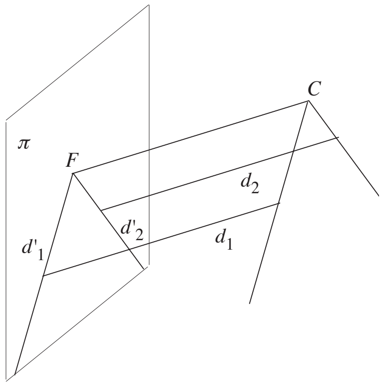


FIG. 17 –

3.3. Ombres de quadrillages

On observe d'abord qu'un quadrillage peut être interprété comme une juxtaposition de plusieurs échelles isométriques dont les espace inter-échelons sont cette fois des carrés. Donc, toutes les propriétés mentionnées pour les ombres des échelles sont d'application.

Ainsi, l'ombre au soleil la plus générale d'un quadrillage est un « parallélogrammage », c'est-à-dire un pavage du plan fait de parallélogrammes isométriques dont les sommets sont réunis aux nœuds du pavage.

L'ombre à la lampe ponctuelle d'un quadrillage présente, suivant sa position par rapport au plan de projection, des parallèles et/ou des points de fuite (figure 18).

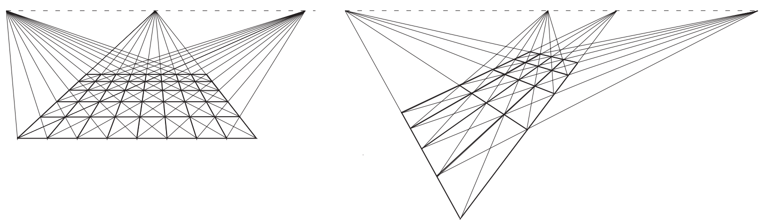


FIG. 18 –

Avec un quadrillage, on est en présence de quatre familles de droites parallèles : les deux familles de parallèles dont les directions sont celles des côtés du quadrillage et les deux familles de diagonales. Pour chacune de ces familles, lorsque les droites ne sont pas parallèles au plan de projection, les images doivent converger en un point de fuite. Dès lors, lorsque le quadrillage n'est pas parallèle au plan de projection, l'ombre présente trois ou quatre points de fuite (trois lorsque les droites d'une famille sont parallèles au plan de projection et quatre sinon). Ces points de fuite doivent être alignés car ils appartiennent à la droite d'intersection du plan de projection avec le plan passant par le centre de projection et parallèle au plan du quadrillage.

3.4. Retour aux ombres d'échelles

On déduit de ce qui précède que certains dessins doivent être rejetés comme ombre possible d'échelle, même si les montants convergent et les échelons convergent : c'est le cas du dessin n° 8 complété à la figure 19 qui montre une famille de diagonales ne convergeant pas vers un point.

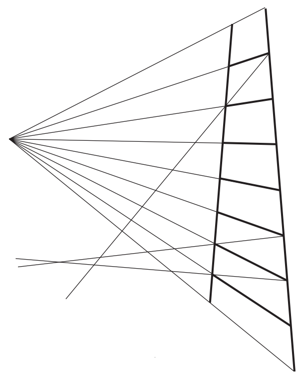


FIG. 19 –

Ces observations permettent enfin de conclure à propos des ombres possibles sur une surface plane, d'une échelle idéalisée exposée à la lampe ponctuelle. Cette ombre, que nous interprétons désormais comme une image par une projection centrale peut être

– Un segment ;
– Une échelle agrandie, semblable à l'échelle de départ ;

– Une échelle dont les échelons sont parallèles et de longueurs différentes, et dont les montants et les deux familles des diagonales des espaces inter-échelons convergent respectivement en trois points alignés ;
– Une échelle dont les montants sont parallèles et de longueurs différentes et dont les échelons et les deux familles de diagonales des espaces inter-échelons convergent respectivement en trois points alignés ;
– Une échelle dont les montants, les échelons et une des familles de diagonales des espaces inter-échelons convergent respectivement en trois points alignés ;
– Une échelle dont les montants, les échelons et les deux familles de diagonales des espaces inter-échelons convergent respectivement en quatre points alignés.

Les dessins n^{os} 2 et 10, repris à la figure 20, sont ainsi acceptés. Le n^{o} 10 a la particularité d'avoir l'image d'un échelon parallèle à celle d'un montant ; c'est dû à la présence du point d'intersection de l'échelon et du montant dans le plan parallèle au plan de projection et passant par le centre de projection.

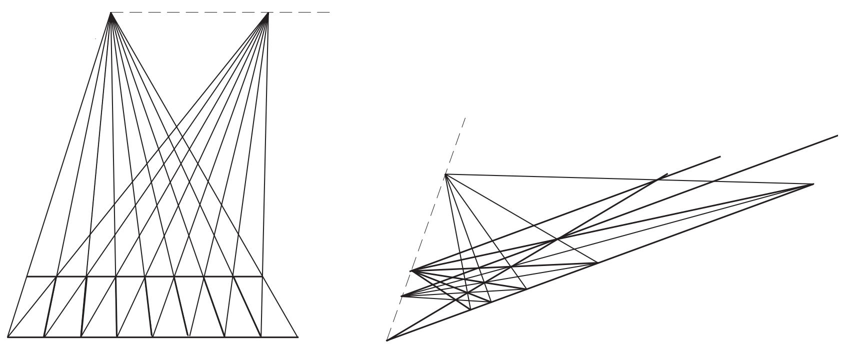


FIG. 20 –

Le lien entre les projections centrales et les représentations planes est mis en évidence. À ce stade, on peut nommer la représentation plane associée à une projection centrale : il s'agit d'une perspective à point de fuite.

Au travers de ces activités, ombres d'échelles et de quadrillages, les élèves ont pu tisser des liens entre le contexte des ombres, le domaine mathématique des transformations spatiales que sont les projections parallèles et les projections centrales, et le contexte des représentations planes, en particulier les perspectives dites respectivement cavalières et à point de fuite.

4. Représentation d'une boite cubique quadrillée intérieurement

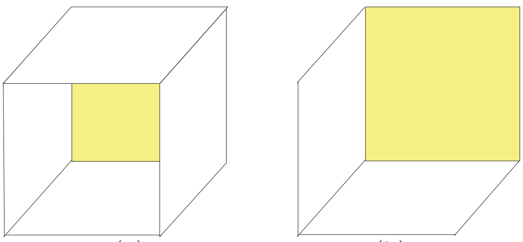
La figure 21 est la photo d'une boîte cubique sans couvercle.

Fig. 21

Représentez, en perspective cavalière, cette boîte placée dans la même position que sur la photo. Ensuite représentez un quadrillage 8 sur 8 sur les faces intérieures de la boîte.
Faites le même travail en perspective centrale.

4.1. Résolution en perspective cavalière

La figure 22a montre une représentation en perspective cavalière de cette boîte placée avec le fond parallèle au plan de projection. Afin d'y voir des faces intérieures dans leur entiereté, on choisit de ne représenter que trois faces de la boîte, comme à la figure 22b : la face du fond y apparaît en vraie grandeur, et les deux autres faces, perpendiculaires au plan de projection, y sont représentées par des parallélogrammes.

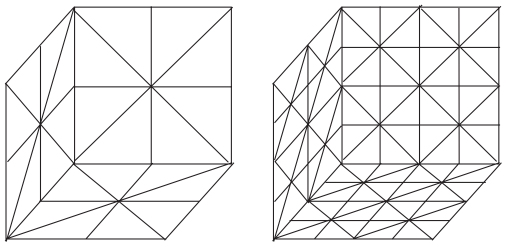


(a) (b)

Fig. 22 –

Pour représenter le quadrillage de la face horizontale inférieure et de la face latérale gauche, deux méthodes sont proposées.

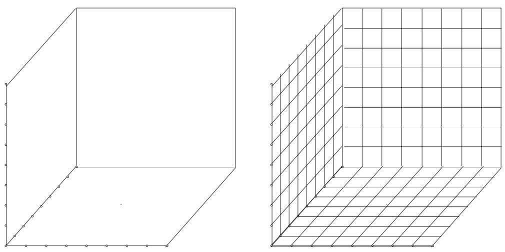
1. On commence par représenter la division de chaque face en quatre carrés : on représente le centre de chaque face, point d'intersection des diagonales, et ensuite les médianes (figure 23a). On recommence l'opération pour chacun des carrés afin de représenter 16 carrés sur chaque face (figure 23b) et 64 carrés à l'étape suivante.



(a) (b)

Fig. 23 –

2. On divise en 8 segments égaux deux côtés adjacents de chacune des faces. On représente ainsi des sommets des carrés du quadrillage (figure 24a). Par ces points, on trace des parallèles aux côtés des faces pour obtenir le quadrillage (figure 24b).



(a) (b)

Fig. 24 –

Dans les deux méthodes, on a utilisé des propriétés des projections parallèles établies lors du travail sur les ombres :

- Une figure parallèle au plan de projection est isométrique à son image ;
- Le parallélisme est conservé ;

– Dans une même direction, l'égalité des distances est conservée ([6]).

4.2. Résolution en perspective centrale

La figure 25 montre une représentation de la boîte en perspective centrale. Il s'agit de son image par une projection centrale sur un plan vertical parallèle à la face du fond. Contrairement à ce qui se passe en perspective cavalière, on peut placer l'objet de manière à voir sur le dessin les cinq faces intérieures. Le contour de l'ouverture de la boîte et la face du fond sont représentés par des carrés. Les quatre autres faces sont représentées par des trapèzes dont les côtés non parallèles sont sur des droites qui convergent en un point. Ce point est le point de fuite des droites horizontales perpendiculaires au plan de projection et est aussi appelé *point de fuite principal.*

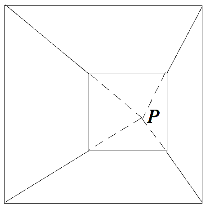


Fig. 25 –

Nous avons utilisé des propriétés des projections centrales établies précédemment :
- Une figure parallèle au plan de projection est homothétique à son image ;
- Les images de droites parallèles entre elles mais non parallèles au plan de projection concourent en un point.

La deuxième propriété est utilisée, pour la première fois, dans le cas de droites parallèles qui ne sont pas toutes dans un même plan.

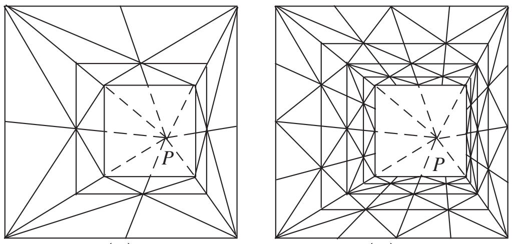
À ce stade-ci, on dispose d'un code pour représenter la boîte en perspective centrale. Les dessins obtenus peuvent varier : les carrés peuvent être plus ou moins décentrés et leurs tailles plus ou moins différentes. On

([6]) La conservation des égalités des distances dans une direction peut être déduite de la conservation du parallélisme.

peut choisir de laisser un caractère arbitraire à ces éléments. Ou, on peut choisir d'approfondir la question de la diversité des aspects possibles. On découvrira alors que ces aspects dépendent de paramètres liés aux positions relatives de l'objet, du centre de projection et du plan de projection.

Pour représenter le quadrillage des faces intérieures, on peut utiliser des méthodes analogues à celles utilisées en perspective cavalière.

