

**Société Belge des Professeurs de Mathématique
d'expression française**

Secrétariat : *M.-C. Carruana*, Rue du Onze novembre 24, B-7000 Mons (Belgique). Tél. : 32.(0)65.31.91.80 ; courriel : sbpm@sbpm.be.

Site internet : <http://www.sbpm.be>

Conseil d'administration : *B. Baudelet, M. Denis-Pecheur, É. Deridiaux, P. Dupont, D. Foucart, M. Frémal, Chr. Géron, M. Goffin, R. Gossez-Ketels, M. Herman, J.-P. Houben, R. Lesplingart-Midavaine, M. Machtelings, Chr. Michaux, J. Miéwis, N. Miéwis-Seronveaux, Ch. Randour-Gabriel, R. Scrève, Ph. Skilbecq, G. Troessaert, Y. Vancaster*

**Président,
Olympiades Internationales :**
G. Troessaert, Sur le Chêne 58,
6800 Libramont, Tél. 061.22.42.01

Vice-Présidents : *M. Herman*,
Rue Rafhay 95, 4630 Soumagne,
Tél. 087.26.70.23 ;
D. Foucart, Rue du Colroy 18,
7050 Herchies

Administrateur délégué :
Chr. Michaux, Rue Brigade Piron
290, 6061 Montignies-sur-Sambre,
Tél. 065.35.47.06

Congrès, Publicité :
M. Denis-Pecheur, Rue de la Ferme
11, 5377 Noisieux (Somme-Leuze),
Tél. 086.32.37.55

Trésorier : *R. Scrève*,
Rue des Goutteaux 6, 6032 Mont-sur-
Marchienne, Tél. 071.40.27.34

Secrétaire : *M. Frémal*,
Rue W. Jamar 311/51, 4430 Ans, Tél.
04.263.68.17

Olympiades nationales :
Cl. Festraets-Hamoir, Rue J.-B.
Vandercammen 36, 1160 Bruxelles
Tél. 02.673.90.44

Contact Presse :
N. Miewis-Seronveaux, Avenue de
Péville 150, 4030 Grivegnée
Tél. 04.343.19.92

Math-Jeunes Junior :
A. Paternotte, Rue du Moulin 78,
7300 Boussu, Tél. 065.78.50.64

Math-Jeunes Senior : *G. Noël*,
Rue de la Culée 86, 6927 Resteigne,
Tél. 084.38.72.89

SBPM-Infor : *R. Gossez*,
Albert I Laan 13, 1560 Hoeilaart, Tél.
02.657.98.92

Site Internet : *R. Lesplingart*, Rue
de Trazegnies 87, 6230 Pont-à-Celles,
Tél. : 071.84.36.08

Mathématique et Pédagogie :

P. Dupont, Rue du Stampia 77, 1390 Grez-Doiceau, Tél. 010.84.11.99

Comité de lecture : *J. Bair, A.-M. Bleuart, M. Denis-Pecheur, V. Henry, M. Herman, J.-P. Houben, Chr. Michaux, J. Miewis, J. Navez, G. Noël, Ph. Skilbecq, Cl. Villers*

Photo de couverture : *Pavage de la sphère obtenu par projection centrale d'un hexa-
kioctaèdre (Bruxelles)*; décembre 2007 — Photo P. Dupont



Mathématique et Pédagogie

Sommaire

Articles

- Damien Duvivier, Olivier Van Overschelde, Michel Wautelet, *Nanogéométrie* 3
- Christian Radoux, *Généralisation d'un théorème de Martin Aigner sur les nombres de Motzkin* 23
- Charlotte Bouckaert, Francis Buekenhout, Claude Culus, Monique Frédérickx, Annie Goovaerts, Jacqueline Sengier, *Bidroites* 31
- François Drouin, *Mathématiques et créativité ne sont pas incompatibles...* 41

Rubriques

- M. Herman, *Bibliographie* 51
- C. Festraets, *Problèmes* 53
- C. Festraets, *Olympiades* 59
- R. Scrève, *Le coin du trésorier* 69

NOTE

- Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse :
Pascal Dupont, Rue du Stampia 77, B - 1390 Grez-Doiceau.
Courriel : `pascal.dupont@ulg.ac.be`
- Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique *stricto sensu*, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques, &c.
- Les auteurs sont responsables des idées qu'ils expriment. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.
- Les auteurs sont invités à envoyer leurs articles encodés sur un CD-rom ou par courrier électronique. L'usage de L^AT_EX est vivement recommandé ; d'autres traitements de texte ne devraient être utilisés que pour des textes ne comportant pas de formules ; dans ce cas, le format « texte seul » est finalement encore préférable. À défaut, les textes seront dactylographiés. *Les textes devant être réencodés, en tout ou en partie, risquent de voir leur délai de parution allongé de manière appréciable.*
- Si l'article en contient, la qualité des figures est extrêmement importante. Elles devraient être réalisées selon l'une des modalités suivantes, dans l'ordre des préférences décroissantes : l'usage, dans le texte, de l'environnement « tikzpicture » (défini dans le paquet « tikz ») ; l'inclusion de fichiers externes, au format PDF ou JPEG (éviter les compressions trop importantes) : le PostScript devra être converti ; dans le cas d'un article envoyé sur papier, des documents de bonne qualité et prêts à être scannés.
- L'auteur mentionnera dans l'article ses prénom, nom et adresse (personnelle ou professionnelle) ainsi que l'institution où il travaille et, éventuellement, une liste de mots clés (10 maximum).
- La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous.
Pour les livres :
DIEUDONNÉ J., *Foundations of Modern Analysis*, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pp.
Pour les articles :
GRIBAUMONT A., Les structures de programmation, *Mathématique & Pédagogie*, **36** (1982), 53–56.
- Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée ; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour ce faire.
- MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

©SBPMef - Toute reproduction partielle ou totale est interdite sans autorisation.
Éditeur responsable : Pascal Dupont, Rue du Stampia 77, 1390 Grez-Doiceau.
Publié avec l'appui de l'Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Service général du Pilotage du système éducatif.

Nanogéométrie

**DAMIEN DUVIVIER,
OLIVIER VAN OVERSCHELDE,
MICHEL WAUTELET**
Université de Mons-Hainaut

D'après de nombreux scientifiques, le XXI^e siècle pourrait bien être celui d'une nouvelle ère industrielle : celle des technologies du petit, des nanotechnologies, basées sur les sciences du petit, les nanosciences. Rien d'étonnant dès lors à ce que les nanosciences et nanotechnologies (NST) constituent un secteur de recherches majeur de par le monde. Dans ces NST, les nanoparticules jouent un rôle essentiel. Leurs propriétés sont différentes de celles de la matière à notre échelle. La géométrie des nanoparticules est nécessaire pour en comprendre les raisons. Dans cet article, nous allons présenter les principales formes géométriques des nanoparticules (amas polyédriques, fullerènes, nanotubes), afin de mettre en évidence les relations avec des propriétés physiques et chimiques.

1. Nanosciences et nanotechnologies

Qu'est-ce que les nanosciences et nanotechnologies ? D'après la *Royal Society* britannique, la « nanoscience » est l'étude des phénomènes et la *manipulation* des matériaux aux échelles atomique, moléculaire et macromoléculaire, où les propriétés diffèrent significativement de celles à plus grande échelle. Les « nanotechnologies » sont la conception, la caractérisation, la production et l'application de structures, dispositifs et systèmes par contrôle de la forme et de la taille à l'échelle nanométrique.

Cela fait longtemps que les physiciens, chimistes, biologistes, ingénieurs étudient et utilisent des entités de taille nanométrique. Les atomes, molécules, virus, colloïdes, etc. ont une taille nanométrique. La particularité

Adresses des auteurs : Université de Mons-Hainaut, Faculté des Sciences, Avenue Mais-
triaux 23, 7000 Mons ; courriel : michel.wautelet@umh.ac.be.

Texte de l'atelier présenté lors du Congrès de la SBPMef à Mons, le 23 août 2007.

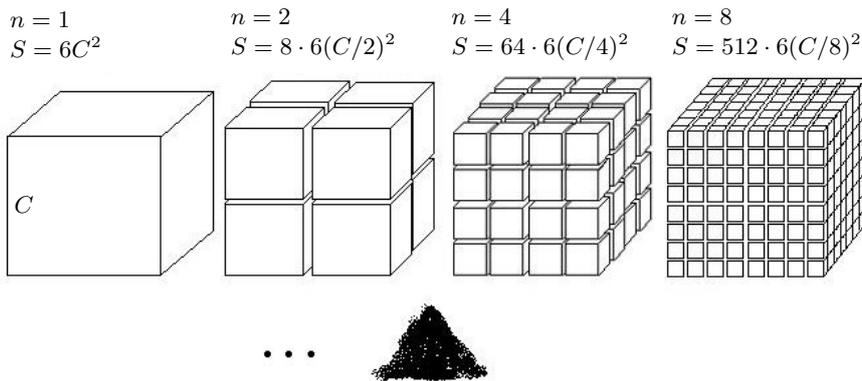
des NST est la manipulation et le contrôle des entités nanométriques, individuellement (ou presque). De plus, les propriétés des nanosystèmes (dont les nanoparticules) diffèrent significativement de celles à plus grande échelle, par deux effets principaux : les effets de taille et les effets quantiques. Dans ce travail, nous ne traiterons pas des effets quantiques, qui sont hors du champ de l'enseignement secondaire.

Pour appréhender le nanomonde, il existe deux approches opposées. Suivant l'approche « top-down » (de haut en bas), on examine comment les propriétés varient lorsque la taille diminue. À l'opposé, selon l'approche « bottom-up » (de bas en haut), on part de l'atome et de la molécule et on augmente progressivement le nombre d'atomes pour arriver à des nanosystèmes. Nous allons utiliser successivement ces deux approches.

2. Effets de taille : approche « top-down »

2.1. Aire spécifique de nanocubes

Prenons un cube de côté C , découpons-le en huit cubes identiques et recommençons le découpage sur les huit cubes ainsi obtenus. Recommençons l'itération jusqu'à obtenir une « poudre de nanocubes ». L'aire totale de tous



les cubes (à volume total égal), en fonction des itérations, (n est le degré de découpage, et représente le nombre de cubes présents sur un côté : $n = 1$,

2, 4, 8, ...) est donnée par :

$$S = \left(\frac{C}{n}\right)^2 \cdot 6 \cdot n^3$$

Le volume total est donné par $V = C^3$. Le rapport surface volume est donc donné par :

$$\frac{S}{V} = \frac{6n}{C}$$

On remarque donc que plus on découpe un objet en objets plus petits, plus le rapport S/V augmente. Cela implique que, lorsque des processus physiques (adsorption de gaz) ou chimiques (réactions, catalyse hétérogène) ont lieu à la surface de grains, le taux de « réaction » croît lorsque la taille des grains diminue.

2.2. Aire spécifique d'une nanopoudre de carbone

Quelle est l'aire totale d'une poudre (de masse égale à 1 g) formée de nanoparticules sphériques de carbone de rayon $r = 10$ nm? Cette aire est appelée *aire spécifique*.

Le rapport S/V d'une sphère est donné par : $S/V = 3/r$ où r est le rayon de la sphère. Pour un rayon de 10 nm, $S/V = 3 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1}$.

Sachant qu'un mètre cube de carbone pèse $2,26 \cdot 10^3$ kg, on obtient l'aire spécifique :

$$S/m = 133 \text{ m}^2/\text{g}$$

C'est-à-dire que pour un gramme de nanoparticules, nous avons à notre disposition 133 m^2 de surface disponible pour filtrer l'air ambiant, par exemple.

2.3. Adsorption de gaz sur des nanoparticules de carbone

Le fait que l'aire spécifique des poudres de nanoparticules soit grande est utilisée dans de nombreux cas, comme les masques à gaz, la catalyse hétérogène, et de nombreux cas où les réactions chimiques ont lieu à la surface de nanoparticules.

Quelle quantité de gaz (on choisira ici l'azote) s'adsorbe sur un masque à gaz à base de nanoparticules sphériques de carbone de rayon $r = 10$ nm? Une molécule d'azote occupe une aire de $0,162 \text{ nm}^2$.

Sur une aire de 133 m^2 peuvent s'adsorber $0,82 \cdot 10^{21}$ molécules, soit $1,3 \cdot 10^{-3}$ moles d'azote. Sachant qu'à pression et température normale, un gaz occupe un volume de 22,4 litres (loi des gaz parfaits : $PV = nRT$), on obtient que le volume de gaz adsorbé est de 0,032 litre par gramme de carbone (sous forme de nanoparticules).

2.4. Combien d'atomes y-a-t-il aux sommets, sur les arêtes, les faces et à l'intérieur d'un cube ?

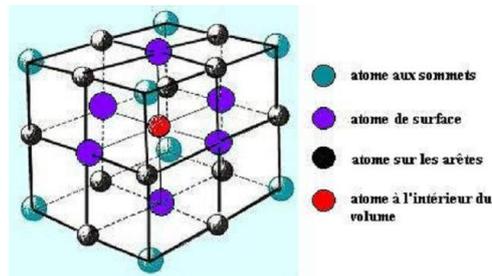
Considérons un système cubique simple. Soit un cube comportant N atomes par arête. Combien y-a-t-il d'atomes *uniquement* sur les sommets (S), les arêtes (A) (à l'exclusion de ceux sur les sommets), les faces (F) (à l'exclusion de ceux sur les sommets et les arêtes) ou à l'intérieur du cube (I) ?

Sur les sommets : $S = 8$

Sur les arêtes : $A = 12 \times (N - 2)$

Sur les faces : $F = 6 \times (N - 2)^2$

À l'intérieur : $I = (N - 2)^3$



On vérifie que le nombre total d'atomes T est tel que : $T = S + A + F + I = N^3$.

2.5. Réactivité des nanoparticules

La répartition des atomes entre sommets, arêtes et faces (cf. 2.4.) joue un rôle dans de nombreuses propriétés physiques et chimiques des nanoparticules. Par exemple, dans certains cas, la réactivité chimique des atomes est liée aux nombres de liaisons non satisfaites ou « pendantes ». Ces nombres dépendent de la position des atomes dans le cube. La réactivité chimique est alors fonction de la taille des nanoparticules. Comment varient les réactivités de poudres de nanoparticules cubiques (cf. 2.4.) en fonction du degré de découpage, n (cf. 2.1.) ? Soit d_0 le diamètre d'un atome. On a $N \cdot d_0 = C/n$.

Le taux de réactions ayant lieu sur les sommets est proportionnel au nombre de sommets dans la poudre, soit :

$$S_{\text{tot}} = 8/N^3 \div n^3.$$

De la même manière, les taux de réaction ayant lieu sur les arêtes ou sur les faces sont proportionnels, respectivement à :

$$A_{\text{tot}} = 12(N - 2)/N^3 \simeq 12N/N^3 = 12/N^2 \div n^2,$$
$$F_{\text{tot}} = 6(N - 2)^2/N^3 \simeq 6N^2/N^3 = 6/N \div n.$$

On s'aperçoit que les vitesses des réactions varient différemment selon la taille des nanoparticules. Le même raisonnement peut être fait pour d'autres formes géométriques. On s'aperçoit alors que les vitesses des réactions dépendent aussi de la forme géométrique des nanoparticules.

3. De l'atome à la nanoparticule : approche « bottom-up »

Considérons maintenant l'approche « bottom-up ». Examinons comment se placent les atomes les uns par rapport aux autres, lorsque leur nombre, N , augmente. Nous allons supposer que les atomes peuvent être décrits comme étant des sphères dures.

3.1. Nanogéométrie à deux dimensions

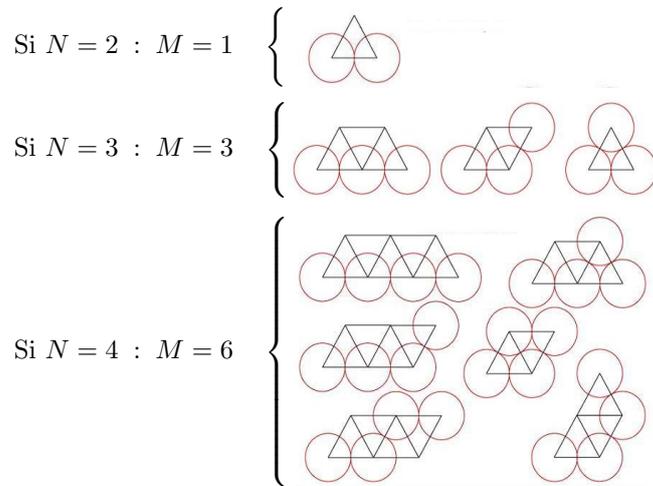
Dans une première étape, examinons comment les atomes peuvent s'arranger dans un plan (donc à deux dimensions).

3.1.1. Atomes sur un réseau triangulaire plan

Supposons que les atomes s'arrangent selon un réseau triangulaire plan, dans lequel ils occupent les sommets de triangles. De combien de manières (M), N atomes identiques peuvent-ils se placer, relativement l'un à l'autre, lorsqu'ils se touchent ?

N.B. : On supposera identiques deux configurations déduites l'une de l'autre

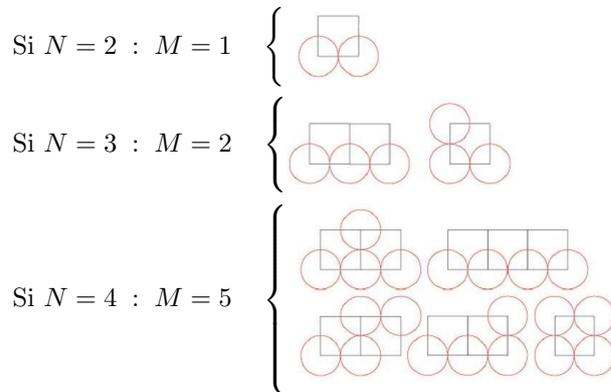
par des opérations de symétrie (rotations, miroirs).



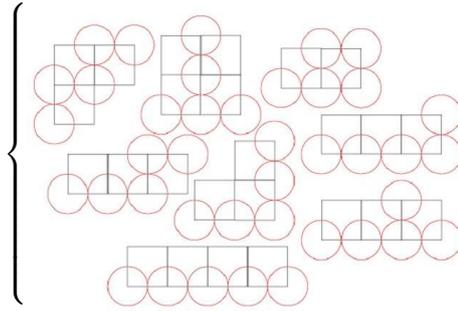
3.1.2. Atomes sur un réseau carré plan

Supposons que les atomes s'arrangent selon un réseau carré plan, dans lequel ils occupent les sommets de carrés. De combien de manières (M), N atomes identiques peuvent-ils se placer, relativement l'un par rapport à l'autre, lorsqu'ils se touchent ?

