

Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française	
Secrétariat : <i>M.-C. Carruana</i> , Rue du Onze novembre 24, B-7000 Mons (Belgique). Tél. : 32.(0)65.31.91.80 ; courriel : sbpm@sbpm.be . Site internet : http://www.sbpm.be	
Conseil d'administration : <i>B. Baudelet, M. Denis-Pecheur, É. Deridiaux, P. Dupont, D. Foucart, M. Frémal, Chr. Géron, M. Goffin, R. Gossez-Ketels, M. Herman, J.-P. Houben, R. Lesplingart-Midavaine, M. Machtelings, Chr. Michaux, J. Miéwis, N. Miéwis-Seronveaux, Ch. Randour-Gabriel, R. Scrève, Ph. Skilbecq, G. Troessaert, Y. Vancaster</i>	
Président, Olympiades Internationales : <i>G. Troessaert</i> , Sur le Chêne 58, 6800 Libramont, Tél. 061.22.42.01	Vice-Présidents : <i>M. Herman</i> , Rue Rafhay 95, 4630 Soumagne, Tél. 087.26.70.23 ; <i>D. Foucart</i> , Rue du Colroy 18, 7050 Herchies
Administrateur délégué : <i>Chr. Michaux</i> , Rue Brigade Piron 290, 6061 Montignies-sur-Sambre, Tél. 065.35.47.06	Congrès, Publicité : <i>M. Denis-Pecheur</i> , Rue de la Ferme 11, 5377 Noisieux (Somme-Leuze), Tél. 086.32.37.55
Trésorier : <i>R. Scrève</i> , Rue des Goutteaux 6, 6032 Mont-sur- Marchienne, Tél. 071.40.27.34	Secrétaire : <i>M. Frémal</i> , Rue W. Jamar 311/51, 4430 Ans, Tél. 04.263.68.17
Olympiades nationales : <i>Cl. Festraets-Hamoir</i> , Rue J.-B. Vandercammen 36, 1160 Bruxelles Tél. 02.673.90.44	Contact Presse : <i>N. Miewis-Seronveaux</i> , Avenue de Péville 150, 4030 Grivegnée Tél. 04.343.19.92
Math-Jeunes Junior : <i>A. Paternotte</i> , Rue du Moulin 78, 7300 Boussu, Tél. 065.78.50.64	Math-Jeunes Senior : <i>G. Noël</i> , Rue de la Culée 86, 6927 Resteigne, Tél. 084.38.72.89
SBPM-Infor : <i>R. Gossez</i> , Albert I Laan 13, 1560 Hoeilaart, Tél. 02.657.98.92	Site Internet : <i>R. Lesplingart</i> , Rue de Trazegnies 87, 6230 Pont-à-Celles, Tél. : 071.84.36.08
Mathématique et Pédagogie : <i>P. Dupont</i> , Rue du Stampia 77, 1390 Grez-Doiceau, Tél. 010.84.11.99 Comité de lecture : <i>J. Bair, A.-M. Bleuart, M. Denis-Pecheur, V. Henry, M. Herman, J.-P. Houben, Chr. Michaux, J. Miewis, J. Navez, G. Noël, Ph. Skilbecq, Cl. Villers</i>	

Photo de couverture : *Ellipse obtenue par section plane d'un cylindre de révolution* ;
Wépion, Février 2008 — Photo P. Dupont



Mathématique et Pédagogie

Sommaire

Articles

- Richard Choulet, *Après le nombre d'or, quels nombres aussi riches inventer ?* 3
- Jean-Paul Houben, *Cabri-Géomètre et $(a + b)^2$* 31
- Hugues Vermeiren, *La géométrie logique sur TI-nspire™* 39

Rubriques

- J. Navez, *Bibliographie* 65
- Cl. Festraets, *Problèmes* 67
- Cl. Festraets, *Olympiades* 73
- R. Scrève, *Le coin du trésorier* 79

NOTE

- Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse :
Pascal Dupont, Rue du Stampia 77, B - 1390 Grez-Doiceau.
Courriel : `pascal.dupont@ulg.ac.be`
- Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique *stricto sensu*, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques, &c.
- Les auteurs sont responsables des idées qu'ils expriment. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.
- Les auteurs sont invités à envoyer leurs articles encodés sur un CD-rom ou par courrier électronique. L'usage de $\text{\LaTeX}$ est vivement recommandé ; d'autres traitements de texte ne devraient être utilisés que pour des textes ne comportant pas de formules ; dans ce cas, le format « texte seul » est finalement encore préférable. À défaut, les textes seront dactylographiés. *Les textes devant être réencodés, en tout ou en partie, risquent de voir leur délai de parution allongé de manière appréciable.*
- Si l'article en contient, la qualité des figures est extrêmement importante. Elles devraient être réalisées selon l'une des modalités suivantes, dans l'ordre des préférences décroissantes : l'usage, dans le texte, de l'environnement « tikzpicture » (défini dans le paquet « tikz ») ; l'inclusion de fichiers externes, au format PDF ou JPEG (éviter les compressions trop importantes) : le PostScript devra être converti ; dans le cas d'un article envoyé sur papier, des documents de bonne qualité et prêts à être scannés.
- L'auteur mentionnera dans l'article ses prénom, nom et adresse (personnelle ou professionnelle) ainsi que l'institution où il travaille et, éventuellement, une liste de mots clés (10 maximum).
- La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous.
Pour les livres :
DIEUDONNÉ J., *Foundations of Modern Analysis*, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pp.
Pour les articles :
GRIBAUMONT A., Les structures de programmation, *Mathématique & Pédagogie*, **36** (1982), 53–56.
- Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée ; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour ce faire.
- MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

©SBPMef - Toute reproduction partielle ou totale est interdite sans autorisation.
Éditeur responsable : Pascal Dupont, Rue du Stampia 77, 1390 Grez-Doiceau.
Publié avec l'appui de l'Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Service général du Pilotage du système éducatif.

Après le nombre d'or, quels nombres aussi riches inventer ?

RICHARD CHOULET

Lycée Augustin Fresnel, Caen

*À Françoise, qui comprend difficilement
que je n'ai pas le temps de faire le ménage.*

Introduction

Relecteur d'un article pour notre association qui entrevoyait une généralisation du nombre d'or par l'introduction de nombres dits « métalliques », je me suis intéressé à ce qu'en proposait l'internet et j'ai trouvé toute une alchimie pour laquelle il est nécessaire d'y voir clair. En particulier les candidats au titre de nombre d'argent se bousculent et le vocabulaire est fluctuant. Afin d'apporter mon lingot à l'édifice et peut-être de dégager un critère pertinent (?), j'ai voulu y mettre mon grain de sel et surtout pratiquer un peu de mathématiques à l'occasion de tel ou tel choix fait par l'utilisateur du mot. Faisons donc notre plein de friandises à travers ce marché pittoresque.

1. Les boutiques d'argenterie ne manquent pas

1. Un premier boutiquier nous propose — je ne pense pas que cela soit de la contrebande mais il y a quand même beaucoup trop de produits — des nombres d'argent : « nombre positif (c'est moi qui dis positif) égal à son inverse plus lui-même ». Cette définition est du toc, le commerçant voulant dire que l'on cherche les nombres $S(n)$ (sans doute que n est entier) tel que $S(n) = n + 1/S(n)$.

Adresse de l'auteur : 27 rue du Quatre Août, F - 14 210 Avenay, France ;
courriel : richardchoulet@yahoo.fr.

Texte de l'atelier présenté lors du Congrès de la SBPMef à Mons, le 22 août 2007.

D'abord, il est singulier que *le* nombre d'or soit ramené au rang d'un vulgaire nombre d'argent. Ensuite l'équation qui régit ces nombres n'est que du second degré $x^2 - nx - 1 = 0$ (c'est d'un banal!); on a sa valeur $\Psi_n = \frac{1}{2}(n + \sqrt{n^2 + 4})$. Il n'est pas indiqué que n soit exclusivement entier, mais c'est mieux si l'on veut faire des fractions continuées et cela donne alors ce résultat gentillet : $\Psi_n = [n; \overline{n}]$; remarquons que Ψ_1 est le nombre d'or. Bref, tout ce qui est rare étant cher... je dirais que ce n'est pas cher mais on peut s'amuser avec cette bimbeloterie et au moins, ça a le mérite d'exister.

2. En sillonnant ce dédale, j'ai aussi trouvé un magasin qui proposait (it was en étranger) de la *constante d'argent* comme la plus grande solution réelle positive de $x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0$ en fait $2 + 2 \cos \frac{2\pi}{7} = 3,246\,979\,603\dots$; il y avait là un petit côté aguicheur car il était écrit en grand que « it is the seventh Beraha number » ce qui ne pouvait manquer d'attirer nombre de touristes en mal d'exotisme. On n'achète certes pas un c'at dans une pouc' as said my mother mais voici quelques petits souvenirs. Le n -ième nombre de Beraha est $\mathcal{B}(n) = 2 + 2 \cos \frac{2\pi}{n}$. Dans cette terminologie $\mathcal{B}(5)$ est le nombre $\Phi + 1$, $\mathcal{B}(7)$ est la constante d'argent du boutiquier et $\mathcal{B}(10) = \Phi + 2$. Cela se tient. Il y a même plus drôle, de quoi se tordre : en notant $\alpha = \sqrt[3]{7 + 7\sqrt[3]{7 + 7\sqrt[3]{7 + \dots}}}$, ce qui veut dire en fait $\alpha \geq 0$ et $\alpha^3 = 7\alpha + 7$, on trouve :

$$\mathcal{B}(7) = 2 + \frac{\alpha + 2}{\alpha + 1} = 3 + \frac{1}{\alpha + 1}.$$

Détaillons : d'abord la notation avec radicaux superposés *ad libitum* sous réserve que cela ait un sens et c'est un problème de limite, veut dire que $\alpha^3 = 7 + 7\alpha$ en élevant au cube où α est évidemment positif ($\alpha = 3,04891\dots$).

Le deuxième point consiste à démontrer que le nombre positif $2 + \frac{\alpha + 2}{\alpha + 1}$ est bien solution de $x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0$. Le numérateur du quotient obtenu à gauche en remplaçant est :

$$(3\alpha + 4)^3 - 5(\alpha + 1)(3\alpha + 4)^2 + 6(\alpha + 1)^2(3\alpha + 4) - (\alpha + 1)^3 = -\alpha^3 + 7\alpha + 7 = 0$$

ce qui assure le résultat.