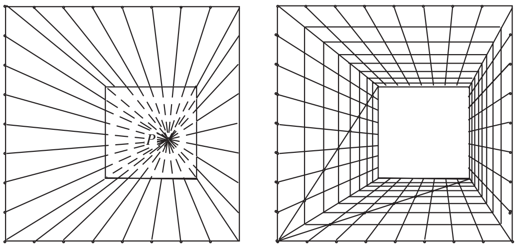
1. On commence par diviser les faces en quatre carrés. Sur le dessin, on représente d'abord le centre de la face à l'intersection des diagonales et on représente ensuite les médianes : les images des médianes parallèles au plan de projection forment un carré et les images des médianes perpendiculaires au plan de projection sont sur des droites qui convergent au point de fuite principal (figure 26a). On recommence ensuite l'opération pour chacun des carrés (figure 26b).



(a) (b)

Fig. 26 –

2. Par l'autre méthode, on procède en deux temps. On représente d'abord les droites du quadrillage perpendiculaires au plan de projection. Pour cela, on utilise la conservation de l'égalité des segments situés sur des parallèles au plan de projection, ce qui permet de subdiviser le contour de l'ouverture, et on dessine ensuite les droites qui convergent au point de fuite principal (figure 27a). Pour représenter les autres parallèles du quadrillage, on utilise une propriété déjà rencontrée : la conservation des diagonales des quadrillages (figure 27b).



(a) (b)

Fig. 27 –

5. Représentations du module de paix à l'aide du quadrillage

On suppose que les petits cubes qui forment le module ont même côté que les carrés du quadrillage. La figure 28 montre, vus du haut, trois modules posés sur la face horizontale de la boîte.

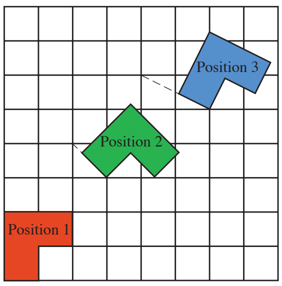


Fig. 28

Représentez ces modules en perspective cavalière en vous servant du quadrillage construit précédemment (figure 24b).
Faites ensuite le même travail en perspective centrale (figure 27b).

5.1. Résolution en perspective cavalière

La hauteur du module vaut quatre fois le côté des carrés du quadrillage et sa représentation est partout en vraie grandeur. La véritable difficulté consiste donc à représenter la face inférieure du module.

1. Dans la position 1, c'est simple (figure 29).

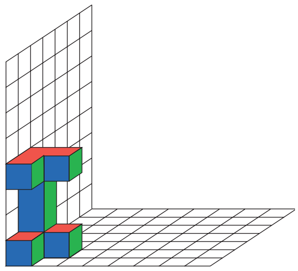


FIG. 29 –

2. Pour représenter le module dans la position 2, on commence par relever la face inférieure de la boîte sur la face du fond, car celle-ci est parallèle au plan de projection et les figures y sont vues en vraie grandeur. Nous y dessinons un des carrés qui constituent la face inférieure du module (figure 30).

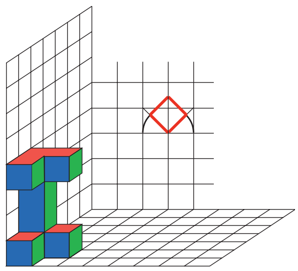


FIG. 30 –

Il faut ensuite ramener ce carré sur le quadrillage horizontal. Pour cela, on commence par tracer, dans ce quadrillage, les deux diagonales sur lesquelles apparaîtront les côtés du carré (figure 31). Dans ce quadrillage, les côtés du carré n'apparaissent pas en vraie grandeur.

Par contre on voit en vraie grandeur les projections des côtés sur les lignes du quadrillage parallèles à la face du fond. Nous allons donc construire sur la face du fond les projections des côtés sur les lignes horizontales du quadrillage (figure 32), ensuite utiliser des lignes de rappel (en trait interrompu sur la figure 32) pour ramener les projections des côtés sur les lignes correspondantes du quadrillage du plan horizontal. On obtient ainsi la projection de chaque côté ; la construction des deux premiers côtés du carré est alors immédiate.

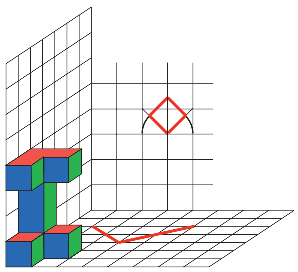


Fig. 31 –

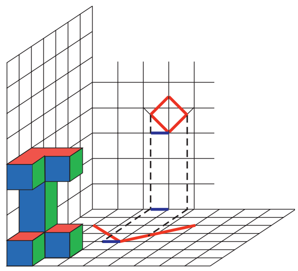


Fig. 32 –

On peut terminer la représentation du carré de base et ensuite celle de la face inférieure du module (figure 33).

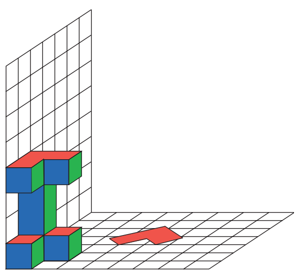


Fig. 33 –

3. La représentation du module dans la position 3 est analogue. Les figures 34 et 35 montrent les constructions terminées.

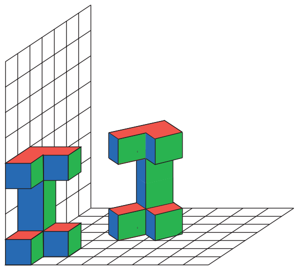


Fig. 34 –

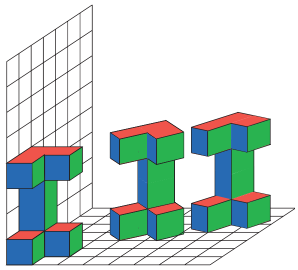


Fig. 35 –

5.2. Résolution en perspective centrale

Nous avons choisi une résolution qui exploite le quadrillage donné, comme dans le cas de la perspective cavalière. Nous utiliserons en plus le point de fuite principal présent sur la figure.

1. Pour le module en position 1, on représente la face inférieure du module en suivant le quadrillage (figure 36).

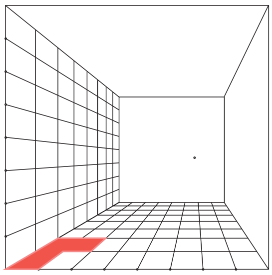


Fig. 36 –

On complète la représentation (figures 37 et 38) en utilisant les propriétés suivantes :
- Les horizontales parallèles au plan de projection sont représentées par des horizontales ;
- Les verticales sont représentées par des verticales.

Pour faciliter les constructions, on peut également utiliser le fait que les images des perpendiculaires au plan de projection sont sur des droites qui convergent au point de fuite principal.

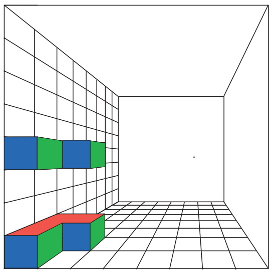


Fig. 37 –

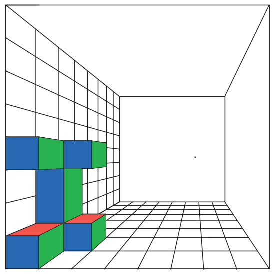


Fig. 38 –

2. Pour représenter le module en position 2, on commence par relever la face inférieure de la boîte sur la face du fond et on y dessine la face inférieure du module $A'B'F'E'H'C'$ qui y est vue en vraie grandeur (figure 39).

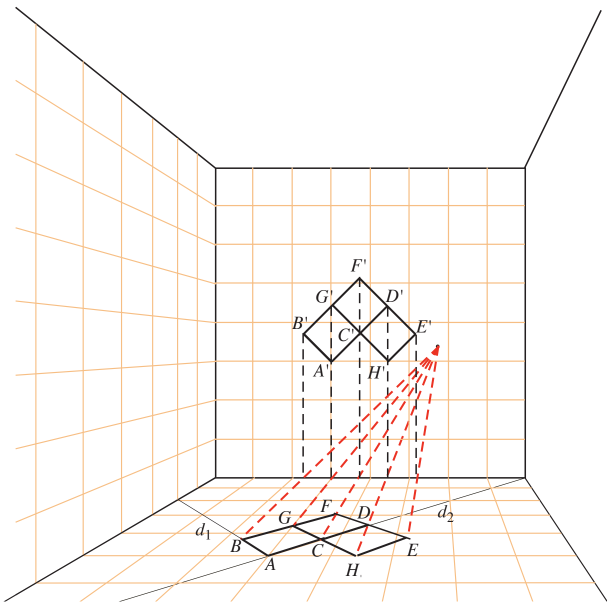


Fig. 39 –

Des lignes de rappel permettent d'associer des segments parallèles horizontaux représentant des segments parallèles de même longueur dans la réalité. Ces lignes de rappel sont dessinées en trait interrompu.

Ce sont des lignes verticales sur le dessin de la face du fond et ce sont des droites convergeant au point de fuite principal sur le dessin de la face inférieure.

Sur la face horizontale, on place le point A et on trace les diagonales du quadrillage passant par A, à savoir d_1 et d_2 ; à partir de B', on détermine le point B sur d_1 ; puis à partir de C', le point C sur d_2 ; à partir de D', le point D également sur d_2 ; ensuite, à partir de E' sur $B'C'$, on repère la position de E sur BC ; et, à partir de F' sur $D'E'$, on obtient F sur DE ; à partir de G' sur $B'F'$, on obtient G sur BF ; et enfin, H' sur $G'C'$ nous fournit H sur GC.

On termine la représentation (figure 40) en utilisant les propriétés suivantes :

– Les verticales sont représentées par des verticales ;
– Les segments égaux situés dans un plan parallèle au plan de projection sont représentés par des segments égaux.

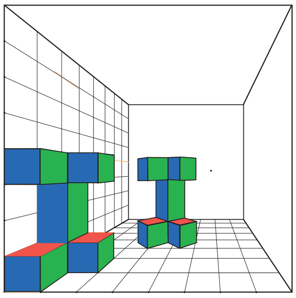


FIG. 40 –

Notons que le texte présente une solution parmi d'autres possibles. On pourrait par exemple résoudre le problème en se servant des points de fuite associés aux directions de la base du module.

3. La représentation de la base du module en position 3 est analogue. La figure 41 montre comment représenter la face inférieure du module et la figure 42 montre la construction terminée.