N.B. : On supposera identiques deux configurations déduites l'une de l'autre par des opérations de symétrie (rotations, miroirs).



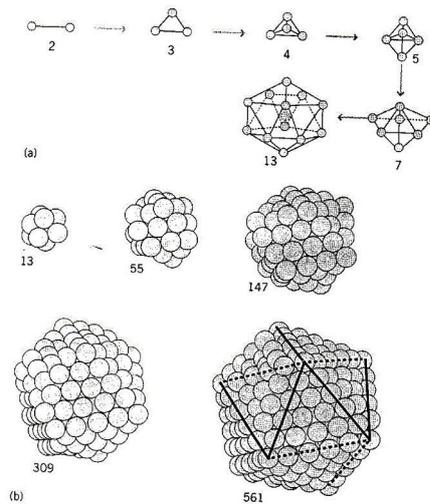
Si $N = 5 : M = 8$



Ces exemples démontrent que, pour un nombre fixé d'atomes, plusieurs configurations géométriques sont possibles, et que le nombre de configurations dépend du réseau sur lequel les atomes s'arrangent. Ceci se généralise à trois dimensions.

3.2. Nanogéométrie à trois dimensions

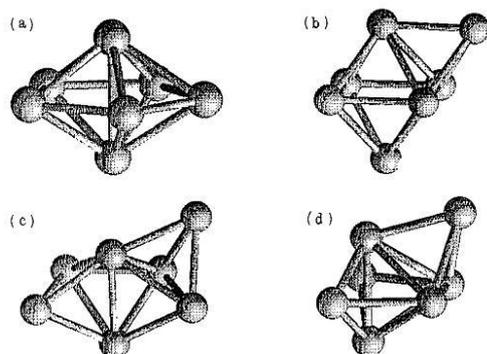
Soit N le nombre d'atomes dans un amas. Lorsque N croît, l'arrangement géométrique des atomes varie. Quelques exemples sont montrés sur la figure.



Lorsque N est suffisamment grand, plusieurs arrangements géométriques sont possibles pour la même valeur de N . Pour connaître la structure qui sera effectivement observée, des calculs des énergies de liaison des différentes structures sont nécessaires (voir plus loin).

Par exemple, lorsque $N = 6$, deux structures sont énergétiquement possibles : une structure stable (l'octaèdre), et une structure métastable (la tripyramide).

Lorsque $N = 7$, le nombre de structures possibles est de quatre, correspondant aux structures montrées sur la figure suivante.

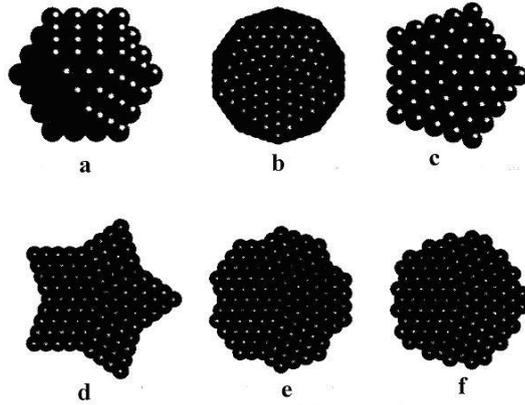


Structures atomiques stables et métastables des amas de 7 atomes : (a) bipyramide pentagonale ; (b) octaèdre plus un ; (c) structure tordue ; (d) groupement de tétraèdres.

Le nombre de structures possibles croît rapidement avec N :

N	6	7	8	9	10	11	12	13
Nombre de structures	2	4	8	18	57	145	366	988

Lorsque la taille augmente pour atteindre quelques centaines d'atomes, des formes géométriques régulières sont souvent observées. Les formes les plus souvent observées, et aussi les plus intéressantes, sont illustrées sur la figure. Il s'agit du cuboctaèdre, de l'icosaèdre, du décaèdre régulier, du décaèdre en étoile, du décaèdre tronqué de Marks et du décaèdre « arrondi ». Les décaèdres sont des dérivés de la même forme. Ils correspondent à une des formes les plus souvent observées, car très stables. Ces formes géométriques sont observées avec de nombreux métaux, ainsi que le silicium. La structure



Forme d'amas les plus souvent observées : (a) cuboctaèdre ;
 (b) icosaèdre ; (c) décaèdre régulier ; (d) décaèdre en étoile ;
 (e) décaèdre de Marks ; (f) décaèdre arrondi.

icosaédrique est observée pour des particules de dimensions comprises entre 1 nm et 100 nm.

Les structures dépendent notamment de l'arrangement des atomes entre eux. Par exemple, lorsque les atomes s'arrangent selon un réseau cubique à faces centrées (structure compacte formée de sphères identiques), on obtient les arrangements repris dans la figure de la p. suivante.

3.3. Relation d'Euler

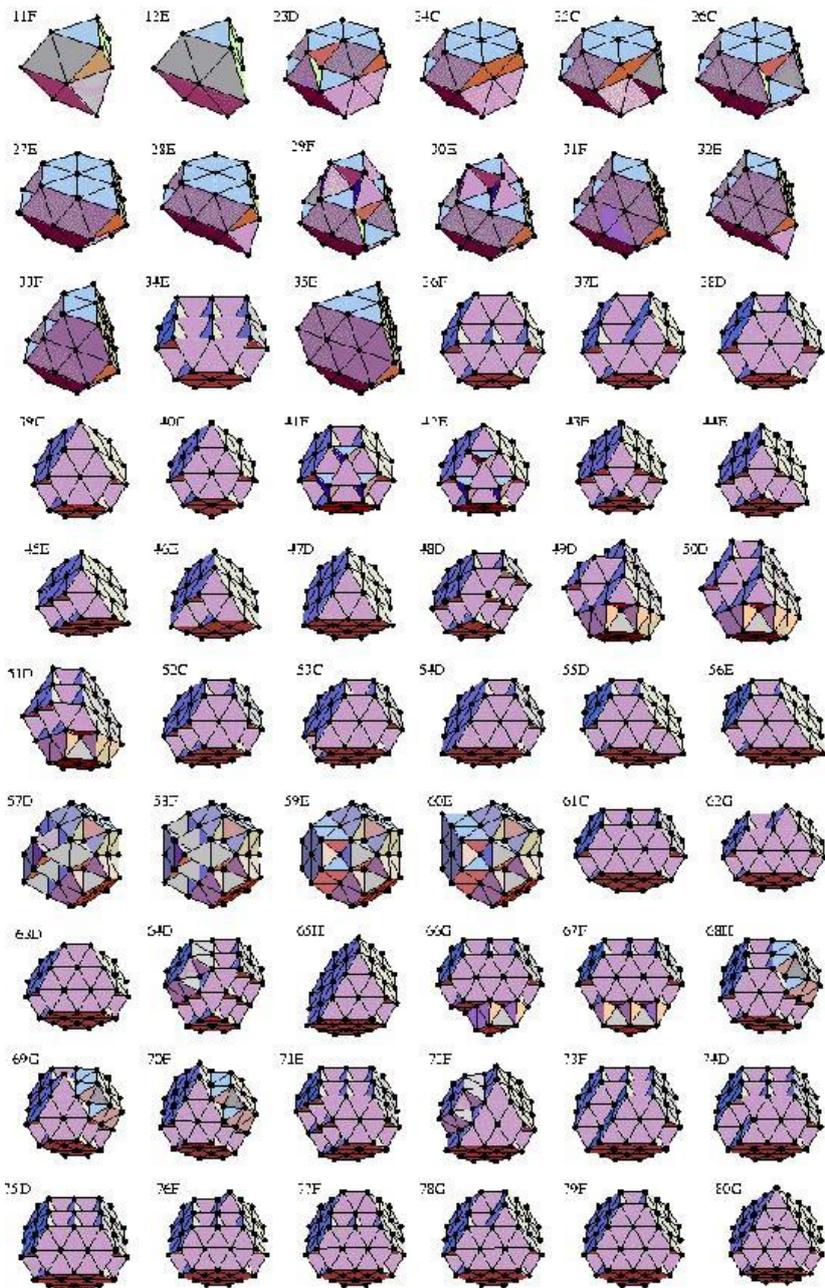
Les nanoparticules libres (non attachées à un substrat) se présentent souvent sous forme de polyèdres réguliers. Ces polyèdres peuvent être convexes ou non.

Les polyèdres convexes sont bien connus des mathématiciens. Ils satisfont à la relation d'Euler. Soit un polyèdre convexe comportant S sommets, A arêtes et F faces. La relation d'Euler est :

$$F - A + S = 2 \tag{1}$$

On vérifie aisément que les cinq solides de Platon satisfont à la relation d'Euler. Les solides de Platon sont le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le

Nanogéométrie



dodécaèdre et l'icosaèdre. Ces formes sont souvent observées, en cristallographie et en nanotechnologies.



Forme géométrique	F	A	S
Tétraèdre	4	6	4
Cube	6	12	8
Octaèdre	8	12	6
Dodécaèdre	12	30	20
Icosaèdre	20	30	12

Notons que le cube et l'octaèdre ont le même nombre d'arêtes, et que le nombre de faces de l'un est égal au nombre de sommets de l'autre. Idem pour le dodécaèdre et l'icosaèdre.

Les formes décrites précédemment (tétraèdres) satisfont aussi aux relations d'Euler.

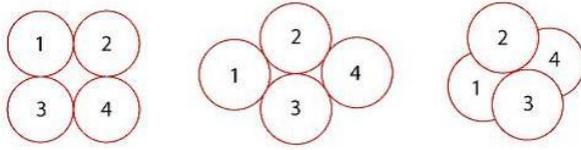
3.4. Stabilité des amas d'atomes

Lorsque plusieurs structures sont géométriquement possibles, déterminer celle qui sera effectivement observée demande d'en calculer l'énergie. Considérons un cas simple. Supposons que les atomes constituant les amas soient des sphères dures, de rayon r . Les atomes étant neutres, leur interaction est décrite par un potentiel de type Van der Waals. L'énergie d'interaction entre les atomes i et j est donnée par :

$$U_{ij} = -C/d_{ij}^n,$$

où d_{ij} est la distance entre les centres des atomes i et j ; n est une constante ($n \simeq 6$). Le signe « $-$ » indique que l'interaction est attractive.

Dans le cas d'un amas de 4 atomes, quelle est la structure stable ? On comparera les cas où les 4 atomes se disposent a) en carré ; b) en losange, avec 2 atomes qui se touchent et les 2 autres ne se touchent pas ; c) en tétraèdre.



L'énergie totale d'interaction est la somme des U_{ij} sur toutes les paires d'atomes :

$$U_{\text{tot}} = \sum_i \sum_{j>i} U_{ij} = -C \sum_i \sum_{j>i} \frac{1}{d_{ij}^n}.$$

- a) Carré : $d_{12} = d_{13} = d_{24} = d_{34} = 2r$, $d_{14} = d_{23} = 2\sqrt{2}r$;
 $U_{\text{tot}} = -C(2r)^{-n} \times (4 + 2/\sqrt{2}^n).$
- b) Losange : $d_{12} = d_{13} = d_{23} = d_{24} = d_{34} = 2r$, $d_{14} = 2\sqrt{3}r$;
 $U_{\text{tot}} = -C(2r)^{-n} \times (5 + 1/\sqrt{3}^n).$
- c) Tétraèdre : $d_{12} = d_{13} = d_{14} = d_{23} = d_{24} = d_{34} = 2r$;
 $U_{\text{tot}} = -C(2r)^{-n} \times 6.$

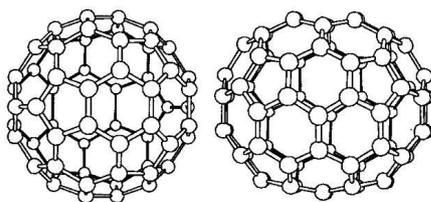
La structure la plus stable est celle pour laquelle U_{tot} est la plus faible (dont la grandeur est la plus importante). Il s'agit donc du tétraèdre. La même méthode est utilisée pour comparer la stabilité d'amas plus importants, tels ceux mentionnés plus avant. Néanmoins, pour la plupart des structures (notamment avec des axes de symétrie d'ordre 5), d'autres termes interviennent, comme les énergies de déformation. Ce qui rend les calculs exacts plus complexes.

4. Fullerènes et autres systèmes creux

À part les amas compacts décrits ci-avant, des structures creuses ont récemment été découvertes.

4.1. Fullerènes

Découverts en 1985, les fullerènes sont des structures d'atomes de carbone, en cage fermée, faite d'un assemblage de pentagones et d'hexagones.



Fullerènes : structures du C_{60} et du C_{70} .

Cette structure a été baptisée *fullerène*, du nom de l'architecte R. Buckminster Fuller, qui construisait des dômes formés de pentagones et d'hexagones. Il s'agit d'une structure essentielle en nanosciences et nanotechnologies, de par ses impressionnantes propriétés physiques et chimiques.

Les fullerènes satisfont à la relation d'Euler. Les structures des fullerènes sont des polyèdres convexes, avec H hexagones et P pentagones. Dès lors :

$$F = H + P, \quad (2)$$

$$2A = 6H + 5P, \quad (3)$$

$$3S = 6H + 5P. \quad (4)$$

Le facteur 2 dans (3) provient du fait qu'une arête est commune à deux polygones. De même, le facteur 3 dans (4) provient de ce qu'un sommet est commun à trois polygones.

Reportant ces équations dans la relation d'Euler (1), on obtient que :

$$P = 12. \quad (5)$$

La valeur de H dépend des conditions que l'on se donne pour S :

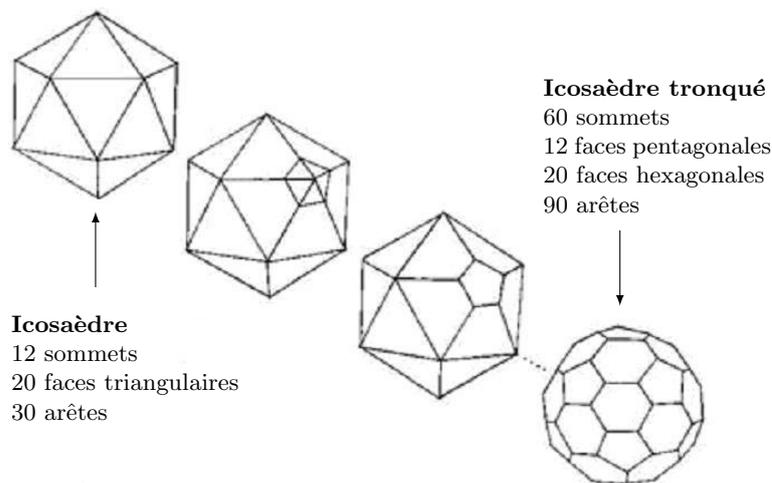
- Dans le C_{60} , $S = 60$. D'où : $H = 20$; il y a donc 32 faces ;
- Dans le C_{70} , $S = 70$. D'où : $H = 25$; il y a donc 37 faces.

Notons encore que, dans le C_{60} , les 60 atomes (situés aux sommets du polyèdre) sont équivalents (même nombre de premiers voisins, même symétrie). Ce n'est pas le cas dans le C_{70} , dans lequel les atomes sont répartis en cinq catégories, suivant le type de liaisons avec les voisins, dans les rapports 1 : 1 : 1 : 2 : 2. Le C_{70} a la forme d'un ballon de rugby.

On retrouve également les valeurs de F , A et S du C_{60} en remarquant qu'il s'agit d'un icosaèdre tronqué. Les 12 sommets sont « remplacés » par 12 nouvelles faces (des pentagones). Dès lors, par rapport à l'icosaèdre :

- Il y a 12 faces supplémentaires : $F(C_{60}) = F(\text{ico}) + 12 = 20 + 12 = 32$;

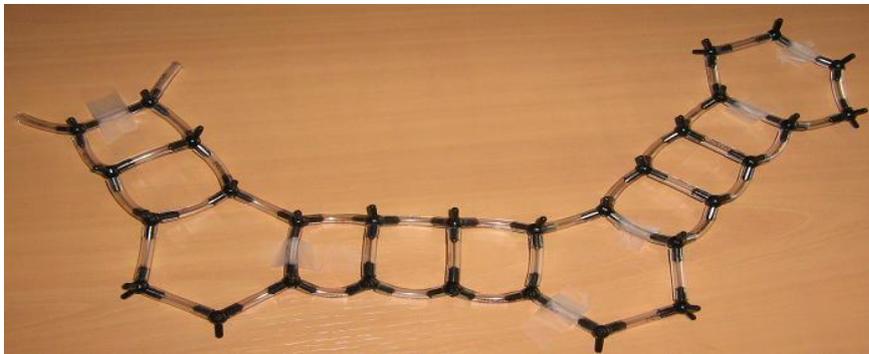
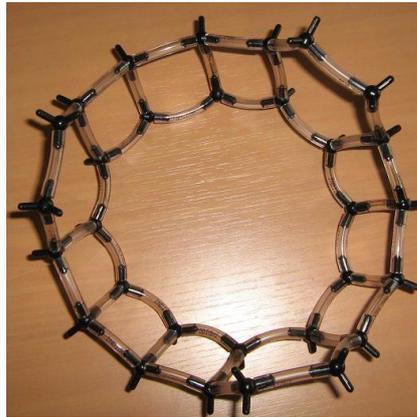
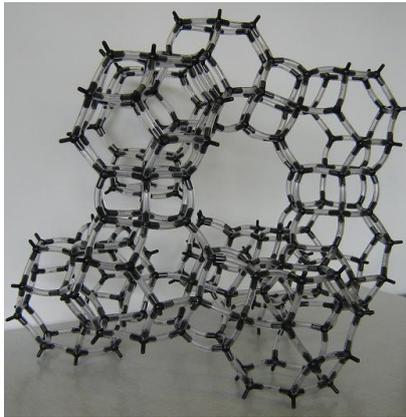
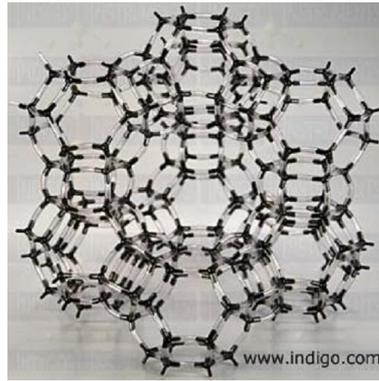
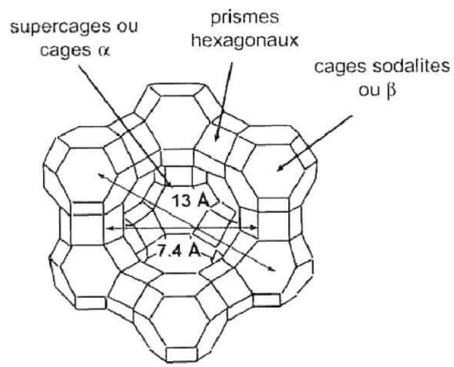
- Il y a $5 \times 12 = 60$ arêtes supplémentaires : $A(C_{60}) = A(\text{ico}) + 60 = 30 + 60 = 90$;
- Il y a $12 \times (5 - 1) = 48$ sommets supplémentaires : $S(C_{60}) = S(\text{ico}) + 48 = 12 + 48 = 60$.