2. Où je dénèche du sérieux

Dans cette troisième échoppe, la définition possible prolonge l'idée de la définition du nombre d'or et se trouve donc avoir une interprétation géométrique ([18]).

Ce nombre d'argent apparaît comme un quotient : plus précisément dans le partage d'un segment unité en trois segments de longueurs respectives a, b et c , la section est « argentée » si et seulement si le nombre $\Psi_2 = \frac{1}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ vérifie : $\Psi_2^3 = \Psi_2^2 + \Psi_2 + 1$.

En souvenir du nombre d'or, solution positive de l'équation $x^2 = x+1$, on pourrait appeler nombre métal d'ordre m la solution positive de l'équation $x^m = x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1$ (lorsque m est pair il y a une autre solution réelle). Pour $m = 2$, c'est le nombre d'or noté Φ_2 ; pour $m = 3$, on rencontre la dénomination de nombre d'argent et on le note Φ_3 . Au-delà de 3, le tableau de MENDELEÏEV n'y suffira pas, donc arrêtons les qualificatifs. D'ailleurs au passage, si on est tenté de poursuivre avec le bronze, le bronze n'est pas un métal.

Nous avons les valeurs $\Phi_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803\dots$ et

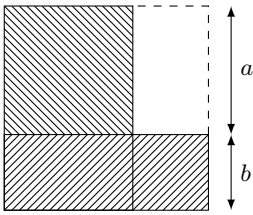
$$\Phi_3 = \sqrt[3]{\frac{19+3\sqrt{33}}{27}} + \sqrt[3]{\frac{19-3\sqrt{33}}{27}} + \frac{1}{3} = 1,839\,286\,755\,214\,16\dots;$$

d'autre part, signalons les développements en fractions continuées de ces deux nombres. En ce qui concerne le nombre d'or, c'est facile à obtenir puisque $\Phi_2 = 1 + \frac{1}{\Phi_2}$ permet en réitérant d'avoir $\Phi_2 = [1; 1; 1; 1; \dots]$ dont les réduites successives sont les quotients des nombres de la suite de FIBONACCI usuelle : $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \dots$

Quant au nombre Φ_3 , on obtient $\Phi_3 = [1; 1; 5; 4; 2; 305; 1; 8; 2; 1; 4; 6; \dots]$, qui donne pour premières réduites :

$$1, 2, \frac{11}{6}, \frac{46}{25}, \frac{103}{56}, \frac{31\,461}{17\,105}, \frac{31\,564}{17\,161}, \frac{694\,305}{377\,486}, \dots$$

Géométriquement on peut faire un parallèle entre or et argent comme l'illustrent les figures suivantes.



Les parties hachurées ont même aire lorsque :

$$x = \frac{a}{b} = \Phi_2,$$

puisque $a^2 = ab + b^2$ se traduit par :

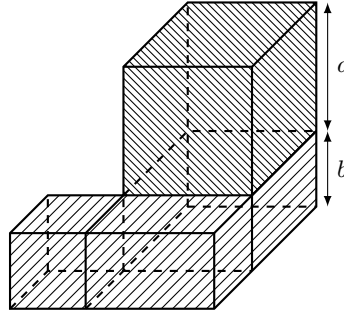
$$\begin{cases} x^2 - x - 1 = 0 \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Les parties hachurées ont même volume lorsque :

$$x = \frac{a}{b} = \Phi_3,$$

puisque $a^3 = a^2b + b^2a + b^3$ se traduit par :

$$\begin{cases} x^3 - x^2 - x - 1 = 0 \\ x \geq 0. \end{cases}$$



3. À nous les trésors !

3.1. Un magasin de plus ?

Dans ce magasin, au demeurant bien achalandé ([16]), est appelé *nombre d'argent* (ou constante de plastique ou encore nombre de plastique — là ça fait un peu déchetterie—) la solution positive de l'équation $x^3 = x + 1$. On peut se dire en entrant que ce sera un peu comme ailleurs mais là on se trompe lourdement. Certes laisser tomber le x^2 par rapport au paragraphe précédent n'est pas très révolutionnaire. Et pourtant jugez-en plutôt.

Cette équation est l'équation caractéristique des suites satisfaisant la récurrence linéaire $\mathcal{R} : u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$.
Il y a deux suites répertoriées vérifiant $\mathcal{R}$.
La suite de PADOVAN P_a ([11]) pour laquelle $u_0 = u_1 = u_2 = 1$; elle commence donc par : 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, ... et a pour fonction génératrice $x \mapsto \frac{1 - x^2}{1 - x^2 - x^3}$.

La deuxième suite est la suite de Perrin P_e pour laquelle $u_0 = 3$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 2$; elle commence par : 3, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, 12, 17, 22, 29, 39, ... et a pour fonction génératrice $x \mapsto \frac{3-x^2}{1-x^2-x^3}$.

La suite fondamentale qui satisfait $\mathcal{R}$ pour tout entier, est, quant à elle, définie par $G_p = 0$ pour tout $p \leq 0$, $G_1 = 1$, ce qui fait que les premières valeurs en sont : 0, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, ... autrement dit une translatée de la suite de PADOVAN.

Plus précisément, chacune des suites précédentes s'écrit à l'aide de 3 termes consécutifs de la suite fondamentale et ainsi obtient-on pour tout entier n :

$$P_a(n) = G_{n+2} + G_{n+1} = G_{n+4} \quad \text{et} \quad P_e(n) = 3G_{n+1} - G_{n-1}.$$

Ce nombre d'argent Ψ est égal à

$$\frac{(9 - \sqrt{69})^{1/3} + (9 + \sqrt{69})^{1/3}}{2^{1/3}3^{2/3}} = 1,324\,717\,95\dots = [1; 3; 12; 1; 1; 3; 2; \dots].$$

Un intérêt de la définition donnée de ce nombre réside dans le résultat suivant : il n'y a que *deux nombres réels* $x > 1$ pour lesquels existent des entiers naturels k et l satisfaisant à :

$$\begin{cases} x + 1 = x^k \\ x - 1 = x^{-l} \end{cases};$$

ces deux nombres sont le nombre d'or et ce nombre d'argent.

Le nombre d'or Φ vérifie : $\begin{cases} \Phi + 1 = \Phi^2 \\ \Phi - 1 = \Phi^{-1} \end{cases}$ et le nombre d'argent Ψ est tel que : $\begin{cases} \Psi + 1 = \Psi^3 \\ \Psi - 1 = \Psi^{-4} \end{cases}$. La démonstration faite par AARTS date de 2001 (voir [2]). Le problème est de démontrer que le système $\begin{cases} x^k - x - 1 = 0 \\ x^{l+1} - x^l - 1 = 0 \end{cases}$ n'a qu'une seule solution réelle si et seulement si $(k; l) \in \{(2; 1), (3; 4)\}$.

3.2. Voici le principe de la démonstration

1. Tout d'abord SELMER [8] démontre en 1956 que le trinôme $X^n - X - 1$ (où $n \geq 3$) est irréductible c'est-à-dire ne peut s'écrire comme un produit non trivial de polynômes à coefficients entiers.
2. Ce résultat est complété en 1960 par TVERBERG [10] sous la forme : tout trinôme $X^m \pm X^k \pm 1$ ($m \geq 3$ et $1 < k < m$) est soit irréductible

soit un produit de deux polynômes. Dans ce dernier cas la factorisation peut être arrangée de telle sorte que le premier soit irréductible (voire constant) et le deuxième *n'ait que des zéros de module 1*.

3. En particulier lorsqu'on s'intéresse à $X^m - X^{m-1} - 1$ ($m \geq 3$), il est soit irréductible, soit un produit de polynômes où figure obligatoirement $X^2 - X + 1$.

En effet de $|x|^{m-1} = \frac{1}{|x-1|}$, vient que si le polynôme n'est pas irréductible, ses zéros de module 1 d'après (2), sont $\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}$ ce qui montre que le polynôme est divisible par $X^2 - X + 1$.

4. Soit k et l entiers. Pour $k = l + 1 = 2$, $X^k - X - 1$ et $X^{l+1} - X^l - 1$ sont égaux ; seul Φ est solution des deux équations associées.

Supposons donc $k \geq 3$ ou $l \geq 2$. Comme $X^k - X - 1$ est irréductible, un facteur commun à $X^k - X - 1$ et $X^{l+1} - X^l - 1$ ne peut venir que du résultat : le premier polynôme divise le second. Ceci signifie que :

$$X^{l+1} - X^l - 1 = (X^2 - X + 1)(X^k - X - 1).$$

En développant on voit immédiatement que ce résultat n'intervient que si et seulement si $l = 4$ et $k = 3$; la solution positive commune aux deux équations est bien le nombre d'argent Ψ . ■

Ce nombre d'argent devient une perle du point de vue suivant : c'est le plus petit nombre de PISOT-VIJAYARAGHAVAN. Qu'est-ce qu'un nombre de PISOT-VIJAYARAGHAVAN ? C'est un entier algébrique positif plus grand que 1 dont tous les conjugués sont de module inférieur ou égal à 1 (donc ici 1 d'après TVERBERG). Ce résultat est dû à SIEGEL (1944).