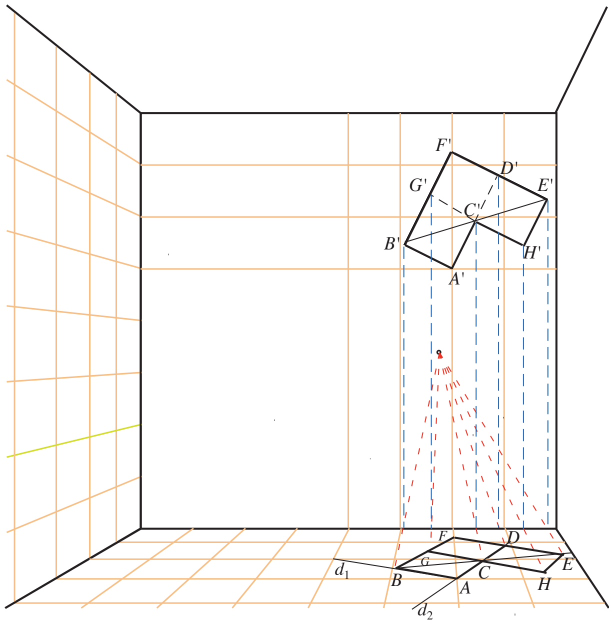


FIG. 41 –

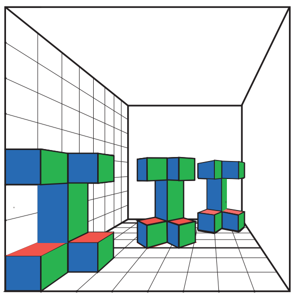


FIG. 42 –

6. Représentations du module de paix sans quadrillage

La figure 43 est une représentation en perspective cavalière d'un module disposé verticalement, en position frontale. Complétez cette figure en représentant le même module de telle sorte que l'arête OP soit sur la droite horizontale d et que P soit placé à l'avant de O.

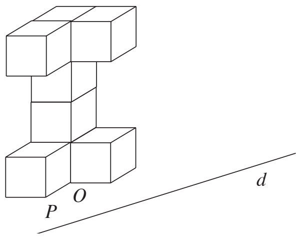


FIG. 43

Faites ensuite le même travail en perspective centrale.

6.1. Résolution en perspective cavalière

Concentrons-nous sur la représentation de la face inférieure du module, car une fois cette partie-là du problème résolue, le reste suit aisément.

Cette face inférieure, composée de trois petits carrés isométriques, est placée dans un carré dont la figure 44 montre l'image en perspective cavalière. Un des côtés de ce grand carré est en position frontale. Que devient la représentation de ce carré si le côté OP prend la direction de d avec P devant O ?

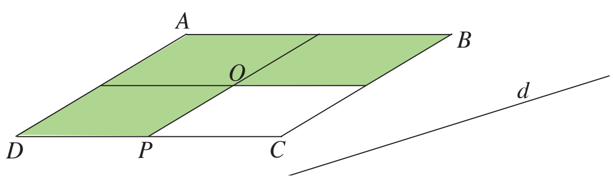


FIG. 44 –

Commençons par tracer d_1, la parallèle à d passant par O et cherchons la nouvelle position P_1 de P sur d_1 (figure 45).

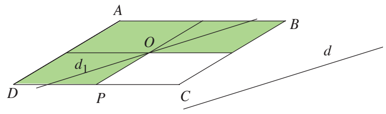


FIG. 45 –

Pour l'obtenir, nous allons passer par une représentation en position frontale du carré $ABCD$ (figure 46). Nous relevons le quadrilatère $ABCD$ et l'amenons dans la position $A'B'BA$.

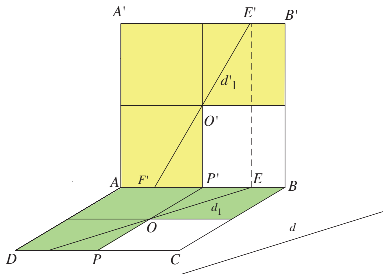


FIG. 46 –

Soit E, l'intersection de d_1 avec AB. On construit aisément E' et O'. Comme la droite d_1 passe par E et par O, la droite d'_1, passant par E' et O', est la représentation de d_1 dans ce plan frontal. Elle coupe AB en F'. Tout se passe comme si les figures $ABCD$ et $A'B'BA$ représentaient deux faces intérieures d'une boîte cubique décorées d'un même dessin.

Sur d'_1 nous plaçons le point P'_1 tel que $O'P'_1 = O'P'$ (figure 47). Et en utilisant les propriétés de la perspective cavalière, nous obtenons la position de P_1 sur d_1. Le segment OP_1 ainsi obtenu donne donc la longueur de la représentation de l'arête OP dans la direction de la droite d. Il nous reste à déterminer la longueur de la représentation de cette même arête OP dans la direction perpendiculaire à d.

Servons-nous à nouveau du plan frontal. Traçons-y p' perpendiculaire à d'_1 en O' (figure 48). Cette droite p' rencontre le côté $A'A$ en X'. Cherchons le point X de AD correspondant à X'. Pour cela, on utilise la propriété suivante : *Les rapports de longueurs dans une même direction sont conservés.*

On a donc :

$$\frac{AX}{XD} = \frac{A'X'}{X'A}. \tag{1}$$

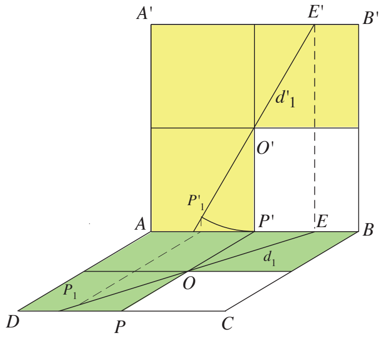


FIG. 47 –

La figure constituée du carré $A'B'BA$ et des droites d_1' et p' est invariante pour une rotation de 90° autour du point O' et par conséquent, on a :

$$A'X' = AF' \quad \text{et} \quad X'A = F'B. \tag{2}$$

Des égalités (1) et(2), on déduit :

$$\frac{AX}{XD} = \frac{AF'}{F'B}.$$

Dès lors, pour déterminer le point X, on trace la diagonale BD et la parallèle à BD passant par F'. Celle-ci coupe AD en X. Les points X et O déterminent la droite p cherchée.

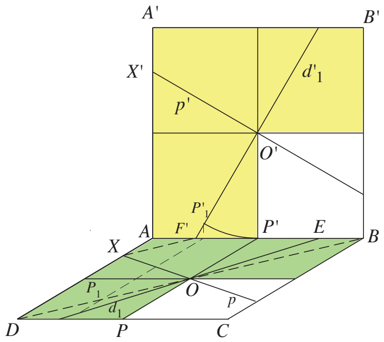


FIG. 48 –

Il reste à repérer sur p le point P_2 tel que OP_2 soit la représentation d'un segment de même longueur que l'arête OP. Pour cela, dans le plan frontal, on construit P_2' tel que $O'P' = O'P_2'$ et, en utilisant les propriétés de la perspective cavalière, on en déduit la position de P_2 sur p (figure 49).

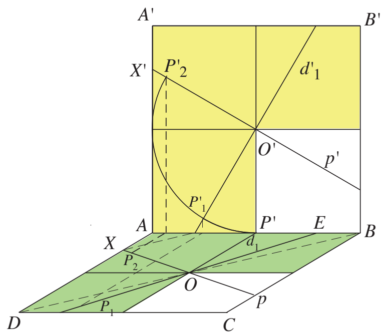


FIG. 49 –

Sachant à présent comment représenter un segment de même longueur que l'arête OP dans la direction de d et dans la direction perpendiculaire à d, il reste à tracer les parallèles nécessaires pour dessiner la face inférieure du module (figure 50).

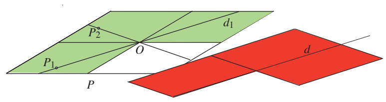


FIG. 50 –

On termine la représentation en prenant comme hauteur le double de la longueur du côté AB du parallélogramme.

6.2. Résolution en perspective centrale

Comme dans le cas de la perspective cavalière, le problème principal est de représenter la base du deuxième module (figure 51).

Dans un premier temps, nous allons représenter la base du module ayant tourné autour de O jusqu'à avoir son arête OP sur la droite d_1 qui est parallèle à d dans la réalité. Pour tracer d_1, nous avons besoin de la *ligne*

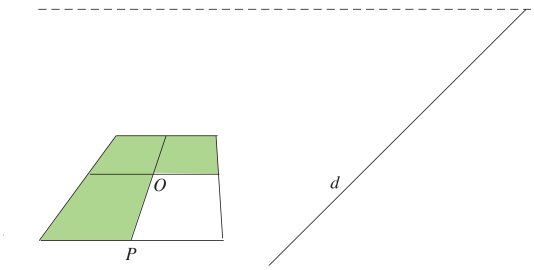


FIG. 51 –

d'horizon sur laquelle se trouvent les points de fuite des droites horizontales ; il s'agit de la droite horizontale menée par le point de fuite principal F. Les droites d_1 et d se rencontrent au point de fuite F_d (figure 52).

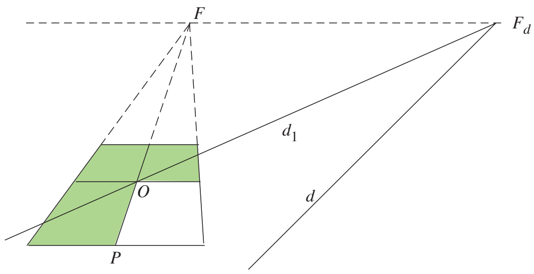


FIG. 52 –

Pour représenter une droite qui, dans la réalité, est perpendiculaire à la droite d_1, nous allons utiliser une propriété des projections centrales qui n'est pas intervenue jusqu'à présent : l'angle α formé par deux droites de l'objet réel se retrouve au niveau du centre de projection Z lorsqu'on joint Z aux points de fuite des deux droites (figure 53).

Cette propriété permettra d'abord de préciser la position du centre de projection à partir du dessin donné, ensuite de représenter une droite qui est perpendiculaire dans la réalité à la droite d donnée. Nous utiliserons aussi cette propriété pour construire, sur des droites sécantes du dessin, des segments qui ont la même longueur dans la réalité. Cette propriété nous permettra ainsi de résoudre le problème sans utiliser une vue en vraie grandeur du plan sur lequel les objets sont posés.

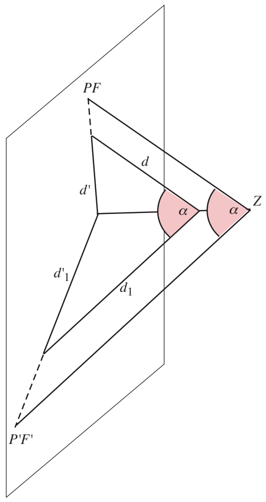


FIG. 53 –

Commençons donc par déterminer la position du centre Z de projection à partir du dessin. Le centre Z se trouve dans le plan horizontal mené par la ligne d'horizon, sur une perpendiculaire à la ligne d'horizon menée par le point de fuite principal F. Pour situer Z sur cette droite, nous utilisons le *point de distance* F'. Un point de distance est, par définition, le point de fuite d'une famille de parallèles horizontales inclinées à 45° par rapport au plan de projection. Le point F' se trouve sur la ligne d'horizon et s'obtient à partir de l'image d'une diagonale de la base du module. Nous pouvons maintenant situer Z car la distance de Z au point de fuite principal F est égale à la distance de F à F'. À la figure 54, le plan horizontal contenant Z a été rabattu dans le plan du dessin, au-dessus de la ligne d'horizon, par rotation autour de la ligne d'horizon.

Nous pouvons à présent déterminer le point de fuite F_p des droites horizontales perpendiculaires à d dans la réalité et mener par F_p la droite p passant par O (figure 55). Pour ce faire, nous avons utilisé la propriété illustrée à la figure 53.