4.2. Zéolithes

Bien avant la découverte des fullerènes, d'autres structures creuses étaient connues. Une des plus importantes pour les applications industrielles est la famille des zéolithes. Les zéolithes sont des solides microporeux parfaitement cristallisés dont les propriétés sont mises à profit dans de nombreux domaines tels que les détergents, le séchage, la catalyse (dont le raffinage du pétrole), la dépollution.

La principale caractéristique des zéolithes réside dans leur structure poreuse dans laquelle sont situés la plupart des centres catalytiquement actifs et où se produisent les réactions. Un exemple de zéolithe est la faujasite. La structure poreuse de la faujasite comprend des supercages (cages α) de 1,3 nm de diamètre, connectées à quatre autres supercages par des fenêtres circulaires d'environ 0,74 nm de diamètre. Les supercages sont accessibles à de nombreuses molécules organiques. La surface externe des cristallites de zéolithes est négligeable par rapport à la surface des pores ($< 2\%$), ce qui fait que l'essentiel des réactions se produisent sur les sites acides des supercages.



Toutes les supercages sont connectées à quatre cages sodalites par des fenêtres à 6 anneaux circulaires (diamètre d'ouverture de 0,22 nm) et à quatre autres supercages par des fenêtres à 12 anneaux (diamètre d'ouverture de 0,74 nm). Il y a 8 supercages et 8 cages sodalites par maille unité.

Si l'on considère une cage sodalite, celle ci comporte sur toute sa surface 6 carrés et 8 hexagones. Ces 14 polygones comportent $S = 24$ sommets et $A = 36$ arêtes. Le sodalite a la forme d'un polyèdre convexe ; on peut donc appliquer la relation d'Euler :

$$S - A + F = 24 - 36 + 14 = 2,$$

ce qui correspond à la topologie d'une sphère.

Si l'on considère une des 4 fenêtres qui relie la supercage aux autres (figures p. précédente), on peut également appliquer la relation d'Euler : la fenêtre est constituée de 12 polygones, de 30 sommets et de 42 arêtes ; $30 - 42 + 12 = 0$, ce qui correspond à la topologie d'un tore.

4.3. Nanotubes de carbone

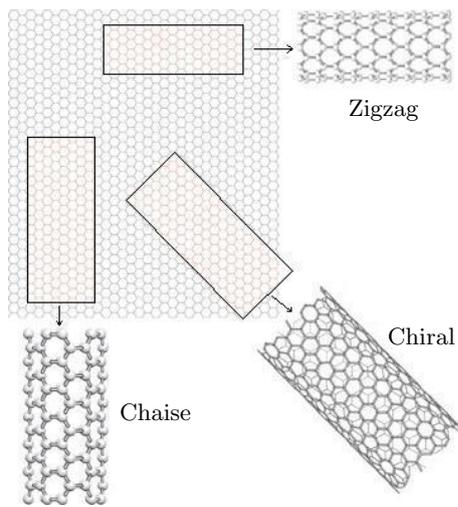
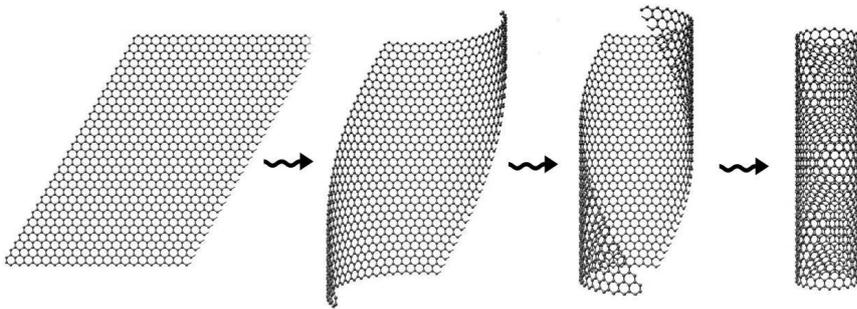
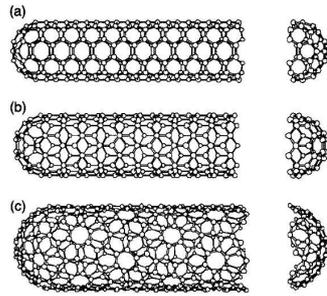
En nanosciences, outre les polyèdres réguliers, on rencontre différentes structures, dont des nanotubes. Par exemple, le carbone se présente aussi sous la forme de nanotubes.

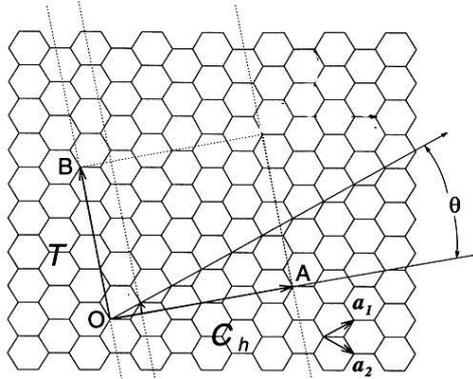
4.3.1. Géométrie des nanotubes de carbone

Les nanotubes sont des structures cylindriques, basées sur le réseau hexagonal du graphite. Les nanotubes de carbone peuvent être considérés comme des feuillets de graphène (plans de graphite) enroulés sur eux-mêmes et fermés aux deux extrémités. Leur diamètre varie de 1 à quelques nanomètres.

Trois types de nanotubes sont connus, selon la manière dont les feuilles de carbone bidimensionnelles s'enroulent. Ces nanotubes sont appelés chaise, zigzag et chiraux. On observe aussi des nanotubes multiparois, formés de l'enroulement coaxial de plusieurs feuillets de carbone.

Deux grandeurs définissent la géométrie des nanotubes : le diamètre, d_N , et l'angle chiral, θ . La circonférence du nanotube s'exprime en fonction du vecteur chiral, $C_h = na_1 + ma_2$, qui relie deux sites cristallographiques équivalents d'une feuille de graphène. (V. la fig. p. 20.)





L'angle chiral, θ , est l'angle entre le vecteur chiral et le vecteur a_1 du réseau hexagonal du graphène. Le vecteur chiral est noté à partir du couple de nombres entiers (n, m) . L'intersection de OB avec le premier point rencontré du réseau de graphène détermine le vecteur de translation fondamental uni-dimensionnel du nanotube. Le cylindre définissant le nanotube est obtenu en joignant les deux extrémités du vecteur C_h . Les angles des liaisons interatomiques sont légèrement déformés par rapport au graphène, à cause de la courbure du nanotube.

Dans la notation (n, m) , les vecteurs $(n, 0)$ et $(0, m)$ donnent lieu à un nanotube en zigzag ; les vecteurs (n, n) à une structure chaise et les autres vecteurs (n, m) à une structure chirale.

Le diamètre du nanotube est donné par :

$$d_N = \frac{1}{\pi} a_C \sqrt{3(m^2 + mn + n^2)}$$

et l'angle chiral par :

$$\theta = \text{arctg} \frac{\sqrt{3}n}{2m + n}.$$

4.3.2. Aire spécifique et longueur

Considérons un nanotube de carbone dont le diamètre est de 10 nm. Quelle est la longueur d'un nanotube de carbone dont la masse est de 1 g ? Données nécessaires au calcul :

- La distance entre deux atomes de carbone est de 0,142 nm ;

- L’aire d’un hexagone est donnée par $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}C^2 \simeq 2,6 \times C^2$, où C est la longueur du côté.

Dans un nanotube de carbone, les atomes de carbone s’arrangent par 6 en hexagone de côté 0,142 nm. La surface d’un hexagone est donc de $S = 0,052 \text{ nm}^2$. Dans le cas du graphite, chaque atome appartient à trois hexagones différents. Nous disposons donc d’une surface de $0,052 \text{ nm}^2$ pour $6/3 = 2$ atomes.

Nous savons également qu’une mole (N_A atomes) de carbone pèse 12 g. Nous déduisons le nombre d’atomes pour 1 g : $N_A/12 = 0,5 \cdot 10^{23}$ atomes. Soit une aire disponible de 1300 m^2 , qui est aussi son aire spécifique.

L’aire totale du nanotube est donnée par $S = L \times 2\pi r$ (où L est la longueur et r le rayon). Connaissant r , nous pouvons déduire L , la longueur totale du nanotube pour que la masse de celui-ci soit d’un gramme :

$$L \times 2\pi \times 5 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 1300 \text{ m}^2 \Rightarrow L = 4,14 \cdot 10^{11} \text{ m}.$$

Par comparaison, la distance Terre-Lune est d’environ $1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$.

Bibliographie

- [1] M. WAUTELET (éditeur), *Les nanotechnologies*, 2^e édition, Dunod, Paris, 2007.

Ce travail est partiellement financé par le
Ministère de la Région wallonne
(DGTRE, Diffusion des Sciences et
Techniques ; projet Nanevol).



**POLYTECH
MONS**

FACULTÉ POLYTECHNIQUE DE MONS

Ingénieur civil, une vision d'avenir

PORTES OUVERTES 2008

A MONS

amphithéâtre R. Stiévenart,
53 rue du Joncquois

samedi 19 avril de 9h à 13h

A CHARLEROI

38-40 bd Joseph II

mercredi 7 mai de 14h à 18h



La 1^{re} année du grade de bachelier
est aussi organisée à Charleroi.

www.fpms.ac.be



ACADÉMIE
UNIVERSITAIRE
WALLONIE-
BRUXELLES

Secrétariat des Études | 9, rue de Houdain | B 7000 Mons
Tél : 065/37 40 30 à 32 | Fax : 065/37 40 34 | secretu@fpms.ac.be

Généralisation d'un théorème de Martin Aigner sur les nombres de Motzkin

CHRISTIAN RADOUX

1. Un peu d'histoire

Théodore Samuel Motzkin est né à Berlin le 26 mars 1908 ⁽¹⁾. Son père, Léo, s'y était installé très jeune, venant de sa Russie natale, pensant y développer son propre talent mathématique. Il avait même été accepté



comme étudiant par Kronecker et entamé une thèse de doctorat sous sa

Adresse de l'auteur : Drève du Prophète 13, 7000 Mons ;

courriel : Christian.Radoux@skynet.be.

Compte rendu de l'exposé présenté au du Congrès de la SBPMef à Mons, le 23 août 2007.

⁽¹⁾ Vous devriez donc recevoir votre revue juste à temps pour fêter son centenaire !

direction, mais avait quitté cette voie pour se vouer au mouvement sioniste. C'est donc avec joie que, remarquant les dons de son fils, il l'encourage dans ses études universitaires, dès l'âge de seize ans, à Göttingen et à Berlin. C'est à Berlin que, à dix-neuf ans, Théodore élabore un premier projet de thèse en algèbre sous la direction de Schur, mais en fait c'est à Bâle qu'il obtient, en 1934, son doctorat sous la direction d'Ostrowski sur un tout autre sujet : les systèmes d'inégalités linéaires. Ce travail prendra une importance essentielle en recherche opérationnelle, surtout avec l'apparition des ordinateurs. Il n'est donc pas surprenant que la *RAND Corporation* (acronyme pour *research and development*) l'ait reproduit en 1952. De 1935 à 1948, Il enseigne à l'Université de Jérusalem. C'est là qu'il épouse Naomi Orenstein qui lui donnera trois fils. Ses recherches (128 articles) sont souvent liées à des problèmes de mathématiques discrètes, de combinatoire en particulier. Cela explique d'ailleurs son implication, pendant la seconde guerre mondiale, dans les activités de cryptographie des services secrets britanniques en Palestine. En 1948, Théodore Motzkin s'installe définitivement aux États-Unis et devient professeur à l'Université de Los Angeles en 1950. Il y meurt subitement le 15 décembre 1970.

2. Définitions

Le triangle de Motzkin est défini par la récurrence

$$\begin{cases} M_{0,0} = 1 \\ M_{n+1,k} = M_{n,k-1} + M_{n,k} + M_{n,k+1} \end{cases}$$

étant entendu que $M_{n,k} = 0$ lorsque $k < 0$ ou $k > n$. Voici le tableau des premiers $M_{n,k}$:

1						
1	1					
2	2	1				
4	5	3	1			
9	12	9	4	1		
21	30	25	14	5	1	
51	76	69	44	20	6	1

Il est facile de vérifier par récurrence que

$$(x^2 - 1)(x^2 + x + 1)^n = \sum_{k=0}^n M_{n,k} (x^{n+k+2} - x^{n-k}).$$

Par conséquent,

$$M_{n,k} = -\frac{1}{(n-k)!} \left\{ \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^2 - 1)(x^2 + x + 1)^n \right\}_{x=0}.$$

En divisant par x^{n+1} , puis en remplaçant x par $e^{i\alpha}$, ce développement donne aussi

$$(1 + 2 \cos \alpha)^n \sin \alpha = \sum_{k=0}^n M_{n,k} \sin(k+1)\alpha.$$

On peut encore en déduire de nombreuses petites formules amusantes, comme

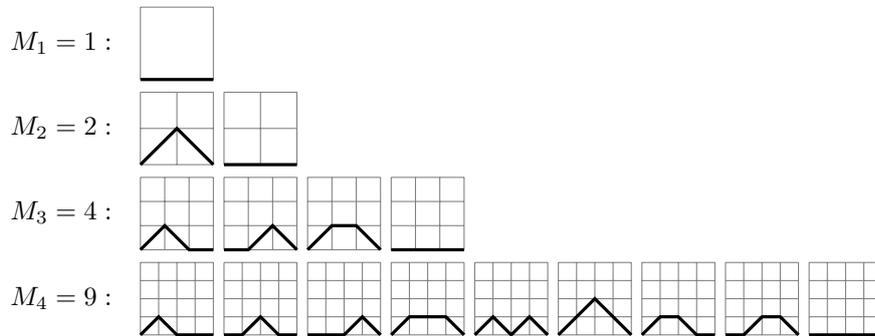
$$\sum_{k=0}^n (k+1)M_{n,k} = 3^n$$

(diviser la formule précédente par α , puis faire tendre α vers 0),

$$\sum_{k=0}^n M_{n,k}M_{n,n-k} = M_{2n,n} - M_{2n,n+2}$$

(utiliser la formule ci-dessus pour $M_{n,k}$, puis appliquer deux fois la formule de Leibnitz ⁽²⁾ pour la dérivée n^e d'un produit). Outre ces deux-là, j'en ai fabriqué aisément une bonne vingtaine : il suffit de « tourner la manivelle ».

Les *nombres de Motzkin* M_n sont les $M_{n,0}$. Il est bien connu que M_n est le nombre de sommes à n termes choisis dans $\{-1, 0, 1\}$, à sommes partielles toujours positives ou nulles et de somme totale nulle. Pour $n > 0$, cela revient à compter, comme dans la figure ci-après, les trajets à segments unitaires de coefficient angulaire $-1, 0$ ou 1 , partant du niveau 0 pour y revenir, et ne descendant jamais sous ce niveau.



⁽²⁾ *Sic* ; c'est l'orthographe que Leibnitz lui-même utilisait.

On en déduit immédiatement la récurrence

$$\begin{cases} M_0 = 1 \\ M_{n+1} = M_n + \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{n-1-k}. \end{cases}$$

En effet, un chemin de Motzkin de longueur $n + 1$ peut s'obtenir comme suit :

- Ou bien on commence par un segment horizontal. Il faut alors le prolonger par un chemin de Motzkin de longueur n ;
- Ou bien on commence par un trait vers le nord-est. Soit alors $k+2$ ($k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$) le premier endroit où l'on revient au niveau 0. Cet endroit est obligatoirement l'extrémité d'un segment vers le sud-est, lui-même précédé à sa gauche par un chemin de Motzkin de longueur k translaté au niveau 1. Pour achever le dessin, il reste à tracer, à droite du point $k + 2$, un chemin de Motzkin de longueur $n - k - 1$.

Soit maintenant $M(x) := \sum_{n=0}^{\infty} M_n x^n$ la série génératrice des M_n . Par un simple produit de Cauchy, la récurrence précédente prouve immédiatement l'équation fonctionnelle $M(x) = 1 + xM(x) + x^2M^2(x)$, qui donne aussitôt

$$\frac{1 - x - \sqrt{1 - 2x - 3x^2}}{2x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} M_n x^n.$$

En enlevant des chemins de Motzkin les segments horizontaux, il reste bien entendu des chemins de Catalan, forcément de longueurs paires $2k$. Les nombres de Catalan valant $\binom{2k}{k}/(k+1)$ [2], les nombres de Motzkin sont donc aussi donnés par la formule

$$M_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{\binom{2k}{k}}{k+1} \binom{n}{2k},$$

puisque'il y a $\binom{n}{n-2k}$, c'est-à-dire aussi $\binom{n}{2k}$, façons de placer ces segments horizontaux.

Évidemment, l'énumération directe, comme sur cette figure, pose vite des problèmes inextricables : $M_0 = 1$, $M_1 = 1$, $M_2 = 2$, $M_3 = 4$, $M_4 = 9$, $M_5 = 21$, $M_6 = 51$, $M_7 = 127$, $M_8 = 323$, $M_9 = 835$, $M_{10} = 2188$, $M_{11} = 5798$, $M_{12} = 15\,511$, $M_{13} = 41\,835$, $M_{14} = 113\,634$, $M_{15} = 310\,572$, $M_{16} = 853\,467$, $M_{17} = 2\,356\,779$, $M_{18} = 6\,536\,382$, $M_{19} = 18\,199\,284$, $M_{20} = 50\,852\,019$, $M_{21} = 142\,547\,559$, $M_{22} = 400\,763\,223$, $M_{23} = 1\,129\,760\,415$, $M_{24} = 3\,192\,727\,797$, $M_{25} = 9\,043\,402\,501$, $M_{26} = 25\,669\,818\,476$, $M_{27} = 73\,007\,772\,802$, $M_{28} = 208\,023\,278\,209$, $M_{29} = 593\,742\,784\,829$, ...