Remarque expérimentale : Ayant programmé le calcul du résultant (voir par exemple [4]) de $X^2 - X - 1$ et $X^{l+1} - X^l - 1$ pour essayer d'y voir un peu clair, avant de trouver les documents salvateurs, j'ai constaté (attention je n'ai pas dit démontré) que ces résultants successifs, suivant $l \geq 1$, donnaient au signe près la suite 0, 1, 1, 4, 5, 11, 16, 29, 45, ... Autrement dit se trouvait définie la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ (A001350 chez [17]) pour laquelle (quantificateurs adéquats)

$$u_{2p+3} = u_{2p+2} + u_{2p+1}$$

et

$$u_{2p+4} = u_{2p+3} + u_{2p+2} + 2$$

avec $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = 1$ et $u_4 = 4$. On pourrait suivant la parité de n donner l'expression de u_n , mais en fait la récurrence est d'ordre 4 :

$$u_{n+4} = u_{n+3} + 2u_{n+2} - u_{n+1} - u_n$$

pour tout n . Le polynôme caractéristique est : $X^4 - X^3 - 2X^2 + X + 1$ soit encore $(X^2 - X - 1)(X^2 - 1)$. On obtient alors après quelques calculs :

$$u_n = \Phi^{n-1} + \Phi^{-(n-1)} - 1 + (-1)^n.$$

Plus fort : le résultant de $X^3 - X - 1$ et $X^{l+1} - X^l - 1$ ($l \geq 1$) est le l^e terme de la suite $-1, -1, -1, 0, 1, 1, 1, 5, 1, 7, 8, 5, 19, 11, 23, 35, \dots$ (A001945 chez [17]) définie par la récurrence

$$u_{n+6} = -u_{n+5} + u_{n+4} + 3u_{n+3} + u_{n+2} - u_{n+1} - u_n$$

de polynôme caractéristique :

$$X^6 + X^5 - X^4 - 3X^3 - X^2 + X + 1 = (X^3 - X - 1)(X^3 + X^2 - 1).$$

Enfin avec $X^4 - X - 1$ et $X^{l+1} - X^l - 1$ ($l \geq 1$) c'est le trou noir. Pour les aficionados de la chose cela commence par : $-1, 1, 1, 7, 1, 1, 1, -1, -1, -7, -16, -13, -17, -59, -67, -49, -131, -239, -191, -269, -625, \dots$ qui ne m'évoque rien. Aurait-on $X^4 - X - 1$ en facteur dans le polynôme caractéristique ? Ce serait bien mais l'histoire ne le dit pas !

4. Or-Fibonacci, argent-Padovan : même combat !

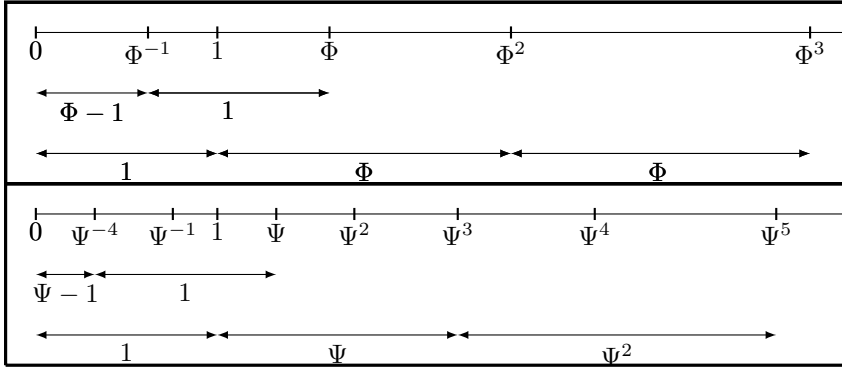
4.1. Système de mesures

Nous avons vu l'origine commune des nombres d'or Φ et d'argent Ψ comme seules solutions d'un système d'équations ; ce système a une source géométrique.

Appelons système de mesures associé au réel $q > 1$ la suite géométrique $(q^n)_{n \in \mathbf{N}}$. Si l'on considère cette échelle pour mesurer des longueurs de segments, deux conditions de compatibilité sur ce système doivent être satisfaites. Tout d'abord, en juxtaposant deux segments de mesure consécutive

q^k et q^{k+1} , on obtient un nouveau segment dont la mesure est un certain q^m ($m = k + 2$ avec $q = \Phi$ ou $m = k + 3$ avec $q = \Psi$). D'autre part en superposant deux segments de mesure q^{k+1} et q^k on obtient un nouveau segment « différence », dont la mesure doit être un certain q^n . On voit ainsi que cela se ramène, par équivalences au problème posé.

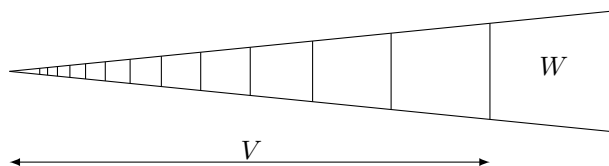
Ce qu'on a dit au paragraphe précédent montre donc qu'il n'y a que deux systèmes de mesures possibles. Le schéma ci-dessous illustre chacune des situations $q = \Phi$ et $q = \Psi$.



4.2. Rappel sur la notion de gnomon

Si, étymologiquement, gnomon évoque l'idée de mesure du temps par un bâton planté en terre pour repérer l'ombre qu'en laisse le soleil, a co-existé également du point de vue numérique chez les Grecs, cette idée que le gnomon est le truc qu'il faut ajouter pour que ça reste pareil : $2n + 1$ est gnomon du carré n^2 puisque la somme donne $(n + 1)^2$ qui est encore un carré. D'ailleurs on arrive rapidement à la même idée géométrique puisque n^2 est l'aire du carré de côté n tandis $2n + 1$ est l'aire de l'équerre bordant ce carré pour faire un nouveau carré.

D'où cette définition plus moderne de gnomon en géométrie euclidienne (plane ici) qu'une figure W est gnomon de V pour traduire qu'existe une similitude de $W \cup V$ vers V de rapport λ avec $0 < \lambda < 1$: par exemple (non trop évident) une situation de Thalès avec des parallèles bien choisies telles que l'offre le schéma suivant :



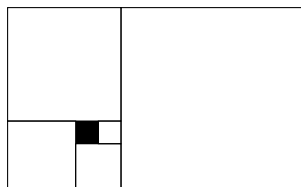
Cette configuration de gnomons en cascade rappelle la disposition des barrettes sur certains instruments de musique (guitare, ...) puisqu'il y a, à la clé, des suites géométriques.

On peut imaginer sans peine qu'il y a une condition structurelle qui lie gnomon et forme associée et qu'on ne peut faire n'importe quoi.

Plus précisément, sur une conjecture de GAZALÉ ([4, p. 143]), AARTS a démontré ([1]) que dans le cas où l'on suppose W polygone convexe (avec un nombre fini de côtés par définition), celui-ci a au maximum six côtés. Lorsque le polygone est supposé de plus régulier, W ne peut être qu'un *triangle équilatéral ou un carré*. Mézalar quelles formes peut-on associer ? Sous la condition de finitude, il n'y a que deux cas possibles. La variété ne manque pas dans le cas où l'ensemble comprend une infinité de côtés ou lorsqu'on n'impose plus de prendre un gnomon régulier comme l'illustrent les dessins de la p. 12.

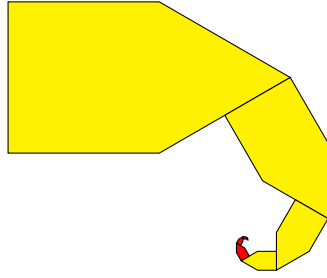
4.3. Rectangle doré :

Premier gnomon polygone convexe régulier

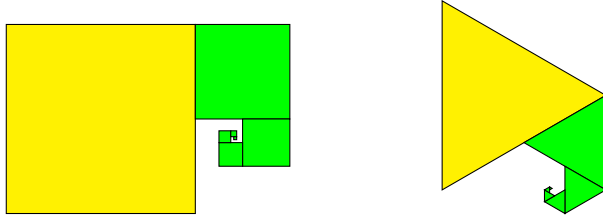


Dès que l'on complète un rectangle par un carré et que l'on recommence *ad libitum*, il y a de la suite de FIBONACCI dans l'air.

Dans le dessin ci-contre, on part du carré noir de côté 1 ; les carrés successifs, s'enroulant dans le sens indirect, ont pour longueur de côté 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... Ce sont les nombres de la suite de FIBONACCI $F^{(2)}$ qui satisfait la récurrence $F_{n+2}^{(2)} = F_{n+1}^{(2)} + F_n^{(2)}$. On sait que les quotients consécutifs formés par les longueurs des côtés tendent vers le nombre d'or $\Phi = 1,618 \dots$. Nous ne sommes pas ici dans la situation de figures semblables contrairement au cas connu du rectangle d'or ou plus exactement de la



Une des pinces d'or du crabe ?



Spécimens de Scorpionibus à poils ras

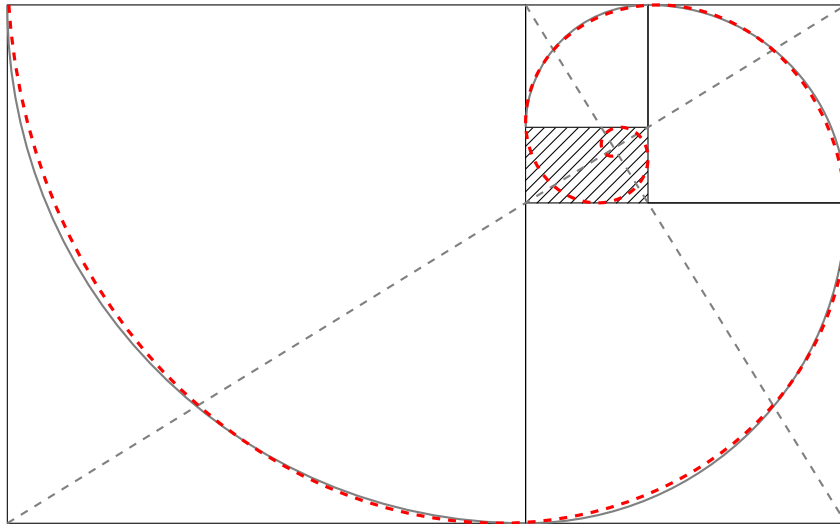
cascade des rectangles d'or comme il suit.

Les coordonnées de ω , intersection des droites en pointillés, dans le repère orthonormal pour lequel les coordonnées de a sont $(\Phi, 0)$ et celles de b sont $(0, 1)$, ou encore $\left(\frac{2\Phi+1}{\Phi+2}, \frac{2\Phi+1}{3\Phi+1}\right)$. Classiquement, pour illustrer la spirale d'or, on inscrit dans les carrés, des quarts de cercle « qui se raccordent bien ».