Nous allons à présent construire sur d_1 un point P_1 de sorte que OP et OP_1 représentent des segments de même longueur. Il s'agit donc de construire un triangle OPP_1 représentant un triangle isocèle, les angles en P et P_1 devant être égaux dans la réalité. Nous pouvons à nouveau utiliser le

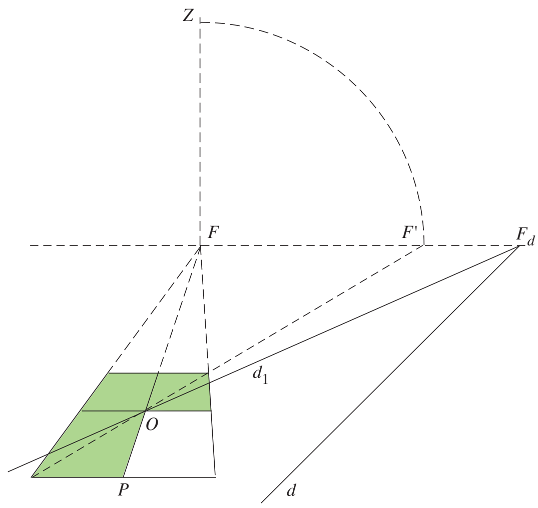


FIG. 54 –

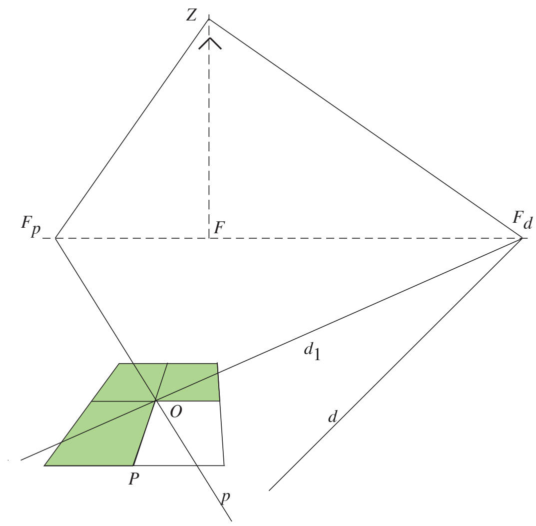


FIG. 55 –

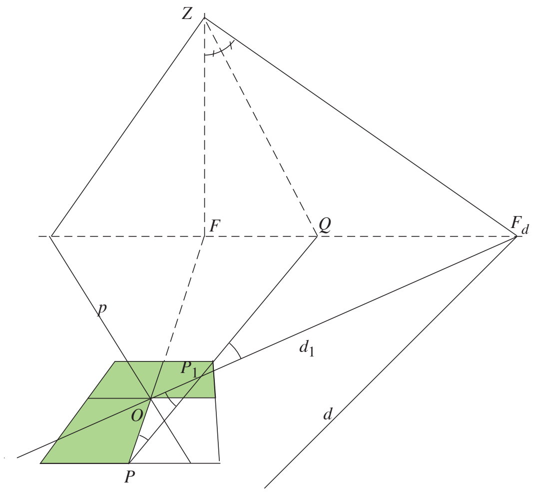


Fig. 56 –

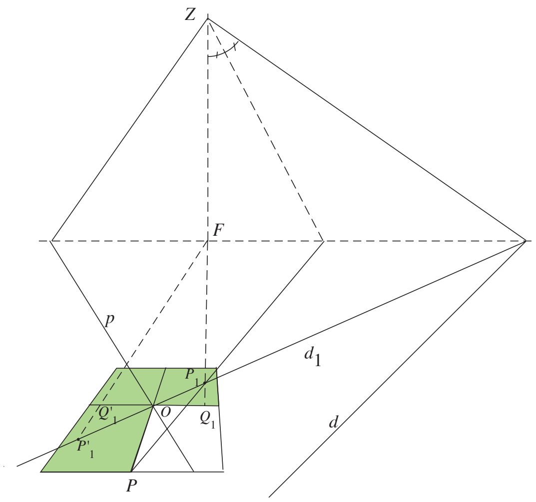


Fig. 57 –

centre Z de projection et bissecter l'angle joignant Z aux points de fuite F et F_d ce qui fournit le point Q sur la ligne d'horizon (figure 56). L'intersection de QP avec d_1 fournit le point P_1 cherché ([7]).

Pour représenter le segment situé de l'autre côté de O, nous utilisons la conservation de l'égalité de segments situés sur des parallèles au plan de projection (figure 57). On trace OQ_1' de même longueur que OQ_1 et on trouve P_1' à l'intersection de d_1 et de FQ_1'.

De manière analogue, on détermine sur la droite p deux segments représentant des arêtes de la base du module (figure 58).

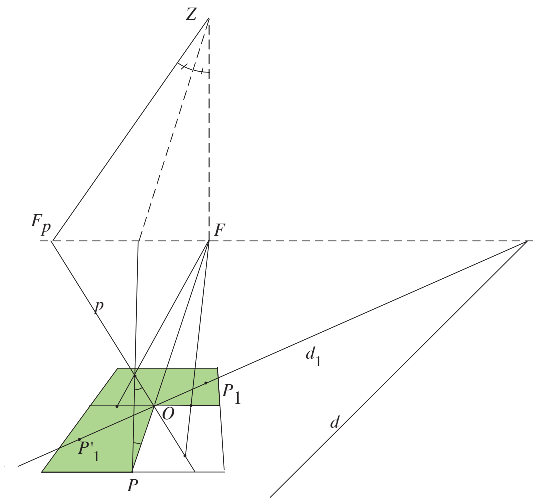


FIG. 58 –

On peut ensuite représenter la base du module ayant une arête le long de d_1 en utilisant les points de fuite F_d et F_p (figure 59).

Pour disposer le module le long de d, il suffit d'utiliser la conservation de l'égalité de segments se trouvant sur des parallèles au plan de projection.

([7]) Cette construction apparaît dans le traité de Brook Taylor de 1715, *Linear Perspective : or, a New Method of Representing justly all manner of Objects as they appear to the Eye in all situations*, London, 1715 (in [1]). Le problème traité alors par Taylor est le suivant : « Étant donné la ligne de fuite d'un plan, son centre et sa distance, construire la représentation d'un cercle à partir de la représentation donnée d'un rayon. »

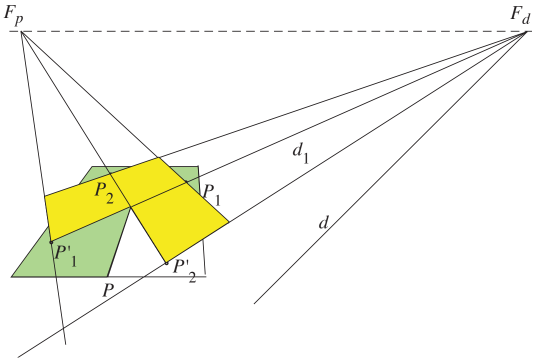


FIG. 59 –

Conclusion

La thèse principale de cette étude est que les représentations planes d'objets de l'espace peuvent être présentes *à toutes les étapes* d'apprentissage de la géométrie, de la prime enfance à l'âge adulte et qu'elles sont appelées à jouer les trois rôles suivants.

1. Elles sont un mode d'expression et de communication des situations spatiales dans tous les cas où on ne dispose pas de modèles à trois dimensions. À ce titre, elles sont un outil pour apprendre certains chapitres de géométrie.
2. Mais dans la mesure où on les ramène techniquement à des projections parallèles ou centrales, la théorie des projections et d'autres notions de géométrie sont un outil pour produire et interpréter les représentations. En nous appuyant en cours de route sur des propriétés d'incidence et d'orthogonalité, ainsi que sur le théorème de Thalès dans le plan et sur le théorème de Pythagore, nous avons illustré le fait que d'autres notions de géométrie (par delà la théorie des projections sricto sensu) interviennent dans les représentations.
3. Les représentations planes sont un sujet d'étude géométrique intéressant en soi, ne serait-ce que par leur intérêt dans la vie quotidienne et dans l'histoire de l'art.

Par ailleurs, on discerne clairement plusieurs étapes dans l'apprentissage des représentations planes. Les voici, rapidement esquissées, dans un ordre non entièrement obligé.

1. *La réalisation de dessins par les enfants*, point de départ essentiel, les amène à exercer l'observation et les perceptions. Elle leur fournit des occasions de réaliser le caractère réducteur et les ambiguïtés des représentations : l'impossibilité fréquente d'exprimer fidèlement un concept, en l'occurrence celui de table. À ce stade, *pas de théorie géométrique* mais, vers la fin du primaire, *la familiarisation* avec un premier code de représentation, celui de la *perspective cavalière*. Soulignons par ailleurs que, s'il est vrai que les dessins d'enfants sont loin de la géométrie théorisée, ils y préparent.
2. Nous avons débuté l'étude des représentations planes *par le biais des trois vues coordonnées, chacune simple, mais avec la difficulté si instructive* (si utile à l'exercice de l'intuition spatiale) *de leur coordination.*
3. Nous avons ensuite abordé *les premiers éléments des projections parallèles et centrales par le biais des ombres.* Cet apprentissage mobilise diverses propriétés de la géométrie d'incidence et de la proportionnalité. Nous avons opté pour un apprentissage concomitant des deux types de projections et des modes de représentation qui y sont associés. Cela permet de mettre en évidence les analogies et les différences qui existent entre ces deux modes de représentation. Leur confrontation contribue à se familiariser avec leurs propriétés respectives.
4. Nous avons poussé nos exemples jusqu'à *la réalisation de perspectives cavalières et centrales de quadrillages et d'objets de l'espace.* Nous n'avons pas eu le loisir de compléter notre étude par une approche technique complète des deux types de projection.

Dans l'introduction, nous avons annoncé l'exposé de quelques activités de représentations planes d'objets de l'espace. Or, nous avons traité à plusieurs reprises de représentations d'objets plans comme des échelles et des quadrillages. Notons à ce sujet que, pour dessiner un objet de l'espace, on a souvent besoin d'y discerner des parties planes. En outre, des objets plans situés dans l'espace sont des objets de l'espace et, à ce titre, relèvent de la géométrie de l'espace.

On dira peut-être que la référence constante à la verticale et à l'horizontale, qui relèvent de la physique, sortent du cadre de la géométrie. Mais celle-ci part du monde réel avant de devenir abstraite et formelle. Et, dans ce contexte du monde réel, on travaille la pensée géométrique.

Les représentations planes constituent un *fil conducteur* au sens où, obéissant à une progression claire, elles sont une source de questions et d'intuitions, et un champ d'application de la théorie à toutes les étapes de l'éducation. Elles sont un contexte de référence dans lequel, à chaque étape, on peut savoir d'où on vient, où on est et vers où on va. On peut même y discerner en filigrane une progression dans la suite des géométries emboîtées du Programme d'Erlangen, dans la mesure où les projections orthogonales (telles que nous les avons présentées, avec des vues en vraie grandeur), parallèles et centrales sont parentes respectivement des géométries métrique, affine et projective.

Soulignons que nos exemples d'activités n'épuisent pas les points d'appui possibles pour apprendre les représentations planes. Nous n'avons fait allusion ni à l'histoire de la perspective en peinture, ni à la « vitre de Dürer », ni à la photographie, … Il n'était pas nécessaire d'évoquer toutes ces possibilités pour montrer leur caractère fécond.

Bibliographie

[1] Andersen K., *Brook Taylor's Work on Linear Perpective, A Study of Taylor's Role in the History of Perspective Geometry, Including Facsimiles of Taylor's Two Books on Perspective*, Springer-Verlag, New York, 1992.