Notons cependant que, pour tout n , $M_{n+1}/M_n < 3$ et que $\lim_{n \rightarrow \infty} M_{n+1}/M_n = 3$. La dernière formule correspond à la formule de d'Alembert pour l'inverse du rayon de convergence de la série génératrice $M(x)$. En fait, on peut prouver (mais c'est beaucoup plus savant) la formule asymptotique

$$M_n = \frac{3^n}{n^{3/2}} \sqrt{\frac{27}{4\pi}} (1 + O(1/n)).$$

On a aussi, pour tout $n \geq 1$, l'inégalité $M_n^2 \leq M_{n-1}M_{n+1}$ (en d'autres termes, la suite M_{n+1}/M_n est croissante).

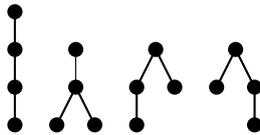
Signalons encore la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$(n+4)M_{n+2} - (2n+5)M_{n+1} - 3(n+1)M_n = 0.$$

Petite curiosité en passant : les nombres de Motzkin $M_2 = 2$, $M_7 = 127$, $M_{12} = 15\,511$ et $M_{36} = 953\,467\,954\,114\,363$ sont premiers. Pour l'instant, on n'en connaît pas d'autre.

Les interprétations combinatoires des nombres de Motzkin sont nombreuses. Par exemple :

- M_n est le nombre de manières différentes de tracer, entre n points d'un cercle, des cordes qui ne s'y coupent pas.
- M_n est le nombre d'arbres à n arêtes dont chaque sommet donne naissance à, au plus, deux feuilles. Illustrons ce dernier point de vue par le cas de M_3 :



Le passage de l'interprétation graphique en termes de chemins à celle-ci peut se justifier très simplement :

- Un pas vers l'est engendre un sommet simple et un déplacement sur la feuille ainsi créée ;
- Un pas vers le nord-est engendre un sommet double et un déplacement sur la feuille créée à gauche ;
- Un pas vers le sud-est n'engendre aucun sommet, mais bien un simple déplacement sur la première feuille libre sur la droite d'un sommet double.

Je vous laisse réfléchir au passage réciproque, pour bien montrer que la correspondance est effectivement bijective.

3. Un théorème de Martin Aigner

Par une savante (et belle) démonstration, Martin Aigner, de la *Freie Universität Berlin*, prouve [1] que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\det \begin{pmatrix} M_0 & M_1 & M_2 & \dots & M_n \\ M_1 & M_2 & M_3 & \dots & M_{n+1} \\ M_2 & M_3 & M_4 & \dots & M_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_n & M_{n+1} & M_{n+2} & \dots & M_{2n} \end{pmatrix} = 1.$$

4. Nouvelle preuve (quasi évidente) et généralisation du résultat

Or, les nombres de Catalan jouissent de la même propriété. J'en avais donné dans [3] une généralisation polynomiale par un procédé nouveau et, en fait, très simple. Je me suis donc demandé s'il n'était pas possible d'agir de même ici. Et, en fait, oui, comme le montre le théorème suivant.

Définissons le *polynôme de Motzkin* $M_n(x)$ par $M_n(x) = \sum_{k=0}^n M_{n,k}x^k$. Nous allons prouver que, pour tous $x \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}$,

$$\det \begin{pmatrix} M_0(x) & M_1(x) & M_2(x) & \dots & M_n(x) \\ M_1(x) & M_2(x) & M_3(x) & \dots & M_{n+1}(x) \\ M_2(x) & M_3(x) & M_4(x) & \dots & M_{n+2}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_n(x) & M_{n+1}(x) & M_{n+2}(x) & \dots & M_{2n}(x) \end{pmatrix} = 1.$$

Le cas particulier $x = 0$ n'est autre que le théorème d'Aigner.

DÉMONSTRATION.

Posons $A_{n,r}(x) = \sum_{k=r}^n M_{n,k}x^{k-r}$. Évidemment, $A_{n,0}(x) = M_n(x)$, $A_{n,n}(x) = 1$ et $A_{n,r}(x) = 0$ lorsque $r > n$. D'après la définition même des $M_{n,k}$, on a

$$A_{n+1,0}(x) = (x+1)A_{n,0}(x) + A_{n,1}(x)$$

et, pour tout $r > 0$,

$$A_{n+1,r}(x) = A_{n,r-1}(x) + A_{n,r}(x) + A_{n,r+1}(x).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\sum_{0 \leq k} A_{m,k}(x) A_{n,k}(x) &= A_{m,0}(x)((x+1)A_{n-1,0}(x) + A_{n-1,1}(x)) + \\
&\quad + \sum_{1 \leq k} A_{m,k}(x)(A_{n-1,k-1}(x) + A_{n-1,k}(x) + A_{n-1,k+1}(x)) \\
&= A_{m,0}(x)((x+1)A_{n-1,0}(x) + A_{n-1,1}(x)) + \\
&\quad + \sum_{0 \leq k} A_{m,k+1}(x)A_{n-1,k}(x) + \sum_{1 \leq k} A_{m,k}(x)A_{n-1,k}(x) + \\
&\quad + \sum_{2 \leq k} A_{m,k-1}(x)A_{n-1,k}(x) \\
&= ((x+1)A_{m,0}(x) + A_{m,1}(x))A_{n-1,0}(x) + \\
&\quad + (A_{m,0}(x) + A_{m,2}(x) + A_{m,1}(x))A_{n-1,1}(x) + \\
&\quad + \sum_{2 \leq k} (A_{m,k+1}(x) + A_{m,k}(x) + A_{m,k-1}(x))A_{n-1,k}(x) \\
&= A_{m+1,0}(x)A_{n-1,0}(x) + A_{m+1,1}(x)A_{n-1,1}(x) + \\
&\quad + \sum_{2 \leq k} A_{m+1,k}(x)A_{n-1,k}(x) \\
&= \sum_{0 \leq k} A_{m+1,k}(x)A_{n-1,k}(x)
\end{aligned}$$

En itérant ce calcul, en omettant les termes nuls et en se rappelant que $A_{m+n,0}(x) = M_{m+n}(x)$, on obtient la formule d'addition

$$M_{m+n}(x) = \sum_{k=0}^{\min(m,n)} A_{m,k}(x)A_{n,k}(x).$$

Elle équivaut au produit matriciel :

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} M_0(x) & M_1(x) & \dots & M_n(x) \\ M_1(x) & M_2(x) & \dots & M_{n+1}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_n(x) & M_{n+1}(x) & \dots & M_{2n}(x) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} A_{0,0}(x) & 0 & \dots & 0 \\ A_{1,0}(x) & A_{1,1}(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,0}(x) & A_{n,1}(x) & \dots & A_{n,n}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{0,0}(x) & A_{1,0}(x) & \dots & A_{n,0}(x) \\ 0 & A_{1,1}(x) & \dots & A_{n,1}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{n,n}(x) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Le théorème annoncé en résulte aussitôt.

Bibliographie

- [1] Martin AIGNER, Motzkin numbers, *European Journal of Combinatorics*, **19** (1998), 663–675.
- [2] Christian RADOUX, Géométrie combinatoire et nombres de Catalan, *M&P*, **85** (1992), 5–18.
- [3] Christian RADOUX, Addition formulas for polynomials built on classical combinatorial sequences, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **115** (2000), 471–477.

Bidroites

CHARLOTTE BOUCKAERT,
FRANCIS BUEKENHOUT, CLAUDE CULUS,
MONIQUE FRÉDERICKX,
ANNIE GOOVAERTS, JACQUELINE SENGIER
UREM – ULB

RÉSUMÉ — Cet article analyse la notion de bidroite. Il s’agit de la figure spatiale la plus simple. Elle est constituée de deux droites gauches. Son groupe de symétries est soit d’ordre 4 soit d’ordre 8. Dans le premier cas, la bidroite est dite *non-orthogonale*. C’est une figure orientée. Dans le deuxième cas, la bidroite est dite *orthogonale*. C’est une figure non-orientée.

1. Définition d’une bidroite

Considérons l’espace euclidien et la figure constituée par une paire de droites gauches A et B (voir figure 2). Nous dirons que cette figure est une *bidroite* et nous la notons AB . Il s’agit d’une figure spatiale particulièrement simple. Que peut-on en dire ?

Les droites A et B ont une perpendiculaire commune que nous appelons *axe* $a(AB)$ de la bidroite. Les points $A \cap a(AB)$ et $B \cap a(AB)$ sont les *pièdes* de la bidroite et leur milieu $c(AB)$ est le *centre* de la bidroite. Le plan perpendiculaire à l’axe $a(AB)$ en $c(AB)$ est la *feuille* $f(AB)$ de la bidroite. L’*angle* $\angle(AB)$ de la bidroite AB est l’angle que font des parallèles à A et B , sécantes en un point p de l’espace. Cet angle ne dépend pas de p et parcourt l’intervalle $]0; \frac{\pi}{2}]$.

Le cas où $\angle(AB) = \frac{\pi}{2}$ est particulièrement intéressant. Dans ce cas, A et B sont dites *orthogonales* et nous dirons en bref que la bidroite est orthogonale.

Adresses des auteurs : Charlotte Bouckaert, Avenue Forton 6, 1950 Kraainem ; courriels : charlotte.bouckaert@scarlet.be, buekenhout@skynet.be, anniegoovaerts@yahoo.fr, mgfrederickx@tele2allin.be, sengier@ulb.ac.be.



FIG. 1 – Bidroite non-orthogonale

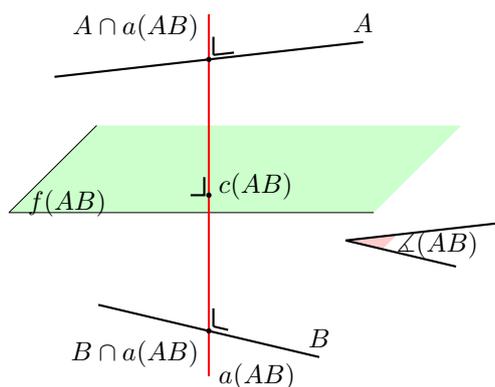


FIG. 2 – La bidroite

2. Groupe des isométries conservant une bidroite : $\text{Iso}(AB)$

2.1. Identité et demi-tours

Remarquons tout d'abord que le groupe des isométries $\text{Iso}(AB)$ qui conserve la bidroite est identique au groupe des similitudes qui conserve la bidroite car la distance entre les pieds doit être conservée.

Soit $\alpha \in \text{Iso}(AB)$. L'isométrie conserve le « squelette » de la bidroite constitué par l'axe, le centre, la feuille et le segment joignant les pieds.

Nous observons trois demi-tours d'axes deux à deux perpendiculaires conservant AB (voir figure 3) :

- Le demi-tour δ_1 d'axe $a(AB)$, qui conserve A et B ,
- Deux demi-tours δ_2 et δ_3 , dont les axes sont dans $f(AB)$ et qui bissectent les angles formés par les parallèles à A et B menées par $c(AB)$. Ces demi-tours échangent A et B . Dès lors, A et B jouent le même rôle et nous avons une bonne raison pour écrire bidroite $AB =$ bidroite BA .

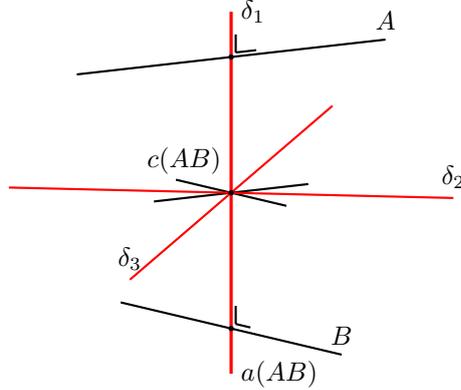


FIG. 3 – Identités et demi-tours

Théorème 1 $\{I, \delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ forme un groupe

En effet, on remarque que $\delta_i \delta_j = \delta_j \delta_i = \delta_k$ pour $i \neq j \neq k \neq i$ et que $\delta_i^2 = I$ où $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$. □

Théorème 2 Si la bidroite AB n'est pas orthogonale, alors $\{I, \delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ est le groupe des isométries de la bidroite.

Soit α un automorphisme hypothétique autre que $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ et I . Alors $\alpha \delta_i$ est également un automorphisme autre que $\delta_1, \delta_2, \delta_3$. En effet, si $\alpha \delta_i = \delta_j$, alors $\alpha \delta_i \delta_i = \delta_j \delta_i$ ou $\alpha = \delta_k$ et α ne serait pas un automorphisme autre que $\delta_1, \delta_2, \delta_3$.

Nous distinguons deux cas :

1. α fixe les deux pieds a et b de la bidroite AB .
2. α permute les deux pieds a et b de la bidroite AB .

Voyons que dans les deux cas on obtient une contradiction.

Cas 1 : Si α fixe les deux pieds, $\alpha(a) = a$ et $\alpha(b) = b$. Considérons un point p de A . On a deux possibilités pour l'image de p : $\alpha(p) = p$ ou $\alpha(p) = p'$, symétrique de p par rapport au point a car α est une isométrie et par conséquent conserve les distances (voir figure 4).

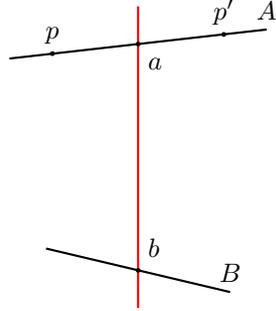


FIG. 4 – p est envoyé sur p'

- (a) Si $\alpha(p) = p$, le plan (A, b) est fixe et α est soit une symétrie bilatérale d'axe (A, b) , soit l'identité (cf. appendice 1). Si α est une symétrie bilatérale d'axe (A, b) , la droite B , conservée par α serait orthogonale au plan (A, b) ce qui est contraire aux hypothèses. Si α est l'identité, nous contredisons l'hypothèse faite sur α au début de la démonstration.
- (b) Si $\alpha(p) = p'$, $\alpha\delta_1(p) = p$ et pour les mêmes raisons qu'au point (a), on aurait $\alpha\delta_1 = I$, c'est-à-dire $\alpha = \delta_1$ ce qui est contraire aux hypothèses.

Cas 2 : Si α permute les deux pieds, $\alpha(a) = b$ et $\alpha(b) = a$. Comme δ_2 permute a et b , on obtient $\alpha\delta_2(a) = \alpha(b) = a$ et $\alpha\delta_2(b) = \alpha(a) = b$.

- (a) Si $\alpha\delta_2(p) = p$, $\alpha\delta_2$ est l'identité et $\alpha = \delta_2$, ce qui est contraire aux hypothèses.
- (b) Si $\alpha\delta_2(p) = p'$, $\alpha\delta_2\delta_2(p) = p$ ou $\alpha(p) = p$. Il s'en suit que $\alpha = I$, ce qui est contraire aux hypothèses. \square

Théorème 3 *Toute bidroite non-orthogonale est une figure orientée.*

RAPPEL : Toute figure non orientée est conservée par au moins un retournement de l'espace. (Consulter les articles de Buekenhout et Frédérickx [4] et [7]). Le théorème se justifie par le fait que toute isométrie qui conserve une bidroite non orthogonale est un déplacement. \square

2.2. Groupe des isométries conservant une bidroite orthogonale



FIG. 5 – Bidroite orthogonale

Nous savons déjà qu'une bidroite orthogonale est conservée par le groupe des déplacements $\{I, \delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. De plus la symétrie orthogonale (retournement) σ_A qui fixe le plan contenant A et $c(AB)$ ainsi que la symétrie orthogonale σ_B qui fixe le plan contenant B et $c(AB)$, conservent également cette bidroite orthogonale (voir figure 6).

Si on compose ces diverses isométries, on en obtient deux nouvelles : $K = \delta_2\sigma_A$ et $K' = \delta_3\sigma_A$ qui sont des antirotations (cf. appendice 2).

Les isométries obtenues sont actuellement au nombre de huit. En existe-t-il une autre ? Supposons que α soit une isométrie de la bidroite orthogonale autre que les précédentes. Comme précédemment on a deux cas :

1. Si α conserve la droite A et les deux pieds de la bidroite, il s'en suit que soit $\alpha = I$ ou $\alpha = \sigma_A$ (appendice 1).
2. Si α échange les droites A et B , $\alpha\delta_2$ les conserve. Il s'en suit que soit $\alpha\delta_2 = I$ et dans ce cas $\alpha = \delta_2$, soit $\delta_2 = \sigma_A$ ou σ_B et dans ce cas $\alpha = \sigma_A\delta_2$ ou $\sigma_B\delta_2$.

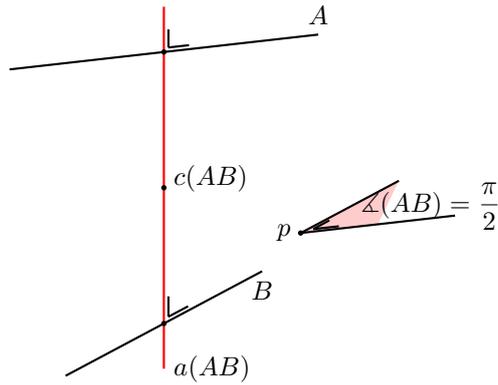


FIG. 6 – Bidroite orthogonale

Théorème 4 $\{I, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \sigma_A, \sigma_B, K, K'\}$ forme un groupe.

La justification est donnée par le tableau de l'appendice 2. □

Théorème 5 Si la bidroite AB est orthogonale, alors

$$\{I, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \sigma_A, \sigma_B, K, K\}$$

est le groupe des isométries de la bidroite.

Le groupe des isométries d'une bidroite orthogonale comprend huit éléments :

- L'identité I ,
- Trois demi-tours : δ_1, δ_2 et δ_3 ,
- Deux symétries bilatérales σ_A et σ_B ,
- Deux antirotations $\delta_2\sigma_A$ et $\delta_3\sigma_A$. □

Voilà à nouveau le groupe D_8 qui apparaît ! Si on compare le tableau de composition du groupe des isométries d'une bidroite (cf. appendice 2) et celui du carré plan (voir l'article [1]) ou du carré gauche (voir l'article [2]), on voit que ces groupes sont isomorphes.

Théorème 6 Toute bidroite orthogonale est une figure non orientée.