Un peu de maths expérimentales : voici la ligne de calculs en $\text{\LaTeX}$ donnant la spirale logarithmique inscrite dans les rectangles dorés (en pointillés) :

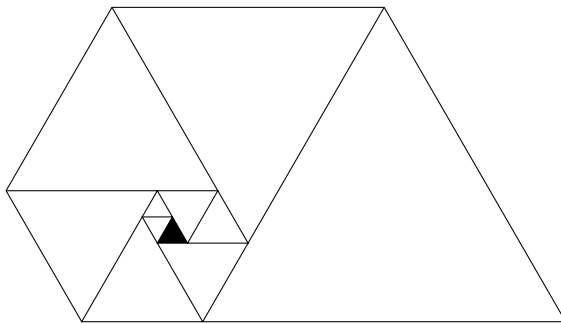
```
\parametricplot[plotpoints=1000,linewidth=0.5mm,linecolor=black]{-355}{1000}
{12.03738 t 159 add cos 2.7182818284 -0.00538 t mul exp 1.85 mul mul add
7.43951 t 159 add sin 2.7182818284 -0.00538 t mul exp 1.85 mul mul add}
```

En clair l'équation polaire (d'origine ω) qui a servi au tracé est : $\varrho = 1,85 \times e^{-0,00538(t+159)}$, t en degrés entre -355 et 1000 . On voit d'ailleurs que la fatigue de la recherche d'une spirale plus onctueuse n'était pas loin d'être vaine, car les cercles font fort bien l'affaire (fig. p. 13).



4.4. Pentagone d'argent : Second gnomon polygone convexe régulier

La situation géométrique abordée maintenant est à mettre en parallèle avec le 3. qui précède, et l'introduction de la suite de FIBONACCI.



En partant du triangle équilatéral noir de côté 1, les triangles successifs, s'enroulant dans le sens indirect, ont pour longueur de côté 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, ... Ce sont les nombres de la suite de PADOVAN P_a qui satisfait la récurrence $P_a(n+1) = P_a(n-1) + P_a(n-2)$. Les quo-

tients consécutifs formés par les longueurs des côtés tendent vers le nombre d'argent $\Psi = 1,324\,717\dots$

Suit maintenant une figure d'argent : on part d'un pentagone particulier (celui hachuré où apparaît ω) puisqu'il a quatre angles de 120° et un de 60° tandis que ses côtés, dans l'ordre approprié aux angles, sont proportionnels à Ψ , Ψ^2 , Ψ^3 , Ψ^4 et Ψ^5 . En accolant dans le sens indirect, comme il est clair sur la figure, un triangle équilatéral, on obtient un nouveau pentagone semblable au premier dans le rapport Ψ et ainsi de suite. On peut faire de même dans le sens direct dans le rapport inverse ce qui n'a pas été entrepris ici pour avoir une lecture plus aisée. On conçoit facilement la convergence des pentagones (??) vers le point ω .

Les coordonnées de ω autour duquel s'ordonne ce bel agencement, dans le repère orthonormal pour lequel les coordonnées de a sont $(\Psi; 0)$ et celles de b sont $\left(-\frac{\Psi^2}{2}; \frac{\Psi^2\sqrt{3}}{2}\right)$, ou encore $\left(\frac{\Psi^2+3\Psi+1}{2\Psi+4}; \frac{(\Psi^2+\Psi)(\Psi^2+3\Psi+1)\sqrt{3}}{(2\Psi+4)(\Psi^2+\Psi+2)}\right)$. Notons en pointillés les droites privilégiées d'écart angulaire 60° , sur lesquelles se trouvent tous les sommets considérés.

J'aurais bien aimé trouver l'équation de la jolie spirale de la p. suivante (qui joue le rôle de la spirale d'or dans le cas évoqué ci-dessus du rectangle d'or et de ses semblables), pour notre situation du pentagone d'argent, mais je me suis contenté de prendre une spirale logarithmique sous forme approchée pour le schéma. Le problème, dans la recherche de l'exakte équation, c'est que son centre, doit être ω et alors là, ô mes gars, ça craint ! Serez-vous heureux si je vous écris que

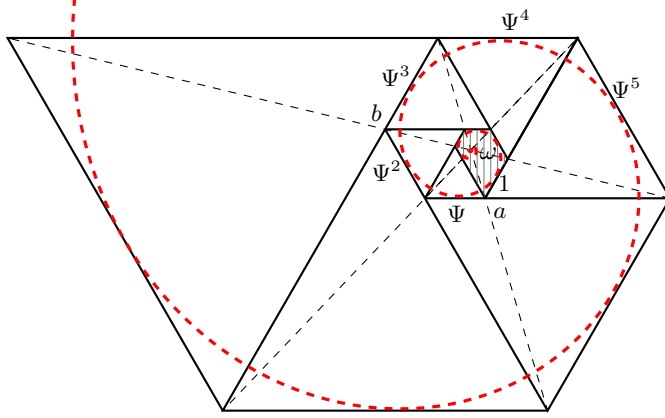
$$\begin{cases} x = 1,01197 + 1,666666 \cos(t + 159)e^{-0,004792t} \\ y = 1,0626566 + 1,666666 \sin(t + 159)e^{-0,004792t} \end{cases}$$

avec t en degrés ?

5. Encore une question

On a vu dans le paragraphe précédent qu'on devait avoir dans chacun des cas envisagés : $q^k + q^{k+1} = q^m$ et $q^{l+1} - q^l = q^{-m}$ pour avoir un système de mesures ; mais quelles sont donc les $\mathbf{Z}$ -combinaisons linéaires de q et de 1 qui donnent les puissances entières de q ?

Je vais détailler le cas de $q = \Phi$; l'autre est certes un peu plus compliqué mais pas trop.



On doit revenir pour cela à l'écriture du terme général F_n ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, ...) de la suite de FIBONACCI (respectivement de PADOVAN) à l'aide du nombre d'or Φ et de son conjugué dans $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$; cela nécessite quelques aménagements pour pouvoir passer aux exposants entiers relatifs. Si l'on veut définir la suite sur les nombres négatifs avec évidemment la même relation de récurrence et recoller aux indices positifs « en venant de $-\infty$ », la suite doit vérifier $F_{-(n+2)} = -F_{-(n+1)} + F_{-n}$ ($n > 0$) pour atteindre de la sorte les indices négatifs.

Il en résulte qu'on n'a pas le choix : $F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n$. En notant $\mathcal{A} = \{\Phi^n, n \in \mathbf{Z}\}$, on obtient ainsi que pour tout entier n de $\mathbf{Z}$:

$$F_n + F_{n+1}\Phi \in \mathcal{A}.$$

Pour ce qui est du cas $q = \Psi$, on note P_a la suite de PADOVAN. On la définit sur les entiers négatifs de la manière qui suit. Notons $P_a(n) = a_{-n}$ pour $n < 0$. La suite a est définie par récurrence par $a_{-n-3} = -a_{-n-2} + a_{-n}$, autrement dit le polynôme caractéristique de cette suite est $X^3 + X^2 - 1$ c'est-à-dire le polynôme réciproque de $X^3 - X - 1$, caractéristique de la suite de PADOVAN. En allant vers les négatifs donc en commençant à l'indice -1 vu la définition qu'on a prise de la suite de PADOVAN : $0, 1, 0, 0, 1, -1, 1, 0, -1, 2, -2, 1, 1, -3, 4, -3, \dots$

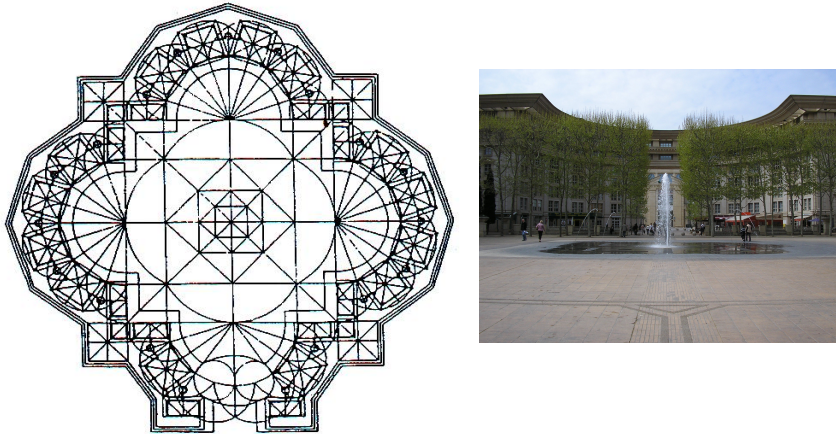
En notant $\mathcal{B} = \{\Psi^n, n \in \mathbf{Z}\}$, on obtient de même que pour tout entier n de $\mathbf{Z}$:

$$P_a(n-5) + P_a(n-3)\Psi + P_a(n-4)\Psi^2 \in \mathcal{B}.$$

6. Tourisme méconnu pour les arts

6.1. Le nombre d'or à Montpellier

Il y a, paraît-il du nombre d'or partout : dans les Pyramides chez certains visionnaires à retardement, au Parthénon, dans les tableaux de la Renaissance, plus sûrement chez MONDRIAN, dans les fleurs de tournesols (voir le bon article mais ardu [3]), ... et on en a écrit des volumes. Il faut dire que le long travail du temps a permis d'en arriver là. Voici un petit bijou ciselé à Montpellier.



L'ensemble architectural Antigone à Montpellier, réalisé par Ricardo BO-FILL, présente explicitement la référence au nombre d'or puisqu'en son sein existe « La Place du Nombre d'Or », dont est joint le plan. Il est dit dans les documents qu'on peut se procurer dans cette superbe ville du midi, sur l'ensemble lui-même :

Par le jeu d'interpénétration du carré et du cercle, des espaces et des bâtiments aux proportions harmonieuses sont créés : Une géométrie de base a été définie pour engendrer une succession d'espaces sur l'axe, en même temps que le tissu urbain du quartier ; la maille est construite à partir d'un carré de 48 m de côté. De ce carré est déduit le rectangle d'or avec les arcs de cercle qui lui correspondent. La répétition de ce principe constitue le tracé-régulateur d'Antigone et définit la configura-

tion des places, les axes des rues, leurs dimensions et les rythmes des façades.

Un peu plus loin est détaillée la réalisation proprement dite de la place du nombre d'Or :

Située en tête du quartier d'Antigone et près du centre historique, cette place doit son nom à la formule mathématique du nombre d'or : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ utilisée pour donner aux bâtiments, espaces publics, sculptures ou monuments des proportions particulièrement harmonieuses.