[2] Bkouche R., *De l'enseignement de la géométrie*, *in* Actes du colloque sur l'enseignement de la géométrie, 33–44, Mons, 1982.

[3] Bkouche R., Appendice historique, *in* Lehmann D. & Bkouche R., *Initiation à la géométrie*, PUF, Paris, 1988.

[4] CREM, *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques*, Ministère de l'Éducation, de la Recherche et de la Formation de la Communauté française de Belgique, Nivelles, 1995.

[5] Cuisinier G., Legrand D. & Vanhamme J., *Géométrie de l'espace par le biais de l'ombre à la lampe*, Academia Erasme, Namur, 1995.

[6] Gilbert Th., *La perspective en questions*, Gem-Ciaco éd., Louvain-la--Neuve, 1987.

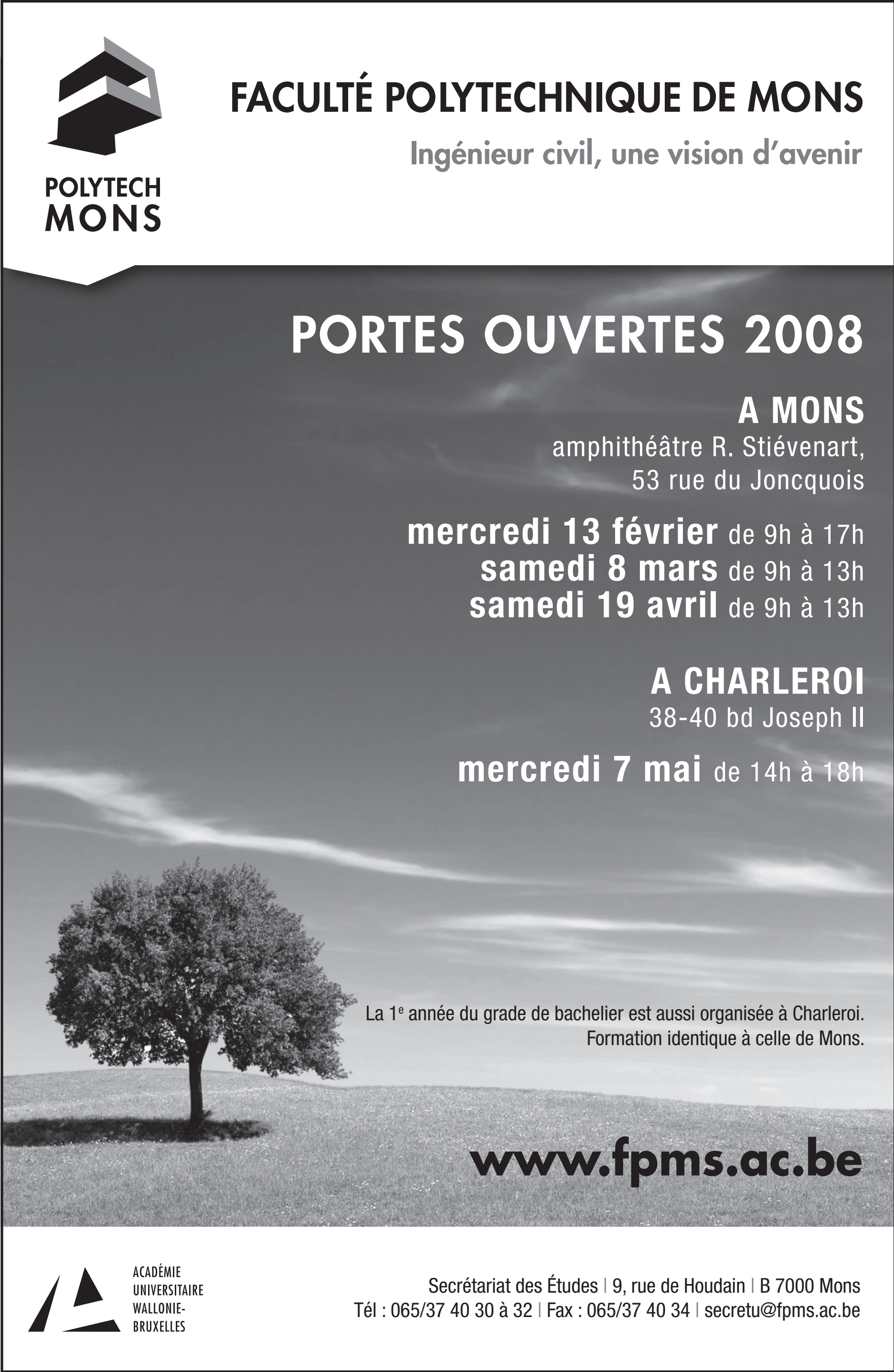
[7] Grand'Henry-Krysinska M. *Géométrie dans l'espace et géométrie de l'espace*, Academia Bruylant, Louvain-la-Neuve, 1998.

[8] Lismont L. & Rouche N., coordinateurs, *Construire et représenter, un aspect de la géométrie de la maternelle jusqu'à 18 ans*, CREM, Nivelles, 2001.

[9] Tossut R., *La naissance de la démonstration projective*, Thèse de doctorat, Université Charles de Gaulle, Lille III, 1996.

[10] Wittmann E., *Géométrie élémentaire et réalité, Introduction à la pensée géométrique*, Didier Hatier, Bruxelles, 1998.

[11] Macquoi J., Müller G. N., Wittmann E. & collaborateurs, Jeu associé au manuel *Faire des maths en première année*, Erasme, 2000.


POLYTECH
MONS
FACULTÉ POLYTECHNIQUE DE MONS
Ingénieur civil, une vision d'avenir
PORTES OUVERTES 2008
A MONS
amphithéâtre R. Stiévenart,
53 rue du Joncquois
mercredi 13 février de 9h à 17h
samedi 8 mars de 9h à 13h
samedi 19 avril de 9h à 13h
A CHARLEROI
38-40 bd Joseph II
mercredi 7 mai de 14h à 18h
La 1e année du grade de bachelier est aussi organisée à Charleroi.
Formation identique à celle de Mons.
www.fpms.ac.be
ACADÉMIE
UNIVERSITAIRE
WALLONIE-
BRUXELLES
Secrétariat des Études | 9, rue de Houdain | B 7000 Mons
Tél : 065/37 40 30 à 32 | Fax : 065/37 40 34 | secretu@fpms.ac.be

Problèmes

Claudine Festraets ([1])

Monsieur Ooms m'a envoyé un complément de solution au problème 326 publié dans le numéro 160 de *M&P* ; je vous le soumets complètement ci--dessous.

Rectangles

Problème n° 326 de *M&P* n° 157

Un réseau carré a comme sommets les points de coordonnées $(0,0)$, $(0,n)$, (n,n) *et* $(n,0)$. *Dans ce réseau, combien existe-t-il de rectangles non carrés dont les sommets sont de coordonnées entières ?*

Solution de J. Ooms, de Chimay

1) Le nombre de rectangles (carrés ou non carrés) répondant aux conditions et dont les côtés sont parallèles aux lignes du réseau vaut :

$$\binom{n+1}{2} \cdot (n + (n-1) + \cdots + 2 + 1) = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2.$$

Parmi ces rectangles, le nombre de carrés vaut :

$$n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Donc le nombre de rectangles non carrés est égal à

$$\begin{aligned} R_1 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} &= \frac{n(n+1)(3n(n+1) - (2n+1))}{12} \\ &= \frac{n(n+1)(3n^2+n-1)}{12} \\ &= \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12} \end{aligned}$$

([1]) Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à Cl. Festraets, Rue J.-B. Vandercammen 36, B-1160 Bruxelles ou à l'adresse e-mail hamoircl@brutele.be.

2) Pour qu'un rectangle non carré répondant aux conditions ait ses côtés parallèles aux diagonales du réseau, il faut et il suffit qu'il s'inscrive dans un carré dont les côtés sont parallèles aux lignes du réseau. Or

(i) Le nombre de rectangles non carrés répondant aux conditions et s'inscrivant dans un carré de dimension k dont les côtés sont parallèles aux lignes du réseau est $k-1$ si k est impair et $k-2$ si k est pair ;

(ii) Pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on peut extraire du réseau k^2 carrés de dimension $n-(k-1)$ et de côtés parallèles aux lignes du réseau.

- Si n est pair :

  - Pour $k = 1$, on a 1^2 carré de dimension n (pair), d'où $1^2(n-2)$ rectangles ;
  - Pour $k = 2$, on a 2^2 carrés de dimension $n-1$ (impair), d'où $2^2(n-2)$ rectangles ;
  - Pour $k = 3$, on a 3^2 carrés de dimension $n-2$ (pair), d'où $3^2(n-4)$ rectangles ;
  - Pour $k = 4$, on a 4^2 carrés de dimension $n-3$ (impair), d'où $4^2(n-4)$ rectangles ;
  - ...
  - Pour $k = n-3$, on a $(n-3)^2$ carrés de dimension 4, d'où $(n-3)^2(n-(n-2))$ rectangles ;
  - Pour $k = n-2$, on a $(n-2)^2$ carrés de dimension 3, d'où $(n-2)^2(n-(n-2))$ rectangles ;
  - Pour $k = n-1$, on a $(n-1)^2$ carrés de dimension 2, d'où $(n-1)^2(n-n)$ rectangles.

  En additionnant, il vient

$$\begin{aligned} R_2 = n(1^2 + 2^2 + \cdots + (n-2)^2) \\ - (2^3 + 4^3 + 6^3 + \cdots + (n-2)^3) \\ - (2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 3^2 + \cdots + (n-2)(n-3)^2) \\ = A - B - C. \end{aligned}$$

  Calculons A, B, C séparément.

$$A = n \sum_{k=1}^{n-2} k^2 = n \frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{2}$$

$$B = \sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} (2k)^3 = 8 \left(\frac{\frac{n-2}{2}(\frac{n-2}{2}+1)}{2} \right)^2 = \frac{1}{8}(n-2)^2 \cdot n^2$$

$$
\begin{aligned}
C &= \sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} 2k(2k-1)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} (8k^3 + 2k^2 + 2k) \\
&= \frac{1}{8}n^2(n-2)^2 - 8\frac{1}{6}\frac{n-2}{2}\left(\frac{n-2}{2}+1\right)\left(2\frac{n-2}{2}+1\right) + \\
&\qquad + 2\frac{1}{2}\frac{n-2}{2}\left(\frac{n-2}{2}+1\right) \\
&= \frac{1}{8}n^2(n-2)^2 - \frac{1}{3}n(n-1)(n-2) + \frac{1}{4}n(n-2).
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
R_2 &= \frac{n(n-2)}{12}(2(n-1)(2n-3) - 3n(n-2) + 4(n-1) - 3) \\
&= \frac{1}{12}n(n^2-1)(n-2).
\end{aligned}
$$

- Si n est impair, après un calcul un peu plus compliqué, on aboutit à la même formule pour R_2.