Ceci se justifie par exemple par le fait qu'une bidroite orthogonale est conservée par la symétrie orthogonale σ_A . □

3. Quadrilatères gauches et bidroites

Tout quadrilatère est une bidroite concrétisée par deux points sur chaque droite (voir les figures 7 et 9). Les droites composant la bidroite sont les diagonales de ce quadrilatère gauche et les points sont les sommets du quadrilatère gauche. . . ceci est l'objet d'un autre dossier (voir l'article [2]).

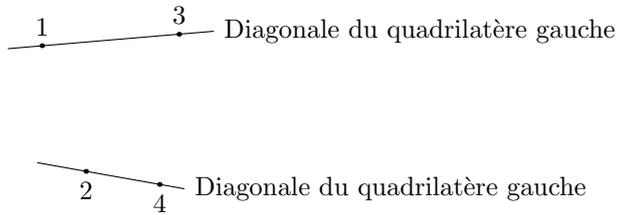


FIG. 7 – La bidroite et les diagonales d'un quadrilatère gauche

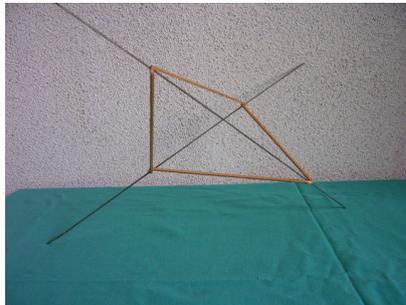


FIG. 8 – Bidroite et quadrilatère gauche

Annexes

Appendice 1

Nous savons que

- Une isométrie de la droite qui fixe deux points est l'identité I ;

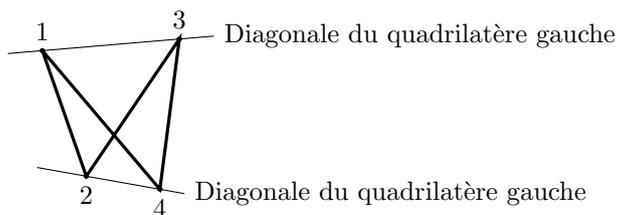


FIG. 9 – Bidroite et quadrilatère gauche

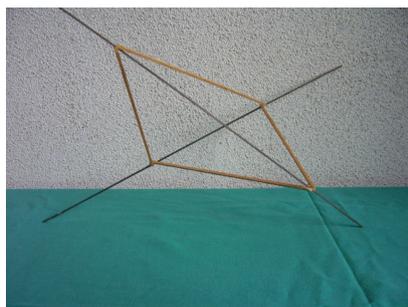


FIG. 10 – Bidroite et quadrilatère gauche

- Une isométrie du plan qui fixe trois points non alignés est l'identité I ;
- Une isométrie de E^3 qui fixe quatre points non coplanaires est l'identité I ;
- Si Π est un plan et p un point extérieur au plan, il existe un et un seul point $q \neq p$, extérieur au plan tel que $d(p, a) = d(q, a)$ **pour tout** point a du plan Π . Ce point q est le second point d'intersection de toutes les sphères centrées en un point du plan et passant par p ; q est le symétrique de p par rapport au plan Π (voir figure 11).

Théorème 7 *Si Π est un plan, il existe une et une seule isométrie qui fixe tous les points de Π sans être l'identité.*

Démonstration :

1. Existence : La symétrie bilatérale σ d'axe Π répond à la question.
2. Unicité : Soit $\sigma' \neq \sigma$ une isométrie qui fixe tous les points de Π et qui n'est pas l'identité et soit p un point extérieur à Π avec $\sigma(p) = q$.

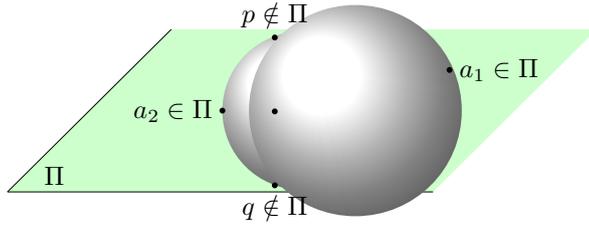


FIG. 11 – Appendice 1

L'isométrie σ' ne peut fixer p vu que σ' n'est pas l'identité et par conséquent $\sigma'(p) = q$ (cf. appendice 1). Dans ce cas, $\sigma\sigma'(p) = p$ et $\sigma\sigma' = I$ ou encore $\sigma = \sigma'$. \square

Appendice 2 : Groupe des isométries de la bidroite orthogonale

Voici la table de composition (de multiplication) des huit isométries. Il faut bien veiller à l'ordre des facteurs : le premier figure dans la première colonne et le deuxième dans la première ligne.

À lire : (1^{er} facteur) \circ (2^e facteur) ou (1^{er} facteur) après (2^e facteur).

	I	δ_1	δ_2	δ_3	σ_A	σ_B	K	K'
I	I	δ_1	δ_2	δ_3	σ_A	σ_B	K	K'
δ_1	δ_1	I	δ_3	δ_2	σ_B	σ_A	K'	K
δ_2	δ_2	δ_3	I	δ_1	K	K'	σ_A	σ_B
δ_3	δ_3	δ_2	δ_1	I	K'	K	σ_B	σ_A
σ_A	σ_A	σ_B	K'	K	I	δ_1	δ_3	δ_2
σ_B	σ_B	σ_A	K	K'	δ_1	I	δ_2	δ_3
K	K	K'	σ_B	σ_A	δ_2	δ_3	δ_1	I
K'	K'	K	σ_A	σ_B	δ_3	δ_2	I	δ_1

Bibliographie

- [1] Charlotte Bouckaert, Francis Buekenhout, Claude Culus, Monique Frédérickx, Annie Goovaerts, Jacqueline Sengier, Classification objective des quadrilatères, *M&P*, **163** (2007), 5–35.
- [2] Charlotte Bouckaert, Francis Buekenhout, Claude Culus, Monique Frédérickx, Annie Goovaerts, Jacqueline Sengier, *Quadrilatères gauches*, (en préparation).
- [3] Charlotte Bouckaert, Francis Buekenhout, Claude Culus, Monique Frédérickx, Annie Goovaerts, Jacqueline Sengier, *Quadrilatères gauches et bidroites*, (en préparation).
- [4] Francis Buekenhout, La gauche et la droite en géométrie élémentaire, *M&P*, **161** (2007), 13–30.
- [5] Francis Buekenhout, Jean Doyen, *Espaces euclidiens*, Presses universitaires de Bruxelles, Bruxelles, 1975.
- [6] Francis Buekenhout, Jean Doyen, *Ensembles structurés et groupes de symétries*, ULB, Bruxelles, 1982.
- [7] Francis Buekenhout, Monique Frédérickx, Orientation, *M&P*, **162** (2007), 3–11.
- [8] Annie Goovaerts, *Enseignement primaire. Classement des quadrilatères (plans) en fonction des symétries axiales orthogonales*, CeDoP, ULB, Bruxelles, 2006.

Mathématiques et créativité ne sont pas incompatibles. . .

FRANÇOIS DROUIN

I.U.F.M. de Lorraine, site de Metz

Le congrès 2007 de la S.P.B.M.e.f. avait pour thème « Mathématiques, arts et littérature ». À partir d'une réflexion mêlant mathématiques et art contemporain, nous verrons que la phase de création nécessaire au jeune « artiste » pourra être mise à profit par l'enseignant de mathématiques. Ce temps de créativité sera ensuite mis à profit lors d'autres activités mathématiques plus ludiques ainsi que lors de résolutions de problèmes.

Un mathématicien crée le beau, au même titre qu'un peintre ou un poète ; un ensemble d'idées, tout comme un ensemble de couleurs ou de mots, doit posséder une harmonie intérieure. La beauté est la pierre de touche de la démarche scientifique ; il n'y a pas de place pour la laideur.

(H. H. HARDY, cité dans *Diabolo math* (Belin, Paris, 1983))

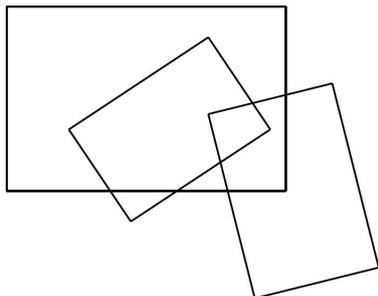
Une première activité

- Trace un rectangle de 18 cm de long et 12 cm de large.
- Dessine un deuxième rectangle dont les côtés ne sont parallèles à ceux du premier rectangle.
- Continue ton dessin avec au moins un troisième, un quatrième et un cinquième rectangle.
- Colorie ton dessin.

Ces tracés sont proposées dans la brochure *Maths visuelles : Osons des coloriages* de l'IREM de Lorraine. Les dessins obtenus sont affichés dans des salles de classe. Il est également possible de proposer l'activité en imposant cette fois que les côtés des rectangles soient parallèles aux bords de la feuille.

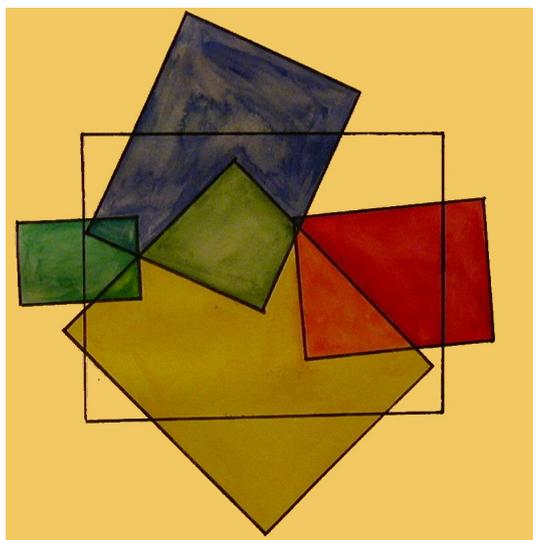
Adresse de l'auteur : 2 allée du Cerisier, F - 55300 CHAUVONCOURT (France) ;
courriel : francois.drouin@wanadoo.fr.

Compte rendu de l'atelier animé lors du Congrès de la SBPMef à Mons, le 22 août 2007.

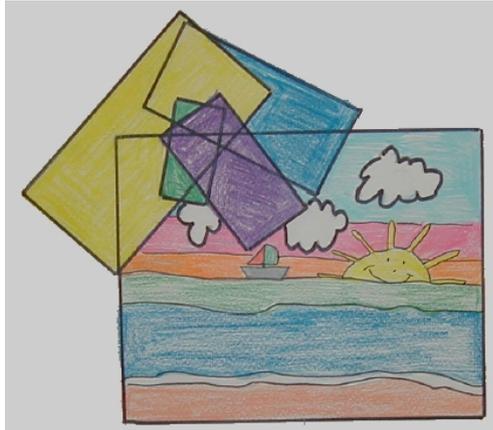


Ces rectangles entrecroisés se retrouvent en particulier dans *Passenger Magenta 1999* de Sean SCULLY ou *Polyphon gefasstes Weiss* de Paul KLEE. D'autres polygones se chevauchant se retrouvent dans *Spitzen im Bogen 1927* de Vassily KANDINSKI ou *Suprématisme 1920/21* de Nikolai Michailowistch SUTIN. Des carrés enchevêtrés se retrouvent dans *Vonal 1968* de Victor VASARELY ou *Huldigung an das Quadrat Nr VI* de Josef ALBERS.

En exemple, voici — malheureusement en noir et blanc — deux productions d'élèves d'un collège de la banlieue nancéenne.

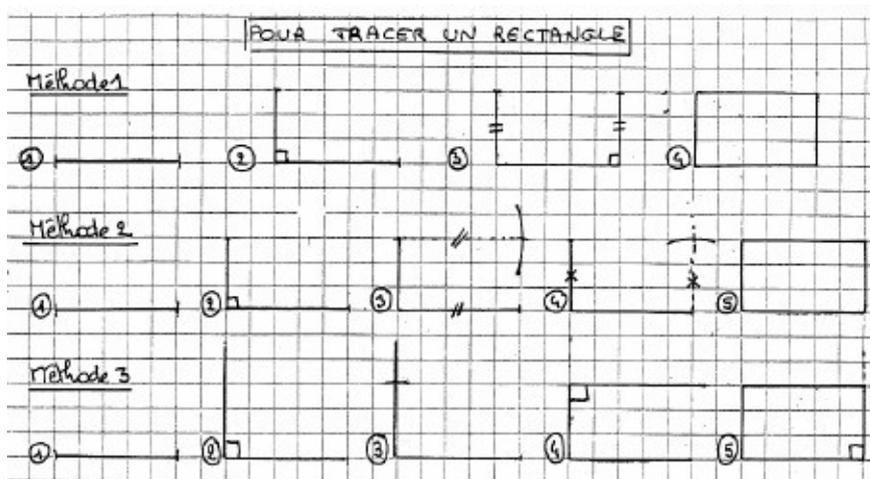


— L'ÉLÈVE : Mes dessins sont des rectangles car avec mon équerre, je vérifie qu'ils ont quatre angles droits.



— L'ENSEIGNANT : Vous allez maintenant expliquer comment vous avez tracé vos rectangles.

Après quelques échanges dans la classe, les trois méthodes ci-dessous émergent, rapidement notées par l'enseignant :



Les différentes méthodes ont été rassemblées en ce qui est devenu la trace de cours créée par les élèves. Elles sont justifiées par de jeunes élèves par la

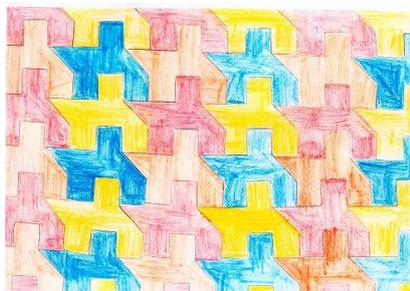
vérifications des quatre angles droits obtenus. D'autres justifications plus élaborées pourront être proposées par des élèves plus âgés.

Nous sommes ainsi partis d'une création artistique pour créer collectivement une trace de cours.

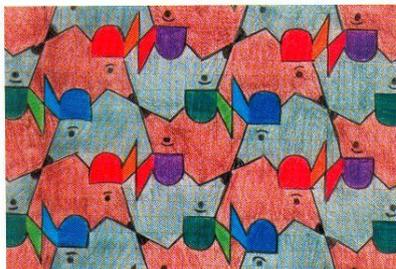
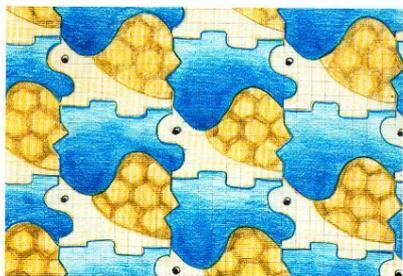
Faisons créer des pavages par les élèves

Montrer divers pavages du plan aux élèves permet d'aborder les isométries qui vont servir d'outil pour bien des démonstrations en géométrie. Les œuvres de M. C. ESCHER sont familières aux enseignants de mathématiques. D'autres artistes tel Raoul RABA (l'auteur des motifs des affiches du concours *Kangourou*) ont exploré ce domaine.

Il est possible de faire créer de tels pavages par les élèves. En voici trois exemples : le premier est extrait d'un travail fait dans sa classe par une

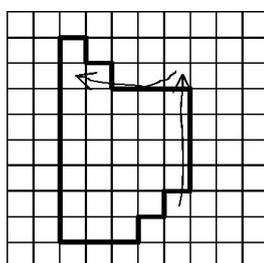
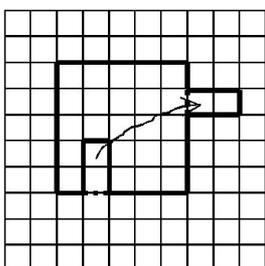
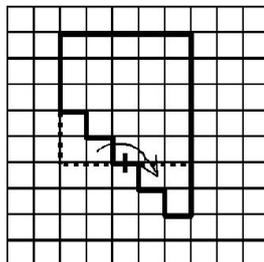
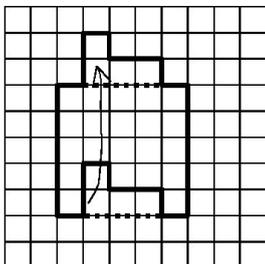


jeune collègue avec des élèves de 7 ans. Les deux autres ont été faits par



des élèves un tout petit peu plus âgés et ornaient la couverture des numéros 216 et 210 de la revue suisse « math-école ».

Voici ci-dessous quatre façons possibles de créer un motif de pavage à partir d'un carré :



Dans les deux premiers cas, une translation et une symétrie centrale interviennent. Dans les deux autres cas une rotation d'angle 90° et une symétrie glissée.

D'autres motifs de base peuvent être choisis : il suffit que ces motifs pavent le plan. Les triangles et les quadrilatères sont entre autres à notre disposition. De plus, les transformations utilisées pour déformer des motifs de bases peuvent varier pour un même polygone : ESCHER ne s'en est pas privé.

Faisons créer des jeux par les élèves

Nous trouvons dans le commerce des jeux formés de neuf carrés s'assemblant pour former un carré plus grand en retrouvant les jonctions entre les

débuts et les fins de motifs proposés. Voici l'un d'eux, le « Jeu fou de la tortue », édité par *Arthus Puzzle*.



Le jeu consiste à retrouver les assemblages des tortues colorées. Ci-dessus, seules huit cartes ont été placées correctement...

Voici comment faire créer par les élèves d'autres jeux construits sur le même modèle mais à contenu mathématique.

Les 9 cartes seront construites sur le modèle du « Jeu fou de la tortue ».

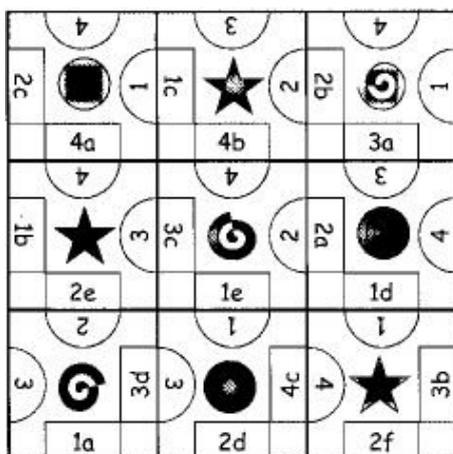
Nombre de départ	a	b	c	d	e	f
1						
2						
3						
4						

Des nombres (ou des expressions algébriques développées, réduites et ordonnées) sont placés dans la première colonne du tableau. Les lignes sont complétées en écrivant des expressions numériques ou algébriques égales à ce qui est écrit dans la première colonne.

Pour nos élèves, savoir « $5 \times 8 = 40$ » est une chose, créer sept expressions numériques égales à 40 en est une autre et j'ai vu dans mes classes de très bons élèves en manque de créativité...