Ce principe harmonique a été appliqué pour concevoir tout le plan masse d'Antigone et naturellement pour la conception de cette place tant pour son tracé, que pour le dessin des façades et les détails des bâtiments. (...) L'ensemble du Nombre d'Or a une allure monumentale :

- D'immenses colonnes accueillent les escaliers à certains angles des immeubles,*



- Les deux derniers étages, en avancée par rapport aux bâtiments, sont soulignés par d'épais balcons dont les bordures sont utilisées en jardinières,*
- Une frise gigantesque se détache en porte-à-faux au sommet de l'immeuble et crée sur la Place des jeux d'ombre et de lumière. (...)*

Les terrasses des restaurants et des cafés permettent aux montpelliérains de se rencontrer et de vivre la Place au rythme des heures et des saisons : promenade, marché, concerts, spectacles, concours d'échecs entre résidents et jeux des enfants... , par toutes ces activités la place du Nombre d'or devient naturellement une agora.

6.2. Le nombre d'argent : La petite histoire de la transmutation du plastique

6.2.1. L'histoire, les personnages

Le point de départ théorique est l'introduction du nombre de plastique par le moine architecte Hans VAN DER LAAN ([5]).

Dans l'avant-propos à l'ouvrage, de la main du traducteur je lis « Qui-conque abordera l'étude des textes qui suivent regrettera peut-être de n'y trouver aucune illustration, aucune anecdote, aucun exemple frappant. C'est délibérément que l'auteur a voulu que fût gardée à ses démonstrations toute leur austérité première, afin qu'aucune diversion ne vienne interrompre le fil d'une démonstration serrée, et que ne s'égare pas à mi-chemin, par des applications prématurées, le vrai labeur d'une réflexion personnelle. »

Le lecteur que je fus n'a pas été pris en traître ; mais heureusement il y a un schéma parmi quelques-uns, qui m'a permis de comprendre la substantifique moelle, dont les pages d'écriture en un très bon français par ailleurs, n'avaient pas réussi à me donner une idée claire. J'ai redessiné le schéma avec mes annotations qui remplaceront donc avantageusement les pages dans lesquelles mon cerveau eut peine à voir quelques lueurs.

La relation fondamentale $\Psi^3 = \Psi + 1$ donne :

$$\begin{aligned}\Psi^5 &= \Psi^4 + 1, \\ \Psi^7 - 1 &= 2\Psi^4 = \Psi^\alpha, \\ \alpha &= 4 + \frac{\ln 2}{\ln \Psi} = 6,464\,96\dots,\end{aligned}$$

mais aussi :

$$\Psi - 1 = \Psi^{-4}.$$

En ce qui concerne les écarts successifs, on a pour tout entier relatif n :

$$\Psi^{n+1} - \Psi^n = \Psi^{n-4}.$$

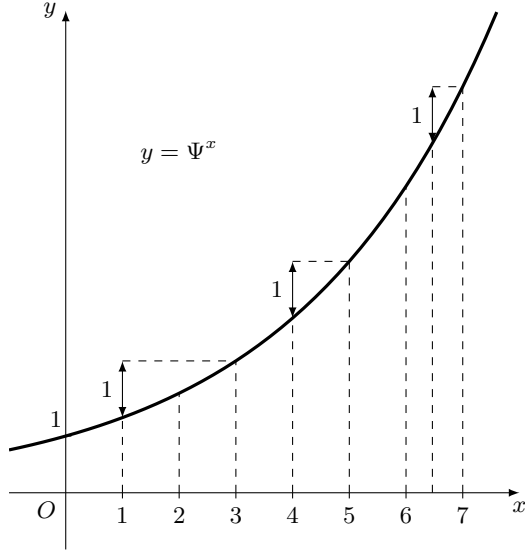


FIG. 1 – Illustration de quelques relations sur Ψ

D'ailleurs, plus généralement les relations précédentes génèrent que pour tout entier relatif n : $\Psi^{n+3} = \Psi^{n+1} + \Psi^n$ ainsi que $\Psi^{n+7} - \Psi^n = 2\Psi^{n+4} = \Psi^{\alpha_n}$, qui est aussi la moyenne harmonique entre Ψ^{n+7} et Ψ^{n+6} , et définit $\alpha_n = n + 4 + \frac{\ln 2}{\ln \Psi}$.

En liaison avec ce nombre de plastique, qui n'est jamais cité comme je l'ai formulé dans [5], VAN DER LAAN a construit des tableaux de valeurs indiquant des rapports harmonieux selon son nombre, entre diverses parties d'un tout. Si j'ai bien compris l'affaire, en fait on peut ramener cela, à la découverte raisonnée qu'il fit de valeurs approchées des premières puissances de Ψ par des entiers, voire des rationnels simples. Il écrit ainsi p. 63 « Pour arriver à établir la relation du nombre plastique avec le nombre abstrait, voyons d'abord comment s'expriment par le nombre discret le rapport fondamental, et ensuite, tous les autres rapports entre mesures d'un système », ce qui lui permet p. 66 de compléter par « Voici la série complète de ces nombres. Ils expriment, pour chaque mesure, le rapport de celle-ci avec le petit élément considéré comme unité ». C'est ainsi que je construis en remettant tout bout à bout le tableau synthétique de la p. 20.

Tableau de valeurs								
Valeurs exactes	1	Ψ	Ψ^2	Ψ^3	Ψ^4	Ψ^5	Ψ^6	Ψ^7
Valeurs approchées à 10^{-3}	1	1,325	1,755	2,325	3,080	4,080	5,404	7,159
Rapports donnés par Dom VAN DER LAAN	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{3}$	3	4	?	7
Nom donné par celui-ci	Petit élément	Grand élément	Petit fragment	Grand fragment	Petite partie	Grande partie	Petit tout	Grand tout
Valeurs approchées	1	1,333	1,75	2,333	3	4	?(*)	7

Valeurs exactes	Ψ^{-7}	Ψ^{-6}	Ψ^{-5}	Ψ^{-4}	Ψ^{-3}	Ψ^{-2}	Ψ^{-1}	1
Valeurs approchées à 10^{-3}	0,140	0,185	0,245	0,325	0,430	0,570	0,755	1
Rapports donnés par Dom VAN DER LAAN	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{4}$	1
Valeurs approchées d'icelles	0,143	0,2	0,25	0,333	0,429	0,571	0,75	1

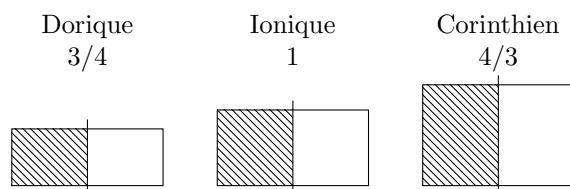
(*) Dans [6], VAN DER LAAN écrit « Reste le petit tout, qu'il est malaisé d'exprimer par un nombre ». En fait p. 139, il prend $5\frac{1}{3}$. Les rapports paraissent grossiers mais, en passant à des valeurs numériques illustrant ainsi le nombre plastique, il construit des tableaux de correspondance nettement plus précis, où surgissent clairement des suites... de PADOVAN. Voici recomposé un extrait de la p. 77 de [5].

Système	Petit élément	Grand élément	Petit fragment	Grand fragment	Petite partie	Grande partie	Petit tout	Grand tout
I	100	132,5	175,5	232,5	308	408	540,5	716
II	14	18,5	24,5	32,5	43	57	75,5	100
III	2	2,5	3,5	4,5	6	8	10,5	11

Un peu plus loin ([5, p. 99]), VAN DER LAAN établit une comparaison entre l'architecture grecque et le nombre plastique : « Quoi qu'il en soit (fait référence aux affirmations d'un auteur, A. CHOISY, à propos de VITRUVÉ), nous pouvons nous servir de l'expression propre à chacun des trois ordres classiques pour caractériser mieux encore les trois rapports qui constituent le noyau du nombre plastique.

Le rapport fondamental ($4/3$) exprimerait dès lors la force dorique, le rapport amplifié ($7/4$) la grâce ionienne, et le rapport extrême ($7/3$), l'ingénuité corinthienne. Il y a donc quelques analogies entre les trois rapports, d'une part, — qui sont au centre du nombre plastique — et les trois ordres classiques, d'autre part, — qui résument toute l'architecture antique ».

On rappelle les configurations de l'architecture classique avec les rapports entre la hauteur et la demi-largeur des chapiteaux ; il y a précise VAN DER LAAN « une gradation qui correspond à celle de nos trois rapports typiques ».



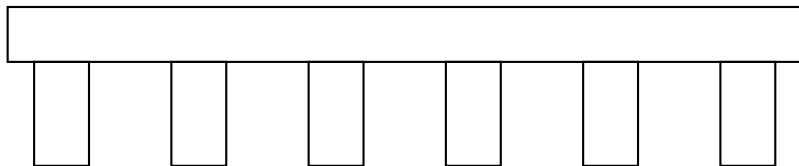
Si l'on entend par gradation « en suite géométrique », elle est de raison $\frac{4}{3} = 1,333\dots$ pour les dimensions grecques et d'approximativement de $\frac{21}{16} = 1,3125$ pour le nombre plastique.

D'ailleurs ce n'est pas le seul lien avec les Grecs et en particulier VITRUVÉ : D désignant la largeur de la colonne et E l'entrecolonnement, les configurations architecturales de piliers selon VITRUVÉ apparaissent ainsi numériquement analysées par VAN DER LAAN dans [6] (Disposition du mur, Ch. XI). (V. p. 22.)