3) Pour le calcul de R_3 (nombre de rectangles non carrés dont les côtés ne sont parallèles ni aux lignes, ni aux diagonales du réseau), voici un petit programme écrit en GWBASIC.

```
10 INPUT "DIMENSION DU RESEAU" : N
20 FOR A = 1 TO INT((N-A)/3)
30 FOR B = A+1 TO INT((N-A)/2)
40 FOR K = 2 TO INT((N-A)/B)
50 S=S+(N-K*A-B+1)*(N-A-K*B+1)
60 NEXT K
70 NEXT B
80 NEXT A
90 PRINT "R3=" ; S*4 (pour réplication par deux symétries axiales)
```

Ainsi, pour $n = 8$, on obtient $R_1 + R_2 + R_3 = 1092 + 252 + 152 = 1496$ rectangles non carrés.

Polynômes

Problème n° 333 de *M&P* n° 159

Déterminer tous les polynômes $P(x)$ à coefficients réels tels que

$$P(x) \cdot P(x+1) = P(x^2 + x + 1).$$

Solution de R. Choulet, de Avenay (France)

Je regarde d'abord un problème voisin mais plus facile : trouver les polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$ qui vérifient $P(z)P(z+1) = P(z^2 - z + 1)$. (J'ai choisi l'équation en partant de $(z-1)^2$.)

Tout polynôme $(z-1)^n$ est solution. Ce sont les seuls mis à part les constants 0 et 1.

En effet soit P non constant solution et Ω son ensemble de zéros dans $\mathbb{C}$. Il est non vide, fini donc compact non vide.

De plus Ω est stable par l'application $f_1 : z \mapsto z^2 - z + 1$ ainsi que par $f_2 : z \mapsto z^2 - 3z + 3$. Pourquoi ? La relation fonctionnelle donne en remplaçant z par $z - 1$: $P(z)P(z-1) = P(z^2 - 3z + 3)$ d'où le résultat annoncé.

Considérons alors l'application N de Ω vers $\mathbb{R}$ qui à z associe $|z-1|$. N, continue sur un compact, atteint son maximum M que nous supposons > 0, en un certain u ce qui fait que $|u-1| = M > 0$.

Calculons $N(f_1(u)) = |u^2 - u| = M|u|$ donc $|u| \leqslant 1$. De même $N(f_2(u)) = [u^2 - 3u + 2| = M|u-2|$ donc $|u-2| \leqslant 1$. Ainsi u vérifie $|u| \leqslant 1$ et $|u-2| \leqslant 1$ ce qui prouve que $u = 1$ auquel cas il y a contradiction donc en fait $M = 0$ qui est atteint en la seule valeur 1 ce qui veut dire que le seul zéro de P est 1. CQFD

Dans le cas qui nous occupe c'est plus compliqué car les inéquations auxquelles on arrive par conditions nécessaires ne se laissent pas résoudre par équivalences.

Tout d'abord notons quelques résultats directs.

• Directement par identification que l'on soit dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ on trouve 0 et 1 pour seuls polynômes constants , $z^2 + 1$ dans le cas du degré 2, pas de polynôme de degré 3, et $(z^2 + 1)^2$ dans le cas du degré 4 d'où la naturelle conjecture : les solutions sont les $(z^2 + 1)^n$.

• P, non constant, ne peut avoir de zéro réel. En effet s'il en existe un z_0, $z_0^2+z_0+1$ en est un aussi et plus généralement tout réel de la suite u telle que $u_0 = z_0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$. Or cette suite est strictement croissante ce qui voudrait dire qu'on a une infinité de zéros ce qui est absurde ! Il résulte de ceci d'ailleurs sur $\mathbb{R}$, que P est de degré pair avec des zéros complexes conjugués.

• Démontrons que P est pair. Cela se fera par récurrence d'abord sur les entiers.

On a $P(-1)P(0) = P(1)$ et $P(0)P(1) = P(1)$. Or $P(1) \neq 0$ d'après ce qui précède donc $P(0) = 1$ ce qui fait que $P(-1) = P(1)$. De même $P(-2)P(-1) = P(3)$ et $P(2)P(1) = P(3)$ d'où $P(2) = P(-2)$.

Supposons que pour un $n \geqslant 1$ quelconque on ait $P(n-1) = P(-(n-1))$.

De $P(-n)P(-(n-1)) = P(n^2-n+1)$ et de $P(n-1)P(n) = P(n^2-n+1)$ vient avec l'hypothèse de récurrence (attention au fait que $P(n-1) \neq 0$) que : $P(n) = P(-n)$ d'où : sur les entiers, on a $P(n) = P(-n)$. On termine en disant que le polynôme $Q(x) = P(x) - P(-x)$ qui s'annule sur $\mathbb{N}$ est donc identiqument nul.

Passons à la recherche générale des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Soit P non constant ayant Ω pour ensemble de zéros compact non vide de $\mathbb{C}$; soit N de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que $N(z) = |z^2 + 1|$ (et c'est là que ça se complique par rapport au petit exemple de mise en bouche).

N admet son maximum M sur Ω atteint en u de Ω. Supposons $M > 0$ et voyons que c'est absurde ce qui démontrera que $\Omega \subset \{i \ ; \ -i\}$.

Comme ci-dessus on démontre que Ω est stable par $f_1 : z \mapsto z^2+z+1$ et aussi par $f_2 : z \mapsto z^2-z+1$. Pourquoi ? La relation fonctionnelle utilisée en remplaçant z par $z-1$ donne immédiatement $P(z)P(z-1) = P(z^2-z+1)$, ce qui assure que $P(z^2-z+1) = 0$ dès qu'on suppose que z est un zéro de P.

Calculons : $N(f_1(u)) = |(u^2+u+1)^2+1| = |u^1+1| \times |u^2+2u+2| \leqslant M$. Comme $M > 0$ en simplifiant on doit avoir : $|u^2 + 2u + 2| \leqslant 1$. (1)

De même (on pourrait faire les deux calculs en même temps avec $\pm$) : $N(f_2(u)) = |(u^2 - u + 1)^2 + 1| = |u^2 + 1| \times |u^2 - 2u + 2|$ d'où la relation $|u^2 - 2u + 2| \leqslant 1$. (2)

Si on sait résoudre (1) et (2), pas de problème on est heureux ; en fait les deux relations sont incompatibles et voyons pourquoi. Le raisonnement est grossier mais efficace.

On peut le refaire directement sur le cas qui nous occupe mais le résultat est général : si $|a+b| \leqslant 1$ et si $|a-b| \leqslant 1$ alors on a $|a| \leqslant 1$ et $|b| \leqslant 1$: on manipule des inégalités ou on fait un crob'art !

Appliquons cela avec $a = u^2 + 2$ et $b = 2u$. Ainsi obligatoirement, on a $|u^2+2| \leqslant 1$ et $|u| \leqslant 0{,}5$. Ces deux conditions sont incompatibles : en effet

$$1{,}75 = 2 - 0{,}25 \leqslant 2 - |u|^2 \leqslant |u^2+2| \leqslant 1.$$

L'hypothèse faite sur M est absurde donc $M = 0$. Ceci veut dire que $\Omega \subset \{i\ ;\ -i\}$.

Ω qui est non vide, contient donc l'un des deux complexes et par conséquent les deux, d'après sa stabilité par f_1 et f_2.

Il résulte que $P(z) = \lambda(z-i)^k(z+i)^l$. Comme P n'est pas constant, l'examen du terme de plus haut degré donne $\lambda^2 = \lambda$ soit $\lambda = 1$. Par ailleurs, P est pair donc $k = l$.

Nous avons trouvé ainsi que les seuls polynômes non constants, à coefficients dans $\mathbb{C}$ sont les $(z^2+1)^n$.

Plusieurs lecteurs m'ont envoyé une solution qui conduit correctement aux polynômes de la forme $(x^2+1)^n$, mais leurs démonstrations du fait que ce sont les seuls polynômes satisfaisant la relation donnée ne sont pas convaincantes.

Litres de vin

Problème n° 337 de *M&P* n° 161

Un tonneau contient 100 litres de vin. On le vide en utilisant deux récipients, l'un de 1 litre, l'autre de 2 litres. En tenant compte de l'ordre, de combien de manières peut-on vider ce tonneau ?

Solution de A. Lafort, de Nivelles

Le problème consiste à dénombrer toutes les sommes égales à 100 obtenues avec des 1 et des 2 par addition non commutative.

Le nombre 2 figure au minimum 0 fois et au maximum 50 fois. Quand 2 figure m fois, 1 figure $100-2m$ fois. Il y a alors $100-m$ termes au sein desquels les m nombres 2 varient en position : il y a donc $\binom{m}{100-m}$ possibilités. Le nombre total de possibilités est donc $\sum\limits_{m=0}^{50} \binom{m}{100-m}$.

Grâce à une proriété bien connue, on sait d'autre part que cette somme est égale à F_{101}, le 101^{e} terme de la suite de Fibonacci.

Solution de Cl. Villers, de Hyon
Désignons par $S(n)$ l'ensemble des sommes de valeur naturelle n.

Il est immédiat que $S(1) = \{1\}$, que $S(2) = \{1+1, 2\}$, que $S(3) = \{1+1+1, 2+1, 1+2\}$, que $S(4) = \{1+1+1+1, 1+2+1, 2+1+1, 1+1+2, 2+2\}$.

L'ensemble $S(n)$ comprend des sommes qui se terminent par 1 et des sommes qui se terminent par 2. Toutes les sommes qui se terminent par 1 peuvent être obtenues en écrivent 1 à la suite de chaque somme de $S(n-1)$ et toutes les sommes qui se terminent par 2 peuvent être obtenues en écrivant 2 à la suite de chaque somme de $S(n-2)$. Il est clair que par la manière de construire $S(n)$, ses sommes sont bien différentes et y sont toutes.

Dès lors : $\#S(n) = \#S(n-1) + \#S(n-2)$.

On sait que $\#S(1) = 1$ et $\#S(2) = 2$ et de proche en proche, on obtient $\#S(100) = 573\,147\,844\,013\,817\,000\,000$.

(Ndlr : Nous retrouvons dans cette seconde démonstration le résultat final de la précédente.)

Bonnes solutions de K. Chriaa, de Bruxelles, J. Ooms, de Chimay et J. Rasse, de Méan.

Petits oiseaux

Problème n° 338 de *M&P* n° 161

Dix petits oiseaux picorent sur un sol horizontal. Pour cinq quelconques d'entre eux, quatre au moins sont toujours situés sur un cercle. Quel est le nombre maximum et quel est le nombre minimum d'oiseaux situés sur le même cercle ?

Solution de J. Rasse, de Méan
Le maximum est 10 quand tous les oiseaux sont sur le même cercle.

Si un oiseau quitte le cercle, la condition d'avoir 4 oiseaux cocycliques est encore vérifiée. Si deux oiseaux quittent le cercle et s'alignent avec deux oiseaux du cercle, la condition n'est plus vérifiée. Le minimum est donc 9.

Bonne solution de A. Lafort, de Nivelles.

Aire

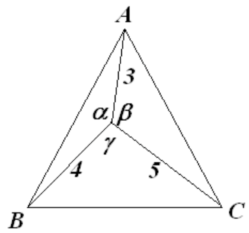
Problème n° 339 de *M&P* n° 161

Déterminer l'aire d'un triangle ABC *équilatéral sachant que les distances d'un point* P *intérieur au triangle aux trois sommets* A*,* B *et* C *sont respectivement* 3, 4 *et* 5.