Dans le tableau ci-dessous, il reste à remplacer les codages des côtés des neuf petits carrés par les expressions figurant dans les cases correspondantes

du tableau précédent. (Ce grand carré est extrait de la brochure *Jeux 7* de l'A.P.M.E.P.)



Voici quatre exemples de jeu créés par des élèves âgés de 11 ans.

18	81	6 x 6
72	81 x 10	81
01	1 x 96	1 x 10
96	3 x 24	36
10	14 + 04	1 x 10
18	40 + 41	9 x 9
72	100 : 10	72
10	1 + 9	01
96	720 : 10	18
10	360 : 10	6 x 8
18	1 x 24	36
72	1 x 18	01
10	1 x 18	36
18	72 x 10	01

72	120	120
021	30	120
72	52	72
1 x 03	25 x 1	30
25 : 1	3 x 10	120
72	5 x 5	30
120	79 - 7	72
120	1 x 01	72
30	100 : 4	25
72	72 x 1	30
120	2,5 x 10	30
30	96 x 2	72
120	120 x 1	25
72	2 x 09	30
120	la moitié de 60	72
30	la moitié de 50	25
72	1 : 72	30
120	042 est égal à 1	72
30	la moitié de 50	25

Pour chacun de ces quatre jeux, les nombres écrits en chiffres (les têtes des tortues) seront associés à d'autres écritures égales à ces nombres (les corps de tortue).

$3+7$	$9+1$	4×1
10×2	$20-4$	$80:4$
14	2×5	2×2
16	10	$8+2$
14	$20-4$	$40:2$
14	2×7	1×14
16	10×5	8×2
14	10	$6+4$
14	20	16

10	100	10
$0,1 \times 100$	le dixième de 100	10×10
10	100	10
le centième de 10	$0,1 \times 1000$	le centième de 10
100	100	1
100 centièmes	$0,01 \times 10$	un dixième
1	$0,1$	10
10 centièmes	100 dixièmes	100 centièmes
100	$0,01 \times 100$	le dixième de 1000

De la créativité pour résoudre des problèmes mathématiques

Exercice 3 : (La Réunion 2002)

Paul a dans sa tirelire 13 pièces de monnaie pour une valeur totale de 5 euros. Il n'y a que des pièces de 50 centimes et de 20 centimes. Déterminer le nombre de pièces de 50 centimes et le nombre de pièces de 20 centimes par trois méthodes différentes.

Voici un énoncé présenté il y a quelques années au concours de recrutement de Professeur des Écoles pour la Réunion (département français d'outre-mer).

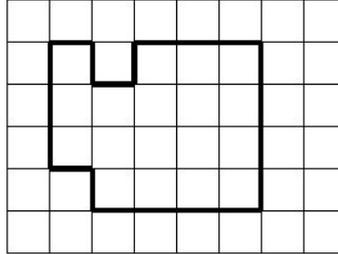
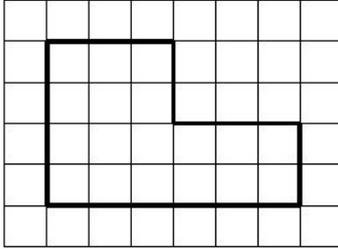
L'énoncé semble bien classique, mais les étudiants devaient présenter trois méthodes différentes... L'algébrisation de ce type de problème, rencontrée lors des premières années de l'enseignement secondaire, vient rapidement à l'esprit. Cependant, ce type de problème est classique comme problème ouvert présenté (en France) aux élèves de la dernière année de l'enseignement élémentaire. Pas question d'utiliser un système d'équations à deux inconnues... La créativité est sollicitée, et de plus, il faudra pouvoir justifier que les nombres de pièces trouvés représentent la seule solution au problème.

À la suite de ce type de problème, il est naturel de faire un tour vers les « problèmes ouverts » (ou les « problèmes pour chercher », selon le niveau d'enseignement auquel on s'adresse).

Les récents *fichiers Évariste* édités par l'A.P.M.E.P. (l'association française des professeurs de mathématiques) présentent divers énoncés extraits de rallye mathématique et sont une mine d'or pour l'enseignant.

En complément, voici un énoncé présenté ces dernière années à mes élèves âgés de onze ans :

- Le côté de carreau du quadrillage est pris comme unité de longueur.
- Combien existe-t-il de polygones construits sur le quadrillage et ayant 20 comme périmètre (deux exemplaires sont dessinés)



Il faut voir avec les élèves que deux polygones seront considérés comme identiques s'il est possible de passer de l'un à l'autre par une des isométries rencontrées en classe.

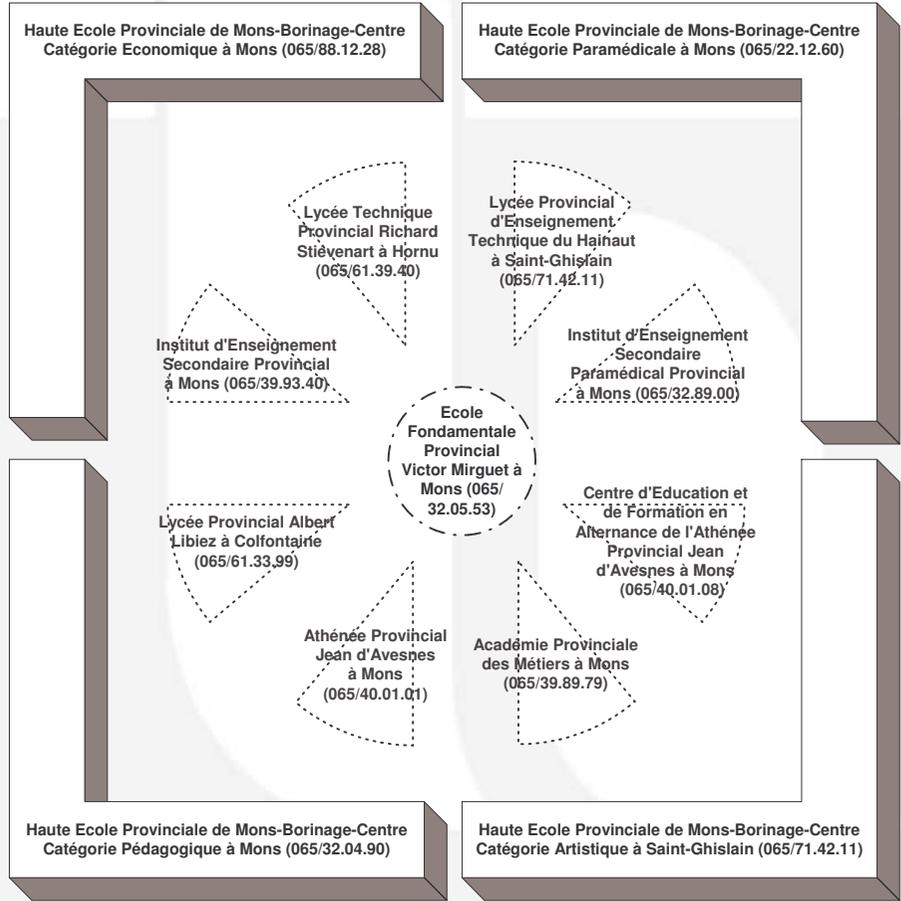
Il reste donc à faire le compte des polygones « différents »... En classe, je n'ai jamais réussi à faire trouver le nombre de polygones demandé. Cependant, j'ai toujours apprécié la créativité des élèves pour éviter les comptages répétitifs. Les polygones de même aire mais de périmètre différent leur ont paru bien plus familiers.

Les activités pour lesquelles les élèves doivent imaginer (créer) quelque chose nous donnent la possibilité de leur faire faire des mathématiques et faire autre chose qu'appliquer des formules ou des stratégies convenues. Depuis plus de 30 ans que j'enseigne, je ne réussis plus à concevoir des mathématiques sans créativité...



Enseignement de la Province de Hainaut Région Mons-Borinage

Direction Générale Régionale Mons-Borinage
065/40.80.80



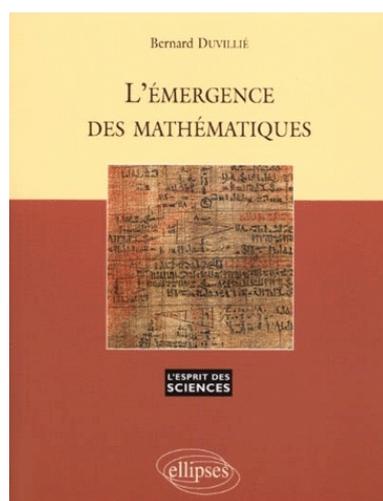
Conseiller en informations scolaires à Mons (065/40.80.80)

- Institut Provincial d'Enseignement de Promotion sociale Mons-Formations à Mons (065/35.38.13)
- Centre Provincial d'Enseignement de Promotion sociale du Borinage à Hornu (065/76.76.18)
- Ecole Industrielle Supérieure Provinciale à Mons (065/39.89.39)
- Cours des Métiers d'Arts du Hainaut (065/84.96.32)

Bibliographie

Michel Herman

Bernard DUVILLIÉ
L'émergence des mathématiques,
Ellipses (coll. *L'esprit des sciences*), Paris, 2000, 128 pp.,
ISBN : 2-7298-0177-4.



Bien que publié depuis déjà quelques années, ce livre ne m'est arrivé dans les mains que récemment. La collection *L'esprit des sciences* s'est fixé un objectif clairement exprimé par son directeur Georges BARTHÉLÉMY :

On peut souhaiter explorer les sciences autrement que par les traités ou par les cours. Cette collection entend répondre à un tel désir de culture scientifique. Ses ouvrages, d'accès aisé, permettent à un large public de découvrir, de comprendre et d'apprécier.

Ce petit livre correspond exactement à l'idée qui préside à cette collection. Dans un langage facilement accessible mais sans céder à une trop grande simplification, l'auteur nous propose un scénario possible dévoilant l'évolution des concepts mathématiques de base.

Voici un aperçu de la table des matières :

1. Les acteurs primitifs
2. Le néolithique au Proche-Orient
3. Mathématiques en Mésopotamie
4. Mathématiques de l'Égypte ancienne
5. De Thalès à Euclide

De la comparaison terme à terme de deux collections à la numération en passant par l'énumération, Bernard DUVILLIÉ commence par offrir un support concret permettant de comprendre la nécessaire abstraction qui conduira à la naissance de l'arithmétique. Il situe ce long processus à la fin du paléolithique supérieur et durant la révolution néolithique.

Par la suite, l'auteur développe un peu l'évolution des idées qu'on peut percevoir à travers les traces et les documents les plus anciens de l'Histoire.

Les *calculi* et les tablettes d'argile de Mésopotamie, puis les trois papyrus mathématiques connus de l'Égypte ancienne sont présentés et servent de support à l'expression des concepts sous-jacents.

L'auteur clôture son panorama de l'évolution des idées mathématiques à Euclide, considérant que *Les Éléments* représentent la clé de voute de l'édifice mathématique antérieur.

Personnellement, j'aurais souhaité que certains raisonnements soient plus développés, mais cela aurait certainement nui à la fluidité du texte et à la taille limitée de l'ouvrage. En outre, une bibliographie, restreinte mais bien choisie, offre des possibilités d'approfondissement au lecteur qui le souhaite.

Je ne peux que recommander la lecture de ce livre à tout enseignant concerné par l'apprentissage des mathématiques, ainsi que son utilisation au niveau des Écoles Normales, les « Catégories Pédagogiques des Hautes Écoles » comme on dit maintenant.

Problèmes

Claudine Festraets ⁽¹⁾

Similitudes

Problème n° 340 de *M&P* n° 162

Soit f_1 , f_2 et f_3 trois similitudes directes du plan, ayant un point fixe commun, et telles que :

1. $f_1 \circ f_2 \circ f_3$ est la transformation identique du plan ;
2. Quel que soit le point P , les centres de gravité des triangles $(f_1(P), f_2(P), f_3(P))$ et $(f_1^{-1}(P), f_2^{-1}(P), f_3^{-1}(P))$ sont confondus.

Montrer que l'une des f_k est l'identité.

(problème proposé par P. DUPONT)

Solution de R. Choulet, de Avenay

J'utilise à outrance les nombres complexes.

f_k étant définie par $a_k \neq 0$ (représentant le rapport et l'angle) pour k de 1 à 3 et étant de centre $\Omega(\omega)$, f_k est définie par sa formule complexe : $f_k(z) - \omega = a_k(z - \omega)$. La composée $f_1 \circ f_2 \circ f_3$ est donc définie par : $Z - \omega = a_1 a_2 a_3 (z - \omega)$. Avec l'hypothèse 1., on a donc :

$$a_1 a_2 a_3 = 1. \tag{1}$$

Soit $P(z)$ un point quelconque du plan. L'affixe du centre de gravité G_1 de $\{f_k(P), k = 1, 2, 3\}$ est

$$z_{G_1} = \frac{1}{3}[3\omega + (a_1 + a_2 + a_3)(z - \omega)] = \omega + \frac{\sigma_1}{3}(z - \omega),$$

tandis que celle du centre de gravité G_2 de $\{f_k^{-1}(P), k = 1, 2, 3\}$ est

$$z_{G_2} = \frac{1}{3}[3\omega + (a_1^{-1} + a_2^{-1} + a_3^{-1})(z - \omega)] = \omega + \frac{\sigma_2}{3\sigma_3}(z - \omega)$$

⁽¹⁾ Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à Cl. FESTRAETS, Rue J.-B. Vandercammen 36, B-1160 Bruxelles ou à l'adresse e-mail hamoircl@brutele.be.

en utilisant les fonctions symétriques de a_1 , a_2 et a_3 ($\sigma_1 = a_1 + a_2 + a_3$, $\sigma_2 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$, $\sigma_3 = a_1a_2a_3$).

La condition 2. se traduit alors par

$$\frac{\sigma_2}{3\sigma_3} = \frac{\sigma_1}{3}. \quad (2)$$

Ainsi les trois similitudes sont telles que : $\sigma_3 = 1$ et $\sigma_2 = \sigma_1$, autrement dit a_1 , a_2 et a_3 sont les trois solutions d'une équation du troisième degré de la forme :

$$Z^3 - \alpha Z^2 + \alpha Z - 1 = 0$$

la factorisation étant $(Z - 1)(Z^2 + (1 - \alpha)Z + 1)$, il est clair que 1 est une solution.

Nous avons donc bien démontré que l'une des similitudes est l'identité.

Solution de J. Rasse, de Méan

f_1 , f_2 , f_3 sont des similitudes spirales. Chacune d'elles est définie par un rapport d'homothétie et par un angle de rotation qui sont

- pour f_1 : k et α ,
- pour f_2 : q et β ,
- pour f_1^{-1} : $\frac{1}{k}$ et $-\alpha$,
- pour f_2^{-1} : $\frac{1}{q}$ et $-\beta$,
- pour f_3^{-1} : kq et $\alpha + \beta$, car $f_3^{-1} = f_2 \circ f_3$,
- pour f_3 : $\frac{1}{kq}$ et $-\alpha - \beta$.

En posant $\alpha + \beta = \gamma$, les matrices de f_1 , f_2 , f_3 sont respectivement

$$\begin{pmatrix} k \cos \alpha & -k \sin \alpha \\ k \sin \alpha & k \cos \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q \cos \beta & -q \sin \beta \\ q \sin \beta & q \cos \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{kq} \cos \gamma & \frac{1}{kq} \sin \gamma \\ -\frac{1}{kq} \sin \gamma & \frac{1}{kq} \cos \gamma \end{pmatrix}$$

et celles de f_1^{-1} , f_2^{-1} , f_3^{-1} sont respectivement

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{k} \cos \alpha & \frac{1}{k} \sin \alpha \\ -\frac{1}{k} \sin \alpha & \frac{1}{k} \cos \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{q} \cos \beta & \frac{1}{q} \sin \beta \\ -\frac{1}{q} \sin \beta & \frac{1}{q} \cos \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} kq \cos \gamma & -kq \sin \gamma \\ kq \sin \gamma & kq \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées du point P étant (x, y) , celles de l'image de P par la similitude f sont données par le produit $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où M est la matrice de f .

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} & (kx \cos \alpha - ky \sin \alpha, kx \sin \alpha + ky \cos \alpha) \\ & (qx \cos \beta - qy \sin \beta, qx \sin \beta + qy \cos \beta) \\ & \left(\frac{x}{kq} \cos \gamma + \frac{y}{kq} \sin \gamma, \frac{-x}{kq} \sin \gamma + \frac{y}{kq} \cos \gamma \right) \end{aligned}$$

pour les images de P par les transformations f_1, f_2 et f_3 et

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x}{k} \cos \alpha + \frac{y}{k} \sin \alpha, \frac{-x}{k} \sin \alpha + \frac{y}{k} \cos \alpha \right) \\ & \left(\frac{x}{q} \cos \beta + \frac{y}{q} \sin \beta, \frac{-x}{q} \sin \beta + \frac{y}{q} \cos \beta \right) \\ & (xkq \cos \gamma - ykq \sin \gamma, xkq \sin \gamma + ykq \cos \gamma) \end{aligned}$$

pour les images de P par les transformations $f_1^{-1}, f_2^{-1}, f_3^{-1}$.

Les centres de gravité des deux triangles ainsi déterminés ont même abscisse :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \left(kx \cos \alpha - ky \sin \alpha + qx \cos \beta - qy \sin \beta + \frac{x}{kq} \cos \gamma + \frac{y}{kq} \sin \gamma \right) \\ = & \frac{1}{3} \left(\frac{x}{k} \cos \alpha + \frac{y}{k} \sin \alpha + \frac{x}{q} \cos \beta + \frac{y}{q} \sin \beta + kqx \cos \gamma - kqy \sin \gamma \right). \end{aligned}$$

Cette égalité est vraie quels que soient x et y , d'où le système :

$$\begin{cases} k \cos \alpha + q \cos \beta + \frac{1}{kq} \cos \gamma = \frac{1}{k} \cos \alpha + \frac{1}{q} \cos \beta + kq \cos \gamma \\ k \sin \alpha + q \sin \beta - \frac{1}{kq} \sin \gamma = -\frac{1}{k} \sin \alpha - \frac{1}{q} \sin \beta + kq \sin \gamma. \end{cases}$$

L'égalité des ordonnées des centres de gravité des deux triangles conduit au même système.