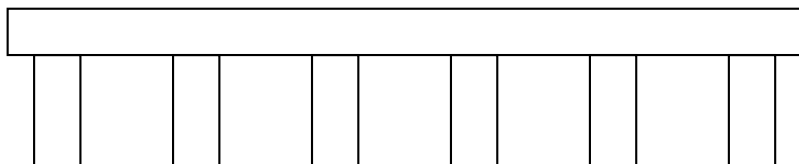
La définition mathématique du nombre plastique n'a pas échappé à VAN DER LAAN, mais il en parle tardivement (environ 30 ans plus tard) dans [6, p. 119] où l'on peut lire :

« La progression géométrique constituée par la succession des mesures d'un système obéit à la formule générale suivant laquelle, de quatre mesures consécutives, la somme des deux plus petites est égale à la plus grande. On

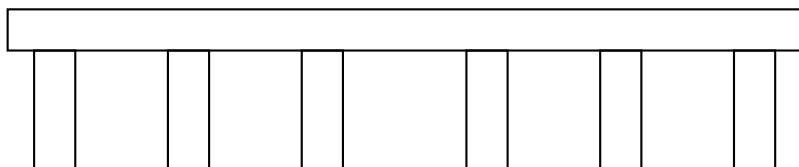
Pycnostyle : colonnes très rapprochées, $E = 1,5 \times D$



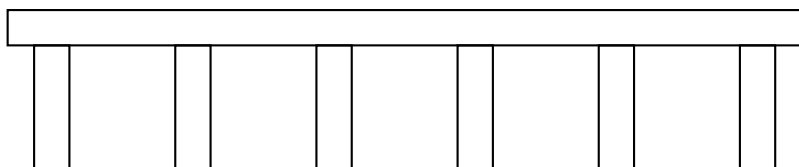
Systyle : colonnes un peu moins rapprochées, $E = 2 \times D$



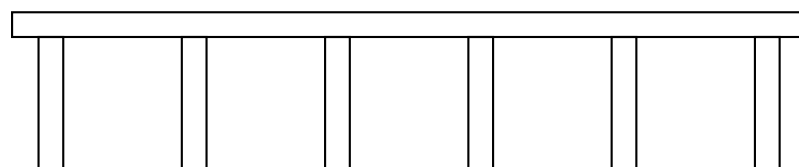
Eustyle : colonnes espacées « de bonne manière »,
 $E = 2,25 \times D$ avec au centre $E = 3 \times D$



Diastyle : colonnes écartées, $E = 3 \times D$



Araeostyle : colonnes clairsemées, $E = k \times D$ avec $k > 4,65$ (ici $k = 4,8$)



pourrait s'attendre à nous voir mettre en équation la raison de cette progression ; ce serait fort simple : $1 + x = x^3$. Mais résoudre cette équation du troisième degré ne nous apprendrait pas grand'chose du point de vue architectonique. En effet, énoncer les rapports entre les mesures d'un système en langage mathématique est totalement différent que de les exprimer au moyen du nombre plastique. Car un calcul mathématique n'aboutirait ici qu'à des nombres suivis de plusieurs décimales, donc à une abstraction, et à ce moment le contact avec la réalité concrète du donné plastique serait totalement rompu ».

Le deuxième personnage de la trinité a déjà été cité : c'est Richard PADOVAN. Lui-même, architecte, a vu la propriété fondamentale des suites du tableau précédent : ce sont les termes d'une suite qui portera désormais son nom.

Je ne peux résister à vous extraire la page du site www.nexusjournal.com/conferences/N2002-Padovan.html qui vous explicite dans un anglais, aussi bon que le français évoqué plus haut, les choses d'un abord délicat. Par ailleurs le dessin qui est quasiment recopié du livre de VAN DER LAAN est tout aussi approché en assimilant mon α qui précède à 6,5.

« The plastic number, discovered by Dom Hans VAN DER LAAN (1904–91) in 1928 shortly after he had abandoned his architectural studies and become a novice monk, differs from all previous systems of architectural proportions in several fundamental ways. Its derivation from cubic equation (rather than a quadratic one such as that which defines the golden section) is a response to the three-dimensionality of our world. It is truly aesthetic in the original Greek sense, i.e., its concern is not 'beauty' but clarity of perception. Its basic ratios, appromatively 3:4 and 1:7, are determined by the lower and upper limits of our normal ability to perceive differences of size among three-dimensional objects. The lower limit is that at which things differ just enough to be of distinct types of size. The upper limit is that beyond which they differ too much to relate to each other ; they then belong to different orders of size. According to VAN DER LAAN, these limits are precisely definable. The mutual proportion of three-dimensional things first becomes perceptible when the largest dimension of one thing equals the sum of two smaller dimensions of the other. This initial proportion determines in turn the limit beyond which things cease to have any perceptible mutual relation. Proportion plays a crucial role in generating architectonic space, which comes into being through the propotional relations of the solid

forms that delimit it. Architectonic space might therefore be described as a proportion between proportions ».

Pour la petite histoire dans l'histoire : Ian STEWART ([9]) a remarqué la coïncidence entre FIBONACCI dit Léonard de Pise qui donne son nom à la suite où apparaît le nombre d'or et PADOVAN (de Padoue) qui donne son nom à la suite où apparaît le nombre d'argent. Vues des États-Unis, ces villes sont proches en effet ; cependant PADOVAN pourrait aussi bien être d'origine serbo-croate voir indienne. Mais voici encore une anecdote transmise par un collègue professeur d'italien. Si l'origine est italienne (de Padoue) la perte du o (padovano) viendrait d'une mise à l'index voire de l'exil d'un ancêtre du ci-devant sieur Richard PADOVAN pour avoir eu des « ennuis » avec le fisc : en clair il n'avait pas payé ses impôts. Imaginons la perte d'une lettre chez Florent, Michel et les autres !

Signalons quelques morceaux choisis sur le site www.aroots.org/notebook/article123.html. L'auteur, Alain DOUANGMANIVANH dans un article « Hans VAN DER LAAN architecte, la demeure humaine », nous fait un curieux salmigondis.

« Dans *L'espace architectonique*, Hans VAN DER LAAN tente de définir ce que *doit être la demeure humaine* à travers la définition d'un système de proportion basé sur le nombre d'or : le nombre plastique ». Allons bon, voilà que le pôvre bougre a tenté mais a-t-il réussi ? D'autre part, l'or et le plastique, c'est pareil : comprenez qui pourra ! Mais on est rassuré car juste après, on découvre que « le nombre plastique serait une réponse au gouffre qui existe entre l'intelligence humaine et le monde insaisissable des phénomènes naturels ».

Cette phrase en fait a été extraite de son contexte et sans « sic », de l'avant-propos à [6] rédigé par le traducteur Dom Xavier BOTTE, qui présente cet ouvrage à la lumière des réactions à [5].

6.2.2. Les lieux touristiques

En 1968, VAN DER LAAN a appliqué concrètement sa théorie en réalisant à l'abbaye de Vaals à Mamelis aux Pays-Bas, l'église de Sint Benedictusberg dont quelques photos, jointes au texte, sont extraites du site [15] avec autorisation de la direction de l'abbaye.



Une surprise de taille (c'est le cas de le dire) attend le lecteur de [6] car VAN DER LAAN, mètre en mains, annonce comme exemple architectonique basé sur le nombre plastique, le fameux site archéologique de Stonehenge et cela a l'air de se tenir.



6.3. La fin de l'histoire ?

Dans cette histoire tricéphale, le troisième personnage apparaît plus tardivement avec la publication de son livre ([4]). Midhat J. GAZALÉ en 1999, y parle en effet de « nombre d'argent », estimant sans doute que le nombre de plastique méritait mieux. Je trouve qu'il n'est pas allé assez loin. C'est encore l'histoire et l'étymologie qui nous guident.

Pour garder le caractère de richesse et d'unicité du nombre Ψ sur lequel nous avons disserté, on devrait plutôt l'appeler *nombre de platine* ; étymologiquement le mot platine en français vient de l'espagnol *plata* (argent) en fait par *platina* qui en est un diminutif traduisant l'idée, lors de sa découverte, d'argent de deuxième zone ou de plus basse extraction : le platine a été découvert en Amérique du Sud vers 1750. Par ailleurs le platine

est plus précieux que l'or ; Φ , le nombre d'or, se construit à la règle et au compas alors que...

De la sorte il n'y aurait, de mon point de vue, que deux nombres précieux, ceux d'or et de platine, et alors aucun inconvénient à mettre tous les autres nombres d'argent dans un coffre plus ou moins bien gardé, dans une banque peu regardante sur la nature des fonds : je vous laisse le choix, les pays de complaisance ne manquent pas !

Le nombre Ψ , quel que soit le nom qu'on lui donne, a-t-il été vu dans la nature ? Ceci est une autre question, qui sera sans doute résolue dès qu'on aura passé suffisamment de temps à observer la nature.

Annexes

À propos de $\cos \frac{2\pi}{7}$

C'est la partie réelle de $\omega = \exp(\frac{2\pi}{7}i)$, qui est l'une des racines septièmes de l'unité ; ω vérifie $\omega^7 = 1$.

On résout donc $z^7 - 1 = 0$ qu'on écrit $(z - 1) \sum_{l=0}^6 z^l = 0$ (1). On met z^3 en facteur pour arriver à $z^3(Z^3 + Z^2 - 2Z - 1) = 0$ (2) où on a posé $Z = z + \frac{1}{z}$. Puis on prend $Z = Z' + h$ avec h adapté pour qu'on n'ait plus de terme en Z'^2 soit $-\frac{1}{3}$. Cela donne $Z'^3 - \frac{7}{3}Z' - \frac{7}{27} = 0$ (3).

La méthode classique consiste à trouver u et v tels que $\begin{cases} u^3 + v^3 = \frac{7}{27} \\ uv = \frac{7}{9}, \end{cases}$

ce qui conduit à u^3 et v^3 donnés par $\frac{7}{54} \pm \frac{7\sqrt{3}}{18}i$. Ces nombres complexes s'écrivent $\frac{7^{\frac{3}{2}}}{3^3}(\frac{1}{2\sqrt{7}} \pm \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}i)$. Prenons alors $\theta = \arctan(3\sqrt{3})$ puis $u = \frac{\sqrt{7}}{3} \exp(i\frac{\theta}{3})$ et $v = \frac{\sqrt{7}}{3} \exp(-i\frac{\theta}{3})$.

Les solutions de (3) sont $u + v, ju + j^2v, j^2u + jv$. Ce sont des nombres réels comme le montre l'étude directe de la fonction $Z' \mapsto Z'^3 - \frac{7}{3}Z' - \frac{7}{27}$; en fait la solution positive est $\frac{2\sqrt{7}}{3} \cos \frac{\theta}{3}$.