Solution de K. Chriaa, de Bruxelles

Le triangle est équilatéral, son aire vaut $\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2$. Le théorème d'Al Kashi appliqué aux trois triangles (APB), (APC) et (BPC) fournit respectivement

$$\cos\alpha = \frac{25 - AB^2}{24}, \ \cos\beta = \frac{34 - AB^2}{30} \ \text{ et } \ \cos\gamma = \frac{41 - AB^2}{40}$$



(on a remplacé les longueurs des côtés AP, BP et CP par leurs valeurs ; α, β, γ sont les angles autour du point P avec $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$.)

D'autre part, on sait que

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi \Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma - 1 = 0$$

qui devient en remplaçant les cosinus par leurs expressions, en posant $AB^2 = x$ et moyennant quelques manipulations algébriques

$$x^3 - 50x^2 + 193x = 0.$$

La seule solution telle que $AB > 5$ est $x = AB^2 = 25 + 12\sqrt{3}$.

L'aire demandée vaut donc $\frac{25}{4}\sqrt{3} + 9$.

M'ont aussi envoyé de bonnes solutions : M. Blévot, de S[t] Denis (La Réunion), A. Lafort, de Nivelles, J. Ooms, de Chimay, A. Paternottre, de Boussu et R. Somville, de Fontaine-l'Évêque.

* *
*

Les solutions des problèmes que voici doivent me parvenir au plus tard deux mois après la parution de cette revue. Ces solutions peuvent être manuscrites, mais vous pouvez aussi les envoyer à mon adresse e-mail sous la forme d'un fichier LATEX ou à défaut au format doc, pdf ou txt. Rédigez vos différentes solutions sur des feuilles séparées et n'oubliez pas d'indiquer votre nom sur chacune des feuilles.

346. Géométrie

Un cercle comprend le sommet A d'un parallélogramme $ABCD$ et coupe le côté AB en P, le côté AD en R et la diagonale AC en Q. Démontrer que $|AQ| \cdot |AC| = |AP| \cdot |AB| + |AR| \cdot |AD|$.

347. Divisibilité

Démontrer que le produit

$$(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

est divisible par 12, pour tous nombres entiers a, b, c, d.

348. Fonction

On considère la suite

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots, \underbrace{n, n, \ldots, n}_{n \text{ nombres } n}, \ldots$$

Trouver une fonction f telle que le x^{e} terme de cette suite soit donné par $\lfloor f(x) \rfloor$, où $\lfloor a \rfloor$ est la *partie entière* de a, c'est-à-dire $\max(\mathbf{Z} \cap \,]-\infty\,; a\,])$.

Olympiades

Claudine Festraets [1]

La 48^eOlympiade Internationale de Mathématique s'est tenue cet été à Hanoï. Vous trouverez ci-dessous les énoncés des six problèmes proposés aux 520 concurrents. La Belgique s'est classée 45^e sur les 93 pays participants. Les résultats de l'équipe francophone sont les suivants : Bui Hoan--Phung (Athénée R. Catteau à Bruxelles), médaille de bronze, Jacqmin Pierre-Alain (Institut S^{te} Julie - S^t Laurent à Marche), médaille de bronze, Lu Anh Khoa Augustin (Collège S^t Benoît - S^t Servais à Liège), mention honorable.

Cette année encore les problèmes n'étaient pas faciles. Les problèmes 3 et 6 sont particulièrement ardus : un seul concurrent a donné une solution complète du problème 3 et 5 concurrents seulement ont résolu le problème 6.

Problème 1.
Soit n nombres réels a_1, a_2, ..., a_n. Pour chaque i ($1 \leqslant i \leqslant n$) on définit

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leqslant j \leqslant i\} - \min\{a_j : i \leqslant j \leqslant n\}$$

et on pose

$$d = \max\{d_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

(a) *Montrer que pour tous nombres réels $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$,*

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leqslant i \leqslant n\} \geqslant \frac{d}{2}. \qquad (\star)$$

(b) *Montrer qu'il existe des nombres réels $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ tels que $(\star)$ soit une égalité.*

Problème 2.
On donne cinq points A, B, C, D et E tels que $ABCD$ soit un parallélogramme et $BCED$ un quadrilatère convexe, inscriptible. Soit l une droite passant par A. On suppose que l coupe l'intérieur du segment DC en F et

[1] Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à Cl. Festraets, Rue J.-B. Vandercammen 36, B-1160 Bruxelles ou à l'adresse e-mail `hamoircl@brutele.be`.

coupe la droite BC en G. On suppose aussi que $EF = EG = EC$. Montrer que l est la bissectrice de l'angle $\widehat{DAB}$.

Problème 3.
Dans une compétition mathématique certains participants sont des amis. L'amitié est toujours réciproque. Un groupe de participants est appelé une clique si toute paire d'entre eux est formée de deux amis. (En particulier, chaque groupe d'au plus un participant constitue une clique.) Le nombre de participants dans une clique est appelé sa taille.

On suppose que, dans cette compétition, la plus grande taille des cliques est paire. Montrer que les participants peuvent être répartis dans deux pièces de telle sorte que la plus grande taille des cliques contenues dans une de ces pièces soit égale à la plus grande taille des cliques contenues dans l'autre.

Problème 4.
Dans un triangle ABC, la bissectrice de l'angle $\widehat{BCA}$ recoupe le cercle circonscrit en R, coupe la médiatrice de BC en P et la médiatrice de AC en Q. Le milieu de BC est K et le milieu de AC est L. Montrer que les triangles RPK et RQL ont la même aire.

Problème 5.
Soit a et b deux entiers strictement positifs. Montrer que si $4ab - 1$ divise $(4a^2 - 1)^2$, alors $a = b$.

Problème 6.
Soit n un entier strictement positif. Dans l'espace on considère l'ensemble

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\}, x + y + z > 0\},$$

constitué de $(n+1)^3 - 1$ points. Trouver le plus petit nombre de plans dont la réunion contient S mais ne contient pas $(0, 0, 0)$.

*   *
*

Voici à présent les meilleures solutions proposées aux problèmes de la finale MINI de l'OMB 2007.

1. *Dans ma classe, toutes les interrogations de mathématique sont notées sur 20. Ma moyenne jusqu'à présent était 12, mais avec le 17 que je viens d'obtenir, elle est passée à 13.*

(a) *Quelle doit être ma note à la prochaine interrogation pour que ma nouvelle moyenne soit 14 ?*

(b) *Cette moyenne de 14 peut-elle passer à 17 si j'obtiens 20 à toutes les interrogations suivantes ? Si oui, combien d'interrogations parfaites dois-je faire ?*

Solution de Mélanie Sedda, Centre scolaire S$^{\text{t}}$ Michel à Etterbeek

(a) Soit x le nombre d'interrogations faites lorsque la moyenne était de 12/20. Il a donc obtenu $12x$ points sur un total de $20x$.

$$\begin{aligned}\frac{12x+17}{20x+20} &= \frac{13}{20}\\ 12x+17 &= 13(x+1)\\ 12x+17 &= 13x+13\\ x &= 4\end{aligned}$$

Il avait donc réalisé 4 interrogations lorsque sa moyenne était de 12/20. Après sa cinquième interrogation, sa moyenne passe à 13/20. Pour qu'elle passe à 14/20, il doit obtenir 19/20 au prochain contrôle. En effet, soit y les points qu'il doit obtenir à ce 6$^{\text{e}}$ contrôle.

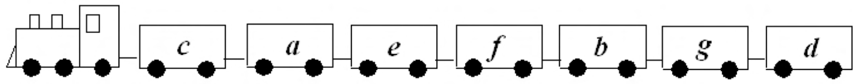
$$\begin{aligned}\frac{13\times 5+y}{20\times 5+20} &= \frac{14}{20}\\ 65+y &= 14\times 6\\ y &= 19\end{aligned}$$

(b) Soit z le nombre d'interrogations parfaites à réaliser pour que la moyenne soit de 17/20.

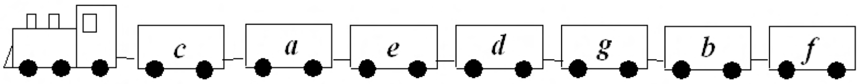
$$\begin{aligned}\frac{14\times 6+20z}{20\times 6+20z} &= \frac{17}{20}\\ 84+20z &= 102+17z\\ z &= 6\end{aligned}$$

Il doit donc réaliser 6 contrôles parfaits.

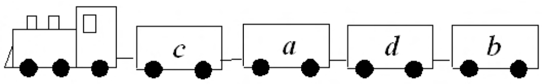
2. *Dans un centre ferroviaire, les installations permettent de détacher deux ou plusieurs des derniers wagons du train puis de les rattacher aux premiers wagons (ou à la locomotive, si aucun wagon n'a été laissé) après avoir inversé l'ordre des wagons détachés. Par exemple, le train représenté ci-dessous où on détache les quatre derniers wagons*



devient après une telle manœuvre



(a) *Trier les wagons d'un train consiste à replacer ces wagons dans un ordre bien déterminé après un certain nombre de manœuvres. Est-il possible de trier les wagons du train figuré ci-dessous pour obtenir l'ordre « a-b-c-d » ?*



Si oui, quel est le nombre minimum de manœuvres nécessaires ?

(b) *Est-il toujours possible de trier tous les wagons d'un train ? Expliquer votre réponse.*

(c) *Est-il toujours possible de trier un train de trois wagons en au plus une manœuvre ? En au plus deux manœuvres ? En au plus trois manœuvres ?*

Solution de Hugo Templier, Institut de la Providence à Champion

(a) Oui en quatre manœuvres :

1	:	c	b	d	a
2	:	a	d	b	c
3	:	a	d	c	b
4	:	a	b	c	d

(b) Oui car on peut toujours déplacer un wagon au bout du train pour ensuite le placer à n'importe quelle position. En appliquant cette méthode et en commençant par placer le 1er wagon de l'ordre, puis le 2e et ainsi de suite, on peut trier n'importe quel train.

(c) Avec 1 manœuvre : non car si le 1er wagon de l'ordre est au milieu, il faudrait 2 manœuvres pour le placer à l'avant.

Exemple	:	c	a	b
1e manœuvre	:	c	b	a
2e manœuvre	:	a	b	c

Avec 2 manœuvres : non car si le 1er wagon de l'ordre est au milieu et le 2e wagon de l'ordre en 1er lieu, il faudrait 3 manœuvres pour le placer.

Exemple 1	: b a c	ou	Exemple 2	: b a c
1^e manœuvre	: b c a		1^e manœuvre	: c a b
2^e manœuvre	: a c b		2^e manœuvre	: c b a
3^e manœuvre	: a b c		3^e manœuvre	: a b c

Avec 3 manœuvres : oui car quel que soit l'ordre des wagons, avec 3 manœuvres et 3 wagons, il y a toujours moyen d'appliquer la méthode décrite en (b).

3. *On désigne par $\overline{ab}$ un nombre où a est le chiffre des dizaines et b celui des unités. Il existe des nombres naturels $\overline{ab}$ et $\overline{cd}$ tels que a, b, c, d sont non nuls, tous différents et $\overline{ab} \times \overline{cd} = \overline{ba} \times \overline{dc}$, par exemple $21 \times 36 = 12 \times 63$.*

(a) *Trouver au moins deux autres exemples.*

(b) *Déterminer une relation générale qui lie a, b, c et d lorsque $\overline{ab} \times \overline{cd} = = \overline{ba} \times \overline{dc}$ et montrer qu'elle fournit toutes les solutions (a, b, c, d).*

(c) *Combien y a-t-il de solutions ?*

Solution de Alexandre Sanchez-Falcon, Collège du Christ-Roi à Ottignies

(a) $42 \times 21 = 84 \times 12 (= 1\,008)$ et $46 \times 32 = 64 \times 23\ (= 1\,472)$.