Multiplions la deuxième équation par i et additionnons les deux équations. Avec la notation $\text{cis } \theta = \cos \theta + i \sin \theta$, on obtient

$$k \text{cis } \alpha + q \text{cis } \beta + \frac{1}{kq} \text{cis}(-\gamma) = \frac{1}{k} \text{cis}(-\alpha) + \frac{1}{q} \text{cis}(-\beta) + kq \text{cis } \gamma$$

ou encore

$$k \operatorname{cis} \alpha + q \operatorname{cis} \beta + \frac{1}{kq} \operatorname{cis}(-\gamma) = \frac{1}{k \operatorname{cis} \alpha} + \frac{1}{q \operatorname{cis} \beta} + \frac{kq}{\operatorname{cis}(-\gamma)}$$

ce qui correspond à l'équation (2) de la première solution, sous la forme $\sigma_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}$. D'où la même conclusion.

Division

Problème n° 341 de *M&P* n° 162

Un élève effectue la division d'un nombre naturel a par un nombre naturel non nul $b \leq 100$. Dans le développement décimal du quotient, il trouve après la virgule les chiffres consécutifs 1, 9, 8, 2. Démontrer que cet élève s'est trompé dans ses calculs.

J'ai reçu plusieurs réponses à ce problème mais toutes supposent que les chiffres 1, 9, 8, 2 se trouvent immédiatement après la virgule et la plupart considèrent que ces chiffres sont les seuls figurant après la virgule. En fait, le résultat de la division aurait dû être considéré comme du type $n, \dots 1982 \dots$. J'espère recevoir des solutions complètes prochainement.

Inégalité

Problème n° 342 de *M&P* n° 162

Les nombres réels positifs x, y, z sont tels que $xyz \geq 1$. Démontrer l'inégalité

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + x^2 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

La seule solution que j'ai reçue suppose que $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$, ce qui n'est pas nécessairement vrai, c'est le produit xyz qui est supérieur ou égal à 1. Ici aussi, j'attends vos solutions.

* *
*

Les solutions des problèmes que voici doivent me parvenir au plus tard deux mois après la parution de cette revue. Ces solutions peuvent être manuscrites, mais vous pouvez aussi les envoyer à mon adresse e-mail sous la forme d'un fichier \LaTeX ou à défaut au format doc, pdf ou txt. Rédigez vos différentes solutions sur des feuilles séparées et n'oubliez pas d'indiquer votre nom sur chacune des feuilles.

349. Nombres premiers

Déterminer tous les nombres premiers a et b tels que

$$E = a^{a+1} + b^{b+1}$$

est aussi un nombre premier.

350. Tangentes

Démontrer que les deux tangentes communes au cercle $x^2 + y^2 = 2$ et à la parabole $y = \frac{x^2}{8}$ sont perpendiculaires.

351. Bissectrices

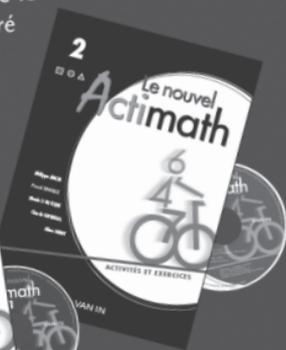
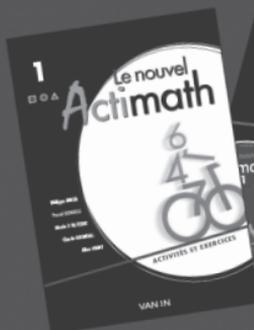
Dans le triangle ABC , les bissectrices AD , BE et CF se coupent en I . Démontrer que le triangle est équilatéral si et seulement si

$$\frac{|AI|}{|ID|} = \frac{|BI|}{|IE|} = \frac{|CI|}{|IF|}.$$

Le nouvel Actimath !

Au premier degré, Le nouvel Actimath se compose :

- > des 2 cahiers Activités et exercices avec leur CD-Rom
- > du référentiel Théorie du premier degré



La collection de mathématique
incontournable du 1^{er} degré.

**Réactualisé
l'année dernière,
il remporte un vif succès.**

Le nouvel Actimath
*le même mais en mieux
car arrivé à pleine maturité !*



Pour tout complément d'information, notre service clientèle est à votre disposition au 010 45 55 30 ou notre déléguée pédagogique au 0478 58 61 83

www.actimath.be

Olympiades

Claudine Festraets ⁽¹⁾

Voici les meilleures solutions aux problèmes MIDI et MAXI de la trente-deuxième Olympiade Mathématique Belge.

MIDI FINALE 2007

1. Le chiffre des unités du nombre naturel N est x . On effectue successivement les opérations suivantes :

- supprimer le chiffre des unités x du nombre N ;
- retrancher $2x$ du nombre obtenu.

Par exemple, le nombre 203 devient 20, puis 14.

Est-il toujours vrai que le nombre final est un multiple de 7 si et seulement si le nombre initial N est un multiple de 7 ?

Solution de Raphaël Egan, élève de 4^e année à l'Athénée Hautes Fagnes de Malmédy

Notons tout d'abord que tout nombre naturel peut s'écrire sous la forme $10d + x$ avec d comme nombre de dizaines et x comme chiffres des unités. Donc ici $N = 10d + x$. Notons également $7\mathbf{N}$ l'ensemble des multiples de 7. On doit donc prouver que

$$10d + x \in 7\mathbf{N} \Rightarrow d - 2x \in 7\mathbf{N} \quad (1)$$

et

$$d - 2x \in 7\mathbf{N} \Rightarrow 10d + x \in 7\mathbf{N} \quad (2)$$

PREUVE DE (1).

Hypothèse : $N = 10d + x \in 7\mathbf{N}$.

Thèse : $d - 2x \in 7\mathbf{N}$.

Preuve : Puisque $10d + x \in 7\mathbf{N}$, alors $20d + 2x \in 7\mathbf{N}$. De plus, $21d \in 7\mathbf{N}$ puisque $21d = 7 \times 3 \times d$. En soustrayant membre à membre, on obtient $d - 2x \in 7\mathbf{N}$ car la somme ou la différence de deux multiples d'un même naturel est multiple de ce naturel.

⁽¹⁾ Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à C. FESTRAETS, 36, rue J.B. Vandercammen, 1160 Bruxelles ou à l'adresse e-mail hamoircl@brutele.be

PREUVE DE (2).

Hypothèse : $d - 2x \in 7\mathbf{N}$.

Thèse : $N = 10d + x \in 7\mathbf{N}$.

Preuve : $21d \in 7\mathbf{N}$ et $d - 2x \in 7\mathbf{N}$ par hypothèse. En soustrayant membre à membre, on obtient $20d + 2x \in 7\mathbf{N}$ car la somme ou la différence de deux multiples d'un même naturel est multiple de ce naturel. Or, $20d + 2x = 2(10d + x)$. Pour que ce nombre soit un multiple de 7, il faut que $10d + x \in 7\mathbf{N}$.

2.

- (a) Trouver tous les couples d'entiers strictement positifs dont la somme est égale au produit. Prouver qu'il n'en existe pas d'autres.
- (b) Trouver tous les triplets d'entiers strictement positifs formant une suite arithmétique dont la somme est égale au produit. Prouver qu'il n'en existe pas d'autres.
(La suite (a, b, c) est appelée suite arithmétique lorsqu'il existe un entier r tel que $(a, b, c) = (a, a + r, a + 2r)$.)
- (c) Que devient la réponse au point (b) si la suite arithmétique est formée d'entiers quelconques (positifs, négatifs ou nuls) ?

Solution de Pierre Haas, élève de 4^e année au Lycée de Garçons de Esch

- (a) Notons a et b ces deux nombres qui doivent satisfaire à l'égalité

$$a + b = ab \Leftrightarrow b = ab - a \Leftrightarrow b = a(b - 1) \Leftrightarrow a = \frac{b}{b - 1}.$$

Or, b et $b - 1$ sont deux nombres entiers consécutifs, ils sont donc premiers entre eux. Dès lors, si $b - 1$ divise b , il faut soit $b = 0$, ce qui est exclu par hypothèse, soit $b = 1 + 1 \Leftrightarrow b = 2$. Pour ce dernier cas, nous trouvons alors l'unique solution $(a, b) = (2, 2)$.

- (b) En notant a , b et c les trois nombres et r la raison de la suite arithmétique, la condition de l'énoncé devient

$$\begin{aligned} a + b + c = abc &\Leftrightarrow a + (a + r) + (a + 2r) = a(a + r)(a + 2r) \\ &\Leftrightarrow 3(a + r) = a(a + r)(a + 2r) \\ &\Leftrightarrow 3 = a(a + 2r). \end{aligned}$$

Comme a et $a + 2r$ sont des nombres entiers, il suffit de considérer la factorisation première du nombre premier 3. Deux cas sont dès lors possibles :

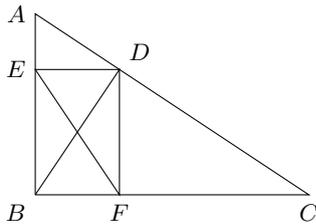
- soit on a $a = 1$ et donc $1 + 2r = 3$ ou $r = 1$, d'où découle le triplet solution $(a, b, c) = (1, 2, 3)$;
- soit on a $a = 3$ et donc $3 + 2r = 1$ ou $r = -1$, d'où découle le triplet solution $(a, b, c) = (3, 2, 1)$.

En simplifiant plus haut par $a + r$, nous avons supposé que $a + r \neq 0$ ou encore $r \neq -a$. Si maintenant, $r = -a$, la condition de l'énoncé devient $a + 0 + (-a) = a \times 0 \times (-a)$ ce qui est vérifié pour toute valeur de a . Cependant, la solution $(a, 0, -a)$ est à rejeter ici car on a certainement a ou $-a$ qui appartient à \mathbf{Z}^- . De plus, ici, les trois nombres sont supposés être non nuls.

- (c) La solution $(a, 0, -a)$ devient possible. Par ailleurs, dans le cas $a + r \neq 0$, il faut encore considérer les possibilités $a = -1$, d'où $r = -1$ avec la solution $(a, b, c) = (-1, -2, -3)$, et $a = -3$, d'où $r = 1$ avec la solution $(a, b, c) = (-3, -2, -1)$.

3. Le triangle ABC est rectangle avec \widehat{ABC} mesurant 90° . Le pied de la hauteur relative à l'hypoténuse est D et les pieds des perpendiculaires abaissées de D respectivement sur $[BA]$ et $[BC]$ sont E et F . Soient r_1, r_2 et r_3 les rayons des cercles inscrits aux triangles AED, EDF et FDC respectivement. La formule $r_2 = \sqrt{r_1 \cdot r_3}$ est-elle toujours correcte ?

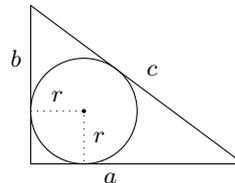
Solution de Jingran Lin, élève de 3^e année à l'Ecole Européenne de Luxembourg



$ED \parallel BF$;
 $\widehat{BAD} = \widehat{DBC} = \alpha$;
 Les triangles rectangles ABD et BCD sont semblables, donc $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{DC}$, ou encore $AD \cdot DC = BD^2 = EF^2$.

Dans un triangle rectangle, le rayon du cercle inscrit vaut

$$r = \frac{a + b - c}{2}.$$



(Voir le dessin.)

Donc,

$$r_1 = \frac{AE + ED - AD}{2} = \frac{AD \cos \alpha + AD \sin \alpha - AD}{2} = \frac{AD}{2} (\cos \alpha + \sin \alpha - 1),$$

$$r_2 = \frac{ED+DF-EF}{2} = \frac{EF \cos \alpha + EF \sin \alpha - EF}{2} = \frac{EF}{2}(\cos \alpha + \sin \alpha - 1),$$

$$r_3 = \frac{DF+FC-DC}{2} = \frac{DC \cos \alpha + DC \sin \alpha - DC}{2} = \frac{DC}{2}(\cos \alpha + \sin \alpha - 1);$$

$$r_1 \times r_3 = \frac{AD}{2} \frac{DC}{2} (\cos \alpha + \sin \alpha - 1)^2 = \frac{EF^2}{4} (\cos \alpha + \sin \alpha - 1)^2 = r_2^2.$$

4. Déterminer tous les nombres entiers a, b tels que

$$(a + b)^n = a^n + b^n$$

(a) pour $n = 2$;

(b) pour $n = 3$;

(c) pour $n > 3$.

Solution de Nicolas Radu, élève de 4^e année à l'Athénée Charles Rogier à Liège

(a) On a successivement

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 2ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

Donc $(a, b) = (0, m)$ ou $(m, 0)$ avec m un entier quelconque.

(b) On a successivement $(a + b)^3 = a^3 + b^3 \Rightarrow a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 \Rightarrow 3ab(a + b) = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$ ou $a = -b$.

Donc $(a, b) = (0, m)$ ou $(m, 0)$ ou $(m, -m)$ avec m un entier quelconque.

(c) 1) Si n est pair.

$$(a + b)^n = a^n + b^n \Rightarrow a^n + x_1 a^{n-1} b + x_2 a^{n-2} b^2 + \dots + x_{n-1} a b^{n-1} + b^n = a^n + b^n.$$

– Soit $a = 0$, d'où $(a, b) = (0, m)$.

– Soit $b = 0$, d'où $(a, b) = (m, 0)$.

– Soit $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Tous les x_i étant positifs :

– si a et b sont positifs, tous les $a^{n-i} b^i$ sont strictement positifs

– si a et b sont négatifs, tous les $a^{n-i} b^i$ sont strictement positif car n étant pair, i et $n - i$ sont de même parité,

– si l'un des nombres est négatif, par exemple b , alors on note $c = -b$ alors on devrait avoir $(a - c)^n = a^n + c^n$.

– Si $a > c$, alors $a < a - c$ d'où $a^n > (a - c)^n$,

- Si $a < c$, alors $c > |a - c|$ d'où $c^n > (a - c)^n$.
Cela conduit à $a^n + c^n > (a - c)^n$, ce qui n'est pas correct.
- 2) Si n est impair.
 - Si a et b sont positifs, tous les $a^{n-i}b^i$ sont strictement positifs.
 - Si a et b sont négatifs, on pose $a = -c$ et $b = -d$, d'où

$$\begin{aligned}(-c - d)^n &= -c^n - d^n \\ -(c + d)^n &= -(c^n + d^n) \\ (c + d)^n &= c^n + d^n,\end{aligned}$$

- et on revient au cas où les deux nombres sont positifs.
- Si a ou b est nul, alors $a^n = a^n$ et $b^n = b^n$, d'où $(a, b) = (m, 0)$ ou $(0, m)$.
 - Si l'un des nombres est négatif (par exemple b), on pose $c = -b$ d'où $(a - c)^n = a^n - c^n$. Cependant, on sait que

$$a^n - c^n = (a - c)(a^{n-1} + a^{n-1}c + \dots + ac^{n-2} + c^{n-1})$$

et donc

$$(a - c)^n = (a - c)(a^{n-1} + a^{n-1}c + \dots + ac^{n-2} + c^{n-1}).$$

- Si $a = c$, alors $a = c$ d'où $a = -b$ et donc $(a, b) = (m, -m)$.
- Si $a \neq c$, alors

$$(a - c)^{n-1} = a^{n-1} + a^{n-1}c + \dots + ac^{n-2} + c^{n-1};$$

- si $a > c$ alors $a > a - c$ d'où $a^{n-1} > (a - c)^{n-1}$,
 - si $c > a$, alors $c > |a - c|$ d'où $c^{n-1} < (a - c)^{n-1}$ (car $n - 1$ est pair).
- D'où

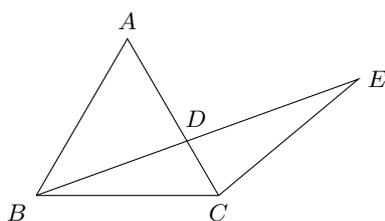
$$(a - c)^{n-1} < a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + ac^{n-2} + c^{n-1}$$

ce qui est impossible.

MAXI FINALE 2007

1. Le triangle ABC est équilatéral. La demi-droite $[BE$ coupe le segment $[AC]$ en D et est telle que \widehat{CBE} mesure 20° et $|DE| = |AB|$. Que vaut

l'amplitude de l'angle \widehat{BEC} ?

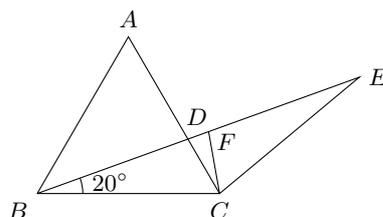


Solution d'Amandine Mousset, élève de 5^e année au Collège S^t Vincent à Soignies

On montre que l'angle \widehat{BEC} a une amplitude de 20° .

Puisque le triangle ABC est équilatéral, on a $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$ et $|AB| = |BC| = |AC|$. De plus, $|AB| = |DE|$.

Puisque $\widehat{CBE} = 20^\circ$, on en déduit que $\widehat{BDC} = 100^\circ$ et $\widehat{CDE} = 80^\circ$.



Posons F , le point de la droite BE tel que $\widehat{DCF} = 20^\circ$. \widehat{BCF} a une amplitude de 80° car $\widehat{C} = 60^\circ$ et $\widehat{DCF} = 20^\circ$.

Le triangle CDF est isocèle car $\widehat{CDE} = \widehat{CDF} = 80^\circ$ et $\widehat{DCF} = 20^\circ$, donc $\widehat{DFC} = \widehat{CFB} = 80^\circ$. On a donc $|DC| = |FC|$. Le triangle BFC est isocèle car $\widehat{CFB} = \widehat{BCF} = 80^\circ$, d'où $|BF| = |BC|$.

Les triangles BFC et EDC sont isométriques car $|FC| = |DC|$; $|BF| = |ED|$ et $\widehat{CFB} = \widehat{CED} = 80^\circ$.

Dès lors $\widehat{CBF} = \widehat{CED} = \widehat{BEC} = 20^\circ$.

2. Autour d'un cercle, on dispose successivement n chiffres a_1, a_2, \dots, a_n (chacun valant de 0 à 9). Partant de a_1 et tournant autour du cercle, on forme le nombre $A_1 = \overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$ (dont les chiffres successifs sont $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$); partant de a_2 et tournant dans le même sens, on forme le nombre $A_2 = \overline{a_2 a_3 a_4 \dots a_n a_1}$ et ainsi de suite. La proposition « si d est un diviseur de A_1 , alors d est aussi un diviseur de chacun des A_i pour $i \in \{2, 3, 4, \dots, n\}$ » est-elle vraie

- (a) pour $d = 9$?
- (b) pour $d = 27$ et $n = 2007$?
- (c) pour $d = 27$ et pour tout n ?