Le retour à (1), pour la solution qui nous intéresse, se fait en résolvant $z + \frac{1}{z} = \frac{2\sqrt{7}}{3} \cos \frac{\theta}{3} - \frac{1}{3}$ ce qui permet d'en déduire :

$$\cos \frac{2\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{3} \cos \frac{\theta}{3} - \frac{1}{6}.$$

À partir de là, on considère $\alpha = 2 \cos \frac{2\pi}{7} + 2 = \frac{2\sqrt{7}}{3}c + \frac{5}{3}$ où $c = \cos \frac{\theta}{3}$. On calcule $\alpha^3 - 5\alpha^2 + 6\alpha - 1 = \frac{14\sqrt{7}}{27}(4c^3 - 3c) - \frac{7}{27}$. Or la trigonométrie donne $4c^3 - 3c = \cos \theta = \frac{1}{2\sqrt{7}}$, d'où $\alpha^3 - 5\alpha^2 + 6\alpha - 1 = 0$.

Remarque à propos de l'Innomé

C'est le *deuxième zéro réel* du polynôme $\mathcal{P}_m = X^m - X^{m-1} - \dots - X - 1$ lorsque m est pair qu'on note Θ_m (voir dans les numéros 468 et 469 du « Bulletin Vert » de notre association, tout le travail sur la convergence de la suite (Φ_m) vers 2 et surtout [13]).

Pour localiser les zéros réels de $\mathcal{P}_m$, qui sont donc distincts de 1, il est plus commode d'écrire $\mathcal{P}_m = \frac{X^{m+1} - 2X^m + 1}{X - 1}$. La localisation par l'étude de $x \mapsto x^{m+1} - 2x^m + 1$ montre que le premier zéro (distinct de 1) est Φ_m entre 1 et 2, et le deuxième zéro est Θ_m , entre -1 et 0.

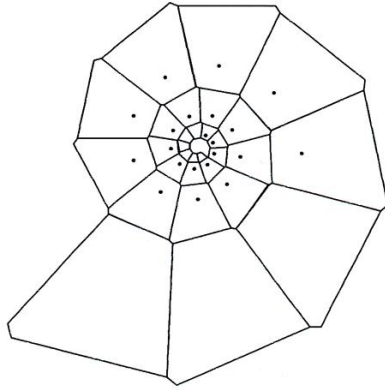
Introduisons f_m telle que $f_m(x) = x - 2 + \frac{1}{x^m}$ sur $[1; +\infty[$. On a $f_m(1) = 0$, $f'_m(x) = \frac{x^{m+1} - m}{x^{m+1}}$ du signe de $x - \sqrt[m+1]{m}$.

Or une brève étude de la fonction exposant $g : x \mapsto \frac{\ln x}{x+1}$ montre qu'elle est toujours positive et inférieure à $\frac{1}{a}$, où a , entre 3 et 4, vérifie $\ln a = 1 + \frac{1}{a}$ donc $0 < g(m) < \frac{1}{3} < \ln 2$ ce qui permet d'affirmer que $1 < \sqrt[m+1]{m} < 2$. Il y a mieux : g croît sur $[2; a]$ puis décroît sur $[a; +\infty[$. La « bonne » fonction f_m s'annule ainsi une deuxième fois en un réel strictement compris entre 1 et 2, qui est donc le nombre Φ_m . On se restreint à étudier f_m sur $[1, 1; 2]$ (avec $m \geq 38$) : la suite de fonctions (f_m) est uniformément convergente sur cet intervalle vers sa limite f qui est la fonction affine $x \mapsto x - 2$. La suite (Φ_m) qui est définie par $f_m(\Phi_m) = 0$ (en effet $\Phi_m \in [1, 1; 2]$ dès que $m \geq 2$) converge donc vers la solution unique à l'équation $f(x) = 0$ soit 2 : $\lim_{m \rightarrow +\infty} \Phi_m = 2$ (on aurait pu écrire aussi que $|\Phi_m - 2| \leq \frac{1}{1,1^m}$).

Écrivons $\Theta_m = -\varphi_m$; φ_m est la solution positive de $x^{m+1} + 2x^m - 1 = 0$, ce qui veut dire que φ_m peut s'écrire encore : $\varphi_m = \frac{1}{(2 + \varphi_m)^{1/m}} = \frac{1}{2^{1/m}} \times \frac{1}{(1 + \frac{\varphi_m}{2})^{1/m}}$. Or $0 \leq \varphi_m \leq 1$, donc $1 \leq (1 + \frac{\varphi_m}{2})^{1/m} \leq 1,5^{1/m}$. Il en résulte que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \varphi_m = 1$, ce qui démontre que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \Theta_m = -1$.

Un joli gnomon

Voici l'amorce d'un exemple de gnomon (il faut imaginer le cœur où la spirale s'enroule indéfiniment) constitué d'un polygone à six côtés ; cela ne contredit pas le résultat de AARTS puisque l'ensemble V associé est infini.



Le logiciel de géométrie que j'ai utilisé a calé sur le calcul des points conduisant jusqu'au centre de la spirale. D'autre part les divers polygones qui interviennent, sont des cellules de VORONOÏ dont les sites (quelques points en sont dessinés en gras) sont sur une spirale logarithmique.

Qu'est donc une cellule de VORONOÏ ? L'ensemble Ω de points (sites) du plan étant donné, la cellule de VORONOÏ associée à tout site A de Ω est l'ensemble des points du plan situés les plus près de A que tout autre point de Ω ; la frontière d'une telle cellule est donc réunion de segments ou demi-droites inclus dans les médiatrices de tous les points de Ω considéré.

Remerciements pour leurs contributions photographiques, leurs démarches ou leurs judicieuses remarques : au site internet de l'abbaye Sint Benedictusberg de Vaals, à Françoise JEANTEL de Montpellier, à Jean-Pierre RICHTON de Montpellier, à Claude DUJARDIN d'Hérouville Saint Clair, à Isabelle GACHE de Nîmes, à Pierrette DAVESNE d'Avenay, à Didier TROTOUX et Éric TROTOUX de Caen, à Michel FRÉCHET de Neufchâtel-en-Bray qui a pallié, au dernier moment à Mons, mes carences techniques, à Chantal FAISANT d'Ifs pour sa relecture minutieuse avant publication, et enfin à Pierre VALLÉE qui m'a lancé, un certain 21 mars 2007, sur la piste du sud avec sa carte postale de Montpellier. Merci aussi à la SBPMef qui, en acceptant ma proposition d'atelier, m'a motivé dans mes recherches.



Le beau « Leonardo FIBONACCI »,
comme il est écrit dans le marbre au musée de Pise

Bibliographie

- [1] Jan AARTS, Robbert FOKKINK, On gnomons, *Math. Vesnik* **55** (2003), 59–64.
- [2] Jan AARTS, Robbert FOKKINK, Godfried KRUIJTZER, Morphic numbers, *Nieuw Archief Wiskunde* **1** (2001), 56–58.
- [3] Xavier CARUSO, Nombre d'or et tournesol, *Revue de Mathématiques Spéciales (RMS)* **3**, mai 2006.
- [4] Midhat J. GAZALÉ, *Gnomons, from Pharaohs to Fractals*, Princeton University Press, Princeton, 1999.
- [5] Hans VAN DER LAAN, *Le nombre Plastique ; quinze leçons sur l'ordonnance architectonique*, Éd. Brill, Leiden, 1960.
- [6] Hans VAN DER LAAN, *L'espace architectonique*, Éd. Brill, Leiden, 1989.
- [7] Jacqueline LELONG-FERRAND, Jean-Marie ARNAUDIÈS, *Cours de Mathématiques, t. 1 : Algèbre*, Dunod Université, Paris, 1978.
- [8] Ernst S. SELMER, On the irreducibility of certain trinomials, *Math. Scand.* **4** (1956), 287–302.
- [9] Ian STEWART, Tales of a Neglected Number, *Scientific American* (juin 1996) ; trad. française : La sculpture et les nombres, *Pour la Science* **226** (août 1996).
- [10] Helge TVERBERG, On the irreducibility of the polynomials $x^n \pm x^m \pm 1$, *Math. Scand.* **8** (1960), 121–126.
- [11] http://en.wikipedia.org/wiki/Padovan_sequence
- [12] <http://forums.futura-sciences.com/thread38534.html>
- [13] <http://perso.orange.fr/gery.huvent/irem/metal.pdf>
- [14] http://perso.orange.fr/jean-paul.davalan/liens/liens_fibo.html
- [15] <http://www.benedictusberg.nl>
- [16] <http://www.mathworld.wolfram.com> : de tout sur toutes les maths, enfin presque toutes...
- [17] <http://www.research.att.com/~njas/sequences> : plus de 140 000 suites sont passées au peigne à puces !
- [18] <http://www.univ-lemans.fr/~hainry/articles.html>

Cabri-Géomètre et $(a + b)^2$

JEAN-PAUL HOUBEN

Université Catholique de Louvain

RÉSUMÉ — En utilisant Cabri-Géomètre et un interrupteur logique, on peut visualiser les différents termes du développement de $(a + b)^2$.

MOTS-CLÉS : Cabri-Géomètre, algèbre, produits remarquables.

Dans cet article, nous allons utiliser un interrupteur pour animer un dessin représentant les éléments du développement de

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Nous montrerons successivement a^2 , puis ab , puis ba et enfin b^2 . Comme il y a quatre éléments à montrer, notre interrupteur ⁽¹⁾ comportera quatre segments emboîtés.

Préparation de l'interrupteur

Dessignons une droite au bas de l'écran. Plaçons-y un point noté q_0 , puis quatre points q_1 , q_2 , q_3 et q_4 construits comme suit : ayant placé q_1 , nous pouvons construire q_2 comme symétrique de q_0 en prenant q_1 comme centre ⁽²⁾. Nous construisons q_3 comme symétrique de q_1 avec q_2 comme centre. Nous terminons avec q_4 symétrique de q_2 . Puis, définissons les segments emboîtés : $[q_0q_4]$, $[q_1q_4]$, $[q_2q_4]$, $[q_3q_4]$ ⁽³⁾.

Au lieu de prendre un point mobile sur notre droite, comme dans l'article du n° 131, prenons une droite parallèle où nous plaçons un point p .

Adresse de l'auteur : Rue de l'Église 78, 1301 Bierges ;

courriel : jean-paul.houben@sbpm.be.

⁽¹⁾ *M&P* n° 131 (Constructions impossibles avec Cabri-Géomètre) et *M&P* n° 133 (Interrupteurs : Tangentes à un cercle).

⁽²⁾ **Transformation** *Symétrie centrale*

⁽³⁾ **Droite** *Segment*

De ce point p , traçons une perpendiculaire à la première droite. C'est le point d'intersection de cette perpendiculaire avec les différents segments qui va constituer notre interrupteur. Cela nous donne la première figure où le point p est mobile. Vu notre construction avec des symétriques, nous pouvons même déplacer q_0 et q_1 tout en gardant des distances égales.

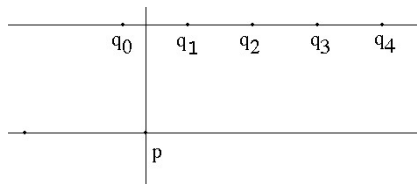


FIG. 1 –

Déterminer les sommets

Construisons maintenant progressivement une figure dynamique avec les deux carrés construits sur a et b (a^2 et b^2) et les deux rectangles sur a et b (ab et ba).

Prenons au bas de l'écran deux droites parallèles ⁽⁴⁾. Sur la première fixons un segment ⁽⁵⁾ que nous noterons a ⁽⁶⁾.

De même sur la seconde droite fixons un segment noté b . Les deux segments sont variables. À partir de ceux-ci nous allons construire les deux carrés et les deux rectangles de la formule.

Choisissons un point c qui sera le point inférieur gauche de la figure finale. Construisons le vecteur ⁽⁷⁾ qui a pour origine le point gauche du segment qui définit a et pour extrémité le point c . À l'aide de ce vecteur, translatons ⁽⁸⁾ le segment qui définit a : d'où la figure 2.

Translatons maintenant le segment qui définit b en le plaçant à la suite du précédent. La translation sera déterminée par le vecteur qui a pour origine l'origine du segment qui définit b et pour extrémité l'extrémité du translaté de a .

⁽⁴⁾ **Construction** *Parallèle*

⁽⁵⁾ **Point** *Point sur objet*

⁽⁶⁾ **Droite** *Segment*

⁽⁷⁾ **Droite** *Vecteur*

⁽⁸⁾ **Application** *Translation*

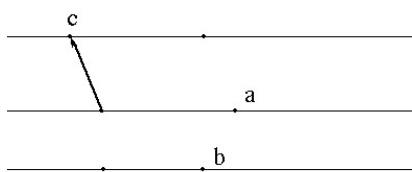


FIG. 2 –

Nous avons maintenant la figure 3.

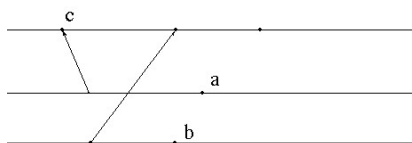


FIG. 3 –

Construisons maintenant les sommets des carrés et des rectangles annoncés. Pour reporter les distances nous utiliserons deux cercles ⁽⁹⁾ centrés en c . Par le point c traçons une perpendiculaire aux translatés de a et b . Cette perpendiculaire rencontre les deux cercles en des points qui seront des sommets de la figure finale. Par ces points traçons des perpendiculaires ⁽¹⁰⁾ et par les extrémités des segments translatés de a et b menons aussi des perpendiculaires. Ce qui nous donne la figure 4.

Les intersections de ces perpendiculaires sont les sommets recherchés. Cachons les constructions pour ne garder que l'interrupteur, les segments a et b et les points sommets. Nous avons la figure 5.

Utilisation de l'interrupteur

Déplaçons maintenant le point p de sorte que la droite que nous avons conservée rencontre le segment $[q_0q_4]$ entre q_0 et q_1 .

⁽⁹⁾ **Courbe** Cercle

⁽¹⁰⁾ **Construction** Perpendiculaire

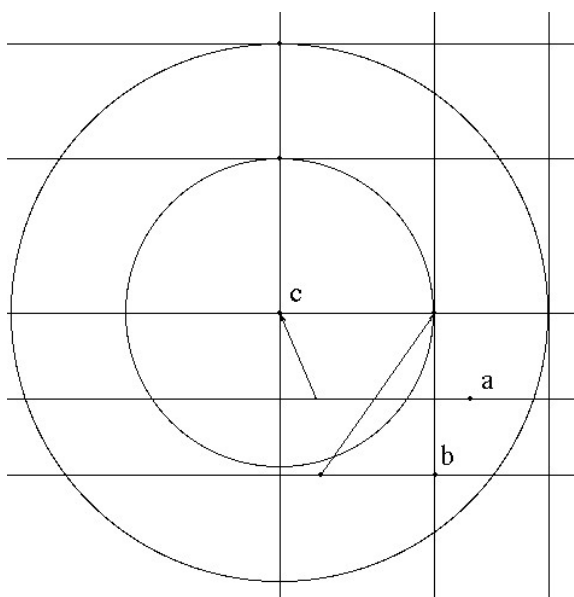


FIG. 4 –

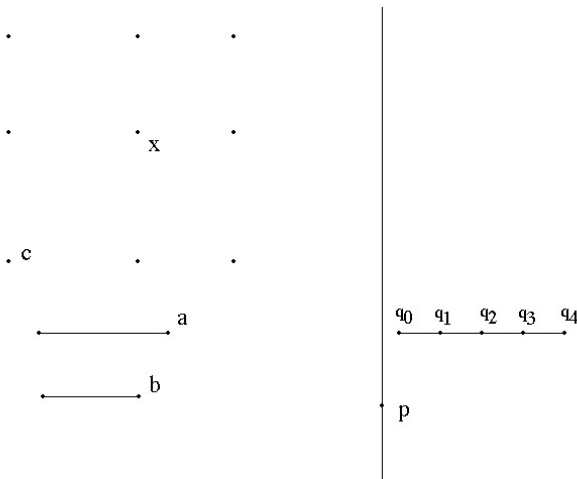


FIG. 5 –

Déterminons l'intersection ⁽¹¹⁾ de cette droite avec le segment $[q_0q_4]$. Ce point n'existe que si la droite passant par p rencontre le segment $[q_0q_4]$. Construisons le milieu ⁽¹²⁾ entre ce point et un des sommets noté provisoirement x . En déterminant le symétrique ⁽¹³⁾ du point sur le segment $[q_0q_4]$ par rapport au milieu, nous dédoublons le point qui détermine un sommet du carré de côté a . Si maintenant nous construisons le polygone ⁽¹⁴⁾ passant par le point x et les trois autres sommets du carré, ce carré existe ou disparaît lorsque le point p est déplacé. Pour bien le distinguer, nous pouvons le colorier par exemple en rouge. Cela nous donne la sixième figure :

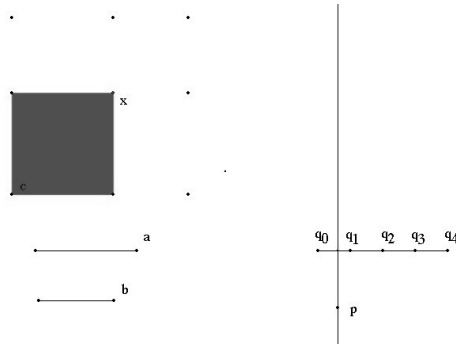


FIG. 6 –

Cachons le milieu ⁽¹⁵⁾. Déplaçons le point p vers la droite de sorte que l'intersection soit entre q_1 et q_2 . Recherchons l'intersection de la perpendiculaire avec le segment $[q_1q_4]$. Déterminons le milieu de cette intersection avec le point y du rectangle ab au dessus du carré rouge. Et terminons en construisant le symétrique du point d'intersection par rapport au milieu. Nous pouvons alors construire le rectangle colorié en bleu. Nous avons ainsi la figure 7.

Cachons le milieu. Déplaçons le point p pour que l'intersection se trouve entre q_2 et q_3 . Déterminons le milieu, puis le symétrique comme précédemment. Soit z l'image du symétrique. Terminons par le polygone de sommet z , que nous colorions en vert. Nous avons la huitième figure.

⁽¹¹⁾ **Point** *Point d'intersection*
⁽¹²⁾ **Construction** *Milieu*
⁽¹³⁾ **Application** *Symétrie centrale*
⁽¹⁴⁾ **Droite** *Polygone*
⁽¹⁵⁾ **Aspect** *Cacher*

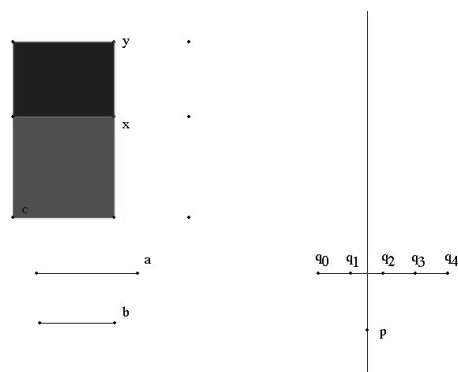


FIG. 7 –

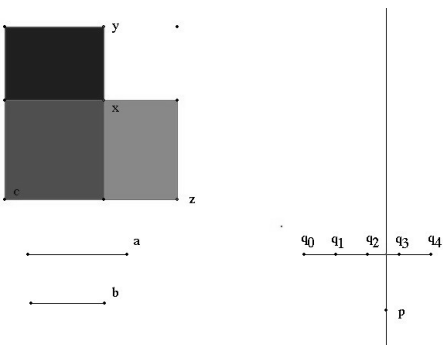


FIG. 8 –

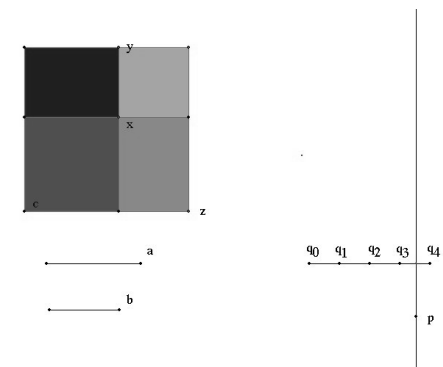


FIG. 9 –

En procédant de même avec le dernier segment $[q_3q_4]$, nous obtenons la neuvième figure.

Il reste à y cacher les éléments indésirables et puis à y ajouter du texte explicatif ⁽¹⁶⁾ (par exemple : $(a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$) pour obtenir la figure finale.

Produit remarquable