(b) On peut le faire sous forme d'équation ; mais il faut multiplier le chiffre des dizaines par 10.

$$\begin{aligned}
(10a + b)(10c + d) &= (10b + a)(10d + c)\\
100ac + 10ad + 10bc + bd &= 100bd + 10bc + 10ad + ac\\
100ac + bd &= 100bd + ac\\
99ac &= 99bd\\
ac &= bd
\end{aligned}$$

$ac = bd$ est donc la relation générale. On sait maintenant que les chiffres des dizaines multipliés entre eux sont égaux aux chiffres des unités multipliés entre eux. On peut donc déterminer les solutions.

(c) Couples de nombre $\overline{ab}$ et $\overline{cd}$.

Produit $ac = bd$	Couples de nombres
6	$12 \times 63 = 21 \times 36, 13 \times 62 = 31 \times 26$
8	$12 \times 84 = 21 \times 48, 14 \times 82 = 41 \times 28$
12	$24 \times 63 = 42 \times 36, 23 \times 46 = 32 \times 64$
18	$23 \times 96 = 32 \times 69, 26 \times 93 = 62 \times 39$
24	$34 \times 86 = 43 \times 68, 36 \times 84 = 63 \times 48$

4. *Le triangle ABC est rectangle avec $\widehat{ABC}$ mesurant $90°$. Le segment $[CP]$ est perpendiculaire à la droite AC et tel que $|CP| = |CB|$.*

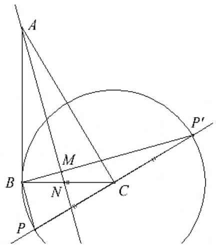
(a) *Si l'amplitude de l'angle* $\widehat{BAC}$ *vaut* $26°$, *est-il vrai que la bissectrice de l'angle* $\widehat{BAC}$ *est soit parallèle, soit perpendiculaire à la droite* BP *?*

(b) *Cette propriété reste-t-elle vraie si l'amplitude de l'angle* $\widehat{BAC}$ *ne vaut pas* $26°$ *?*

(c) *La bissectrice de l'angle* $\widehat{BAC}$ *est-elle toujours parallèle à* BP *? est-elle toujours perpendiculaire à* BP *?*

Solutions de Mélanie Sedda, Centre scolaire S$^{\mathbf{t}}$ Michel à Etterbeek ((a)) et François Staelens, Institut S$^{\mathbf{t}}$ Louis à Namur ((b) et (c))

(a) Il existe 2 points P et P'. La bissectrice de A coupe BP' en M.



- Dans le triangle ABC : $\widehat{ACB} = 180° - 26° - 90° = 64°$.

- Dans le triangle BCP' isocèle de sommet principal C : $\widehat{C} = 90° + 64° = 154°$ donc $\widehat{BP'C} = \widehat{CBP'} = \frac{1}{2}(180° - 154°) = 13°$.

- D'où $\widehat{ABP'} = 90° - 13° = 77°$, puis $\widehat{AMB} = 180° - 77° - 13° = 90°$.

Le segment BP' est donc bien perpendiculaire à la bissectrice de l'angle BAC.

- Le milieu de $[PP']$ est équidistant des 3 sommets du triangle BPP', d'où le triangle BPP' est rectangle en B. les droites AM et BP sont perpendiculaires à une même droite, elles sont parallèles entre elles.

(b) et (c) Supposons $\widehat{BAC} = a$ alors $\widehat{BCA} = 90° - a$ et $\widehat{PCB} = 90° - (90° - a) = a$.

Le triangle CBP est isocèle de sommet C puisque $|CP| = |BC|$, donc $\widehat{PBC} = \dfrac{1}{2}(180° - a) = 90° - a/2$.

La bissectrice de $\widehat{BAC}$ coupe BC en N donc $\widehat{BAN} = a/2$ et $\widehat{BNA} = 90° - a/2$.

Les angles $\widehat{PBC}$ et $\widehat{BNA}$ sont des angles alternes-internes de même amplitude déterminés par les droites AN et PB et la sécante BN, donc $AN//PB$.

On a aussi $\widehat{BCP'} = \widehat{BCA} + 90° = (90° - a) + 90° = 180° - a$.

Le triangle BCP' est isocèle puisque $|CP'| = |CB|$, donc $\widehat{CBP'} = \frac{1}{2}(180° - (180° - a)) = a/2$. D'où $\widehat{P'BA} = 90° - a/2$.

Dans le triangle BMA, les angles $\widehat{BAM}$ et $\widehat{P'BA}$ sont complémentaires donc BM est perpendiculaire à AM.

Le coin du trésorier

R. Scrève

Tarifs (Janvier 2006)

Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent *Mathématique et Pédagogie*, *SBPM-Infor* et les deux *Math--Jeunes*.

- Belgique :
  - Cotisation ordinaire : 24 € ;
  - Cotisation multiannuelle (5 ans) : 110 € ;
  - Cotisation familiale (réservée aux couples cohabitant ; les intéressés ne reçoivent qu'un exemplaire des publications, mais sont membres à part entière et participent donc aux élections) : 30 € ;
  - Cotisation réduite (réservée aux étudiants et aux sans-emploi) : 15 € ;
- Europe : 65 € (non-PRIOR), 72 € (PRIOR) ;
- Autres pays : 70 € (non-PRIOR), 79 € (PRIOR).

Abonnement à *Mathématique et Pédagogie*

- Belgique : 30 € ;
- Europe : 50 € (non-PRIOR), 54 € (PRIOR) ;
- Autres pays : 53 € (non-PRIOR), 58 € (PRIOR).

Anciens numéros :
- $<$ 2005 : 0,75 €/n° + frais d'expédition.
- $\geqslant$ 2005 : 2,50 €/n° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : Belgique : 1,80 €, Europe : 4,50 €, Autres pays : 6 €.

Abonnement à *Math-Jeunes* ou *Math-Jeunes Junior*

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, supérieur et inférieur respectivement, sont idéalement pris de manière groupée par l'intermédiaire d'un professeur.

- Abonnements groupés (au moins 5) :
  - Abonnements groupés à une des revues (3 numéros) Belgique : 4 € ;
  - Abonnements groupés aux deux revues (6 numéros) Belgique : 8 €.

- Abonnements individuels :
  - Abonnements à une des revues (3 numéros)
    Belgique : 6 € ;
    France : 8 € (à prendre par l'intermédiaire de l'APMEP) ;
    Europe : 18 € (non-PRIOR), 20 € (PRIOR) ;
    Autres pays : 19 € (non-PRIOR), 22 € (PRIOR).
  - Abonnements aux deux revues (6 numéros)
    Belgique : 12 € ;
    France : 16 € (à prendre par l'intermédiaire de l'APMEP) ;
    Europe : 24 € (non-PRIOR), 26 € (PRIOR) ;
    Autres pays : 25 € (non-PRIOR), 28 € (PRIOR).

Anciens numéros :
- $\leqslant$ 2003–2004 : 0,25 €/n° + frais d'expédition.
- $\geqslant$ 2004–2005 : 0,50 €/n° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : Belgique : 1,50 €, Europe : 2,50 €, autres pays : 3 €.

Bulletin de l'APMEP

Les membres de la SBPMef peuvent, par versement à son compte, devenir membres de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (France). Le prix de l'abonnement est de 50 €. Ils recevront le *Bulletin* de l'APMEP, le BGV (*Bulletin à Grande Vitesse*) et *PLOT*.
Les membres de la SBPMef peuvent aussi commander par celle-ci les publications de l'APMEP ; ils bénéficient du prix « adhérents ».

Autres publications (brochures et CD-ROM)

Les prix indiqués sont les prix des publications ; les frais d'expédition (port et emballage) sont en sus. Les prix réduits sont réservés aux membres de la SBPMef ou de sociétés associées (comme l'APMEP) et aux étudiants. N'hésitez pas à consulter notre secrétariat ou à visiter notre site Internet.
Pour toutes nos publications non périodiques, à partir du dixième exemplaire, toute la commande bénéficie d'une réduction de 10 %.

Modalités de paiement :

Pour effectuer une commande, versez le montant indiqué sur un des comptes suivants :
- **Si vous habitez en Belgique :** Compte 000-0728014-29 de SBPMef.
- **Si vous habitez en France :** Compte CCP Lille 10 036 48 S de SBPMef.
- **Si vous habitez ailleurs :** Virement international sur l'un de nos deux comptes avec les références internationales suivantes :
  CCP BELGIQUE : IBAN BE26 0000 7280 1429 / BIC BPOTBEB1
  ou CCP LILLE :
  IBAN FR68 2004 1010 0510 0364 8S02 683 / BIC PSSTFRPPLIL

	Prix plein	Prix réduit	Frais d'expédition
Séries RÉNOVER			
Série 1 (n° 12)	1 €	—	T1
Série 2 (n^{os} 7–11 & 13)	5 €	—	T2
Série 3 (n° 14)	5 €	—	T2
Les 3 séries	7,50 €	—	T2
Dossiers d'exploration didactique			
Dossier 2 : *Autour du PGCD*	1,80 €	1,20 €	T1
Dossier 3 : *Isomorphisme et Dimension*	1,80 €	1,20 €	T1
Dossier 6 : *Statistique*	7,40 €	6 €	T1 (1)
Dossier 7 : *Vers les infiniment petits* (Simone Trompler et Guy Noël)	6 €	—	T1
Dossier 8 : *La démonstration en géométrie plane dans les premières années l'enseignement secondaire* (Claude Villers *et al.*)	9 €	—	T2 (2)
Dossier 9 : *Des démonstrations à la rencontre des compétences à travers de thèmes* (Claude Villers *et al.*)	9 €	—	T2 (2)
Dossier 10 : *Narrations de recherche — De la théorie à la pratique dans les enseignements secondaire et supérieur* (Jacques Bair, Jean--Claude Delagardelle, Valérie Henry)	6 €	—	T1
Jacques Bair, *Mathématique et Sport*	5 €	3,70 €	T1
François Jongmans, *Eugène Catalan, Géomètre sans patrie, ...*	12 €	9,50 €	T2
G. Robert, CD-ROM, logiciels mathématiques	5 €	—	T1
Recueils de questions des OMB			
Tome 5	6 €	—	T1 (1)
Tome 6	6 €	—	T1 (1)
Tomes 5 & 6 ensemble	10 €	—	T1 (1)

(1) 2–3 ex. : T2 ; 4–6 ex. : T3 ; 7–12 ex. : T4 ; au-delà : consulter le secrétariat.
(2) 2 ex. : T3 ; 3–4 ex. : T4 ; au-delà : consulter le secrétariat.

Frais d'expédition (non-PRIOR)

	Belgique	Europe	Autres pays
Tarif 1	1,80 €	4,50 €	6 €
Tarif 2	3,50 €	8,50 €	12 €
Tarif 3	5 €		
Tarif 4	7 €		

Pour les expéditions PRIOR : consulter le secrétariat.

Pour la définition d'« Europe », voir les tarifs postaux.

Pour tout problème, consulter le secrétariat.