Solution de Giancarlo Kerg, élève de 5^e année à l'Athénée de Luxembourg ((a) et (b))

- (a) Un nombre est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

9 divise A_1 donc 9 divise $\sum_{i=1}^n a_i$. Or $\sum_{i=1}^n a_i$ est la somme des chiffres de tous les A_i d'où 9 divise A_i avec $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

- (b) $10^k \equiv 10 \pmod{27}$ si $k \equiv 1 \pmod{3}$;

$10^k \equiv 19 \pmod{27}$ si $k \equiv 2 \pmod{3}$;

$10^k \equiv 1 \pmod{27}$ si $k \equiv 0 \pmod{3}$.

Soit S_1 la somme de tous les a_i où $i \equiv 1 \pmod{3}$;

S_2 la somme de tous les a_i où $i \equiv 2 \pmod{3}$;

S_3 la somme de tous les a_i où $i \equiv 0 \pmod{3}$.

On a :

$$27 \text{ divise } A_1 \Leftrightarrow A_1 \equiv 0 \pmod{27}$$

$$\Leftrightarrow S_3 + 10S_2 + 19S_1 \equiv 0 \pmod{27}$$

De même,

27 divise A_2

$$\Leftrightarrow A_2 \equiv 0 \pmod{27}$$

$$\Leftrightarrow S_1 + 19S_2 + 10S_3 \equiv 0 \pmod{27}$$

$$\Leftrightarrow (S_1 + 19S_2 + 10S_3) - (S_3 + 10S_2 + 19S_1) \equiv 0 \pmod{27}$$

$$\Leftrightarrow 9S_3 + 9S_2 - 18S_1 \equiv 0 \pmod{27}$$

$$\Leftrightarrow 9(S_1 + S_2 + S_3) \equiv 0 \pmod{27}$$

$$\Leftrightarrow 3 \text{ divise } S_1 + S_2 + S_3.$$

De même aussi,

27 divise A_3

$$\Leftrightarrow A_3 \equiv 0 \pmod{27}$$

$$\Leftrightarrow 10S_1 + S_2 + 19S_3 \equiv 0 \pmod{27}$$

$$\Leftrightarrow (10S_1 + S_2 + 19S_3) - (S_3 + 10S_2 + 19S_1) \equiv 0 \pmod{27}$$

$$\Leftrightarrow 18S_1 - 9S_2 - 9S_3 \equiv 0 \pmod{27}$$

$$\Leftrightarrow 18(S_1 + S_2 + S_3) \equiv 0 \pmod{27}$$

$$\Leftrightarrow 3 \text{ divise } S_1 + S_2 + S_3.$$

Or 3 divise A_1 donc 3 divise $S_1 + S_2 + S_3$ donc 3 divise A_3 .

On permute les S_k uniquement lorsque n est multiple de 3, or $2007 = 3 \times 669$.

- (c) Non : en voici un contre-exemple. Si $n = 2$, 27 divise 27 mais 27 ne divise pas 72.

3. *Considérons les ensembles de n points dont trois quelconques ne sont pas alignés. Pour un tel ensemble, formons tous les triangles dont les sommets sont dans cet ensemble.*

- (a) *Si les n points sont toujours pris dans le plan et si $n = 7$, quel est le nombre maximal de triangles qu'une droite de ce plan ne comprenant aucun des 7 points peut couper ?*
- (b) *Si les n points sont toujours pris dans l'espace et si $n = 7$, quel est le nombre maximal de triangles qu'un plan ne comprenant aucun des 7 points peut couper ?*
- (c) *Généralisez au cas où n est quelconque.*

Solution de Pierre-Alain Jacqmin, élève de 5^e année à l'Institut S^{te} Julie-S^t Laurent à Marche

- (a) La droite divise le plan en deux parties. Elle coupe un triangle si et seulement si ses 3 sommets ne sont pas dans la même partie du plan. Il y a $C_7^3 = 35$ triangles. Comptons combien de triangles ne sont pas coupés par la droite.
- Si la répartition des points de chaque côté de la droite est 3-4, la droite n'en coupe pas C_3^3 dans la première partie et C_4^3 dans la deuxième, donc 5 en tout.
 - Si la répartition est 2-5 ou 1-6 ou 0-7, il n'y en a aucun qu'elle ne coupe pas dans la première partie et elle n'en coupe pas C_5^3 ou C_6^3 ou C_7^3 dans la deuxième partie, ce qui est dans tout les cas plus que 5.
- Elle en coupe donc au maximum $35 - 5 = 30$.
- (b) Le cas est similaire au (a) car le plan coupe l'espace en deux parties. Il coupe donc au maximum 30 triangles.
- (c) Comme les cas sont similaires, je vais traiter le cas où c'est un plan qui coupe l'espace en deux parties. Il y a x points dans une partie et $n - x$ dans l'autre. Pour qu'un plan coupe un triangle, il faut au moins un sommet dans chaque partie. Il y a deux cas séparés.

– Deux sommets sont dans la région des x points : le plan en coupe

$$C_x^2 \cdot (n - x)$$

– Dans l'autre cas, il coupe $C_{n-x}^2 \cdot x$.

Il en coupe donc

$$\begin{aligned} C_x^2 \cdot (n - x) + C_{n-x}^2 \cdot x &= \frac{x(x-1)(n-x)}{2} + \frac{(n-x)(n-x-1)x}{2} \\ &= \frac{x(n-x)(x-1+n-x-1)}{2} \\ &= \frac{x(n-x)(n-2)}{2}. \end{aligned}$$

Comme n est fixé, maximisons $(n-x)x = -x^2 + nx$. Le maximum est en $x = \frac{n}{2}$.

Si n est pair, le plan coupe

$$\frac{\frac{n}{2} \frac{n}{2} (n-2)}{2} = \frac{n^2(n-2)}{8} \text{ triangles.}$$

Si n est impair, le maximum est en $x = \frac{n-1}{2}$. Le plan coupe

$$\frac{\frac{n+1}{2} \frac{n-1}{2} (n-2)}{2} = \frac{(n+1)(n-1)(n-2)}{8} \text{ triangles.}$$

4. Soit f une fonction de \mathbf{N} dans \mathbf{N} telle que

$$f(n+1) > f(n) \quad \text{et} \quad f(f(n)) = 3n.$$

Que vaut $f(2007)$?

Solution de Antoine Ledent, élève de 5^e année à l'Athénée Royal Thyl Lorrain à Verviers

On a $f(0) \geq 0$; $f(1) > f(0)$ et donc $f(1) \geq 1$, $f(2) > 7$, $f(2) \geq 2$, ..., $f(n) \geq n$.

D'où $f(f(n)) \geq f(n)$ et $3n \geq f(n)$.

Si $f(n) = n$, $3n = f(f(n)) = f(n) = n$, ce qui est impossible (sauf si $n = 0$).

Si $f(n) = 3n$, $3n = f(f(n)) = f(n)$, ce qui est impossible.

On a donc $3n > f(n) > n$. Pour $n = 0$, on a $f(0) \geq 0$ et $f(0) \leq 3 \cdot 0$, d'où $f(0) = 0$.

On a $1 < f(1) < 3$, d'où $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 6$, $f(6) = 9$, $f(9) = 18$, ..., et de manière générale $f(3^n) = 2 \times 3^n$ et $f(2 \times 3^n) = 3^{n+1}$.

Puisque $f(3) < f(4) < f(5) < f(6)$, on a $6 < f(4) < f(5) < 9$, d'où $f(4) = 7$, $f(5) = 8$, $f(7) = 12$ et $f(8) = 15$.

Puisque $18 = f(9) < f(10) < f(11) < \dots < f(18) = 27$, on a $f(10) = 19$, $f(11) = 20$, $f(12) = 21$, \dots , $f(17) = 26$. De manière générale,

$$3^{n+1} < f(2 \times 3^n) < f(2 \times 3^n + 1) < \dots < f(3^{n+1}) = 2 \times 3^{n+1}$$

$$2 \times 3^n = f(3^n) < f(3^n + 1) < f(3^n + 2) < \dots < f(2 \times 3^n) < 3^{n+1}$$

D'où $f(3^n + 1) = 2 \times 3^n + 1$, \dots , $f(3^n + k) = 2 \times 3^n + k$ (avec $0 \leq k < 3^n$)
et $f(2 \times 3^n + k) = f(f(3^n + k)) = 3^{n+1} + 3k$.

Or, $2007 = 2 \times 3^6 + 549$, d'où $f(2007) = f(2 \times 3^6 + 549) = 3^7 + 3 \times 549 = 3834$.

Le coin du trésorier

R. Scrève

Tarifs (Janvier 2006)

Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent *Mathématique et Pédagogie*, *SBPM-Infor* et les deux *Math-Jeunes*.

- Belgique :
 - Cotisation ordinaire : 24 € ;
 - Cotisation multiannuelle (5 ans) : 110 € ;
 - Cotisation familiale (réservée aux couples cohabitant ; les intéressés ne reçoivent qu'un exemplaire des publications, mais sont membres à part entière et participent donc aux élections) : 30 € ;
 - Cotisation réduite (réservée aux étudiants et aux sans-emploi) : 15 € ;
- Europe : 65 € (non-PRIOR), 72 € (PRIOR) ;
- Autres pays : 70 € (non-PRIOR), 79 € (PRIOR).

Abonnement à *Mathématique et Pédagogie*

- Belgique : 30 € ;
- Europe : 50 € (non-PRIOR), 54 € (PRIOR) ;
- Autres pays : 53 € (non-PRIOR), 58 € (PRIOR).

Anciens numéros :

- < 2006 : 0,75 €/n° + frais d'expédition.
- ≥ 2006 : 2,50 €/n° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : consulter le secrétariat.

Abonnement à *Math-Jeunes* ou *Math-Jeunes Junior*

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, supérieur et inférieur respectivement, sont idéalement pris de manière groupée par l'intermédiaire d'un professeur.

- Abonnements groupés (au moins 5) :
 - Abonnements groupés à une des revues (3 numéros) Belgique : 4 € ;
 - Abonnements groupés aux deux revues (6 numéros) Belgique : 8 €.

- Abonnements individuels :
 - Abonnements à une des revues (3 numéros)
Belgique : 6 € ;
France : 8 € (à prendre par l'intermédiaire de l'APMEP) ;
Europe : 18 € (non-PRIOR), 20 € (PRIOR) ;
Autres pays : 19 € (non-PRIOR), 22 € (PRIOR).
 - Abonnements aux deux revues (6 numéros)
Belgique : 12 € ;
France : 16 € (à prendre par l'intermédiaire de l'APMEP) ;
Europe : 24 € (non-PRIOR), 26 € (PRIOR) ;
Autres pays : 25 € (non-PRIOR), 28 € (PRIOR).

Anciens numéros :

- < 2006–2007 : 0,25 €/n° + frais d'expédition.
- ≥ 2006–2007 : 0,50 €/n° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : consulter le secrétariat.

Bulletin de l'APMEP

Les membres de la SBPMef peuvent, par versement à son compte, devenir membres de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (France). Le prix de l'abonnement est de 50 €. Ils recevront le *Bulletin* de l'APMEP, le BGV (*Bulletin à Grande Vitesse*) et *PLOT*.

Les membres de la SBPMef peuvent aussi commander par celle-ci les publications de l'APMEP ; ils bénéficient du prix « adhérents ».

Autres publications (brochures et CD-ROM)

Les prix indiqués sont les prix des publications ; les frais d'expédition (port et emballage) sont en sus. Les prix réduits sont réservés aux membres de la SBPMef ou de sociétés associées (comme l'APMEP) et aux étudiants. N'hésitez pas à consulter notre secrétariat ou à visiter notre site Internet.

Pour toutes nos publications non périodiques, à partir du dixième exemplaire, toute la commande bénéficie d'une réduction de 10 %.

Modalités de paiement :

Pour effectuer une commande, versez le montant indiqué sur un des comptes suivants :

- **Si vous habitez en Belgique** : Compte 000-0728014-29 de SBPMef.
- **Si vous habitez en France** : Compte CCP Lille 10 036 48 S de SBPMef.
- **Si vous habitez ailleurs** : Virement international sur l'un de nos deux comptes avec les références internationales suivantes :
CCP BELGIQUE : IBAN BE26 0000 7280 1429 / BIC BPOTBEB1
ou CCP LILLE :
IBAN FR68 2004 1010 0510 0364 8S02 683 / BIC PSSTFRPPLIL

Le coin du trésorier

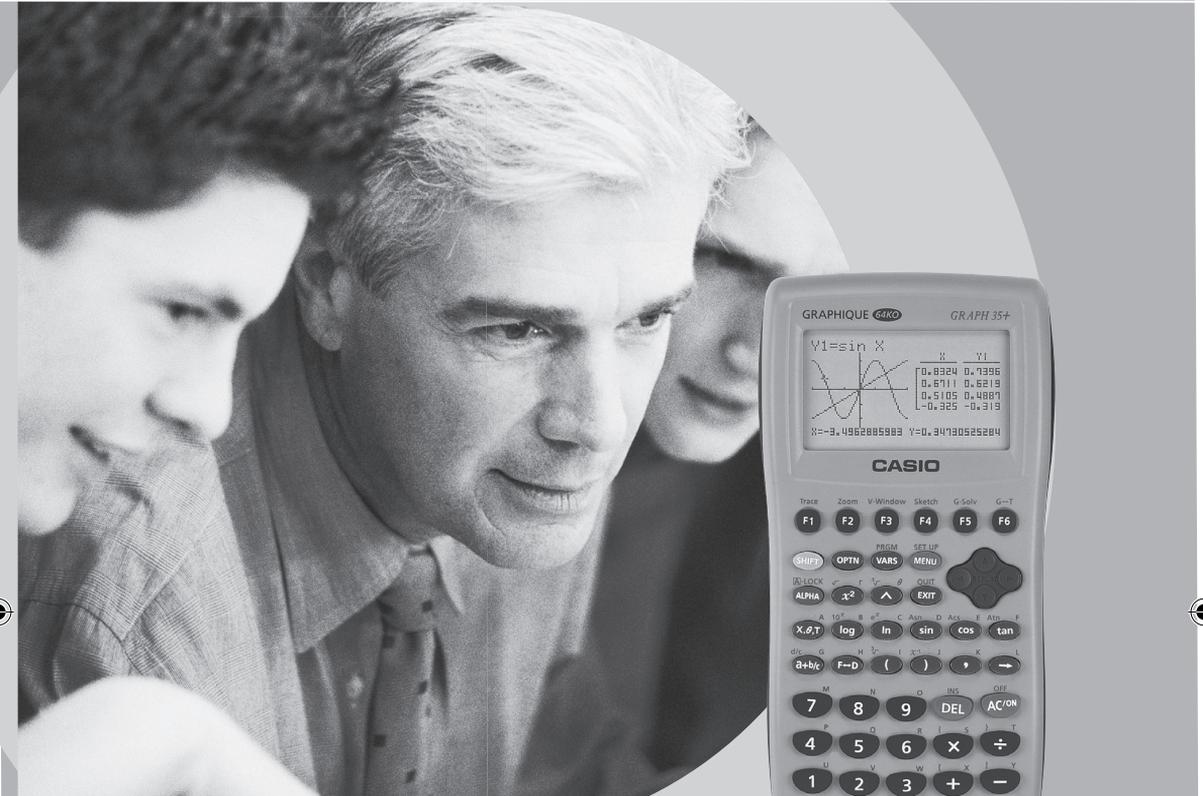
	Prix plein	Prix réduit	Frais d'expédition
Séries RÉNOVER			
Série 1 (n° 12)	1 €	—	T ₁
Série 2 (n°s 7–11 & 13)	5 €	—	T ₂
Série 3 (n° 14)	5 €	—	T ₂
Les 3 séries	7,50 €	—	T ₂
Dossiers d'exploration didactique			
Dossier 2 : <i>Autour du PGCD</i>	1,80 €	1,20 €	T ₁
Dossier 3 : <i>Isomorphisme et Dimension</i>	1,80 €	1,20 €	T ₁
Dossier 6 : <i>Statistique</i>	7,40 €	6 €	T ₁ ⁽¹⁾
Dossier 7 : <i>Vers les infiniment petits</i> (Simone TROMPLER et Guy NOËL)	6 €	—	T ₁
Dossier 8 : <i>La démonstration en géométrie plane dans les premières années l'enseignement secondaire</i> (Claude VILLERS et al.)	9 €	—	T ₂ ⁽²⁾
Dossier 9 : <i>Des démonstrations à la rencontre des compétences à travers de thèmes</i> (Claude VILLERS et al.)	9 €	—	T ₂ ⁽²⁾
Dossier 10 : <i>Narrations de recherche — De la théorie à la pratique dans les enseignements secondaire et supérieur</i> (Jacques BAIR, Jean-Claude DELAGARDELLE, Valérie HENRY)	6 €	—	T ₁
Dossier 11 : <i>Enseignons en jouant</i> (B. HONCLAIRE, N. LAMBELIN, Y. & G. NOËL)	20 €	15 €	T ₂
Jacques BAIR, <i>Mathématique et Sport</i>	5 €	3,70 €	T ₁
François JONGMANS, <i>Eugène Catalan, Géomètre sans patrie, ...</i>	12 €	9,50 €	T ₂
G. ROBERT, CD-ROM, logiciels mathématiques	5 €	—	T ₁
Recueils de questions des OMB			
Tome 5	6 €	—	T ₁ ⁽¹⁾
Tome 6	6 €	—	T ₁ ⁽¹⁾
Tomes 5 & 6 ensemble	10 €	—	T ₁ ⁽¹⁾

⁽¹⁾ 2–3 ex. : T₂; 4–6 ex. : T₃; 7–12 ex. : T₄; au-delà : consulter le secrétariat.
⁽²⁾ 2 ex. : T₃; 3–4 ex. : T₄; au-delà : consulter le secrétariat.

Frais d'expédition (non-PRIOR)			
	Belgique	Europe	Autres pays
Tarif 1	1,80 €	4,50 €	6 €
Tarif 2	3,50 €	8,50 €	12 €
Tarif 3	5 €		
Tarif 4	7 €		

Pour les expéditions PRIOR :
 consulter le secrétariat.
 Pour la définition d'« Europe »,
 voir les tarifs postaux.
 Pour tout problème,
 consulter le secrétariat.

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE



GRAPH 35+

DES CALCULATRICES ADAPTÉES À CHAQUE NIVEAU SCOLAIRE

- 9 modèles de calculatrices scientifiques et graphiques pour accompagner les élèves tout au long de leur scolarité
- Légères, solides et faciles à utiliser
- Tous les modèles scolaires sont garantis trois ans



CASIO[®]
www.cas-bel.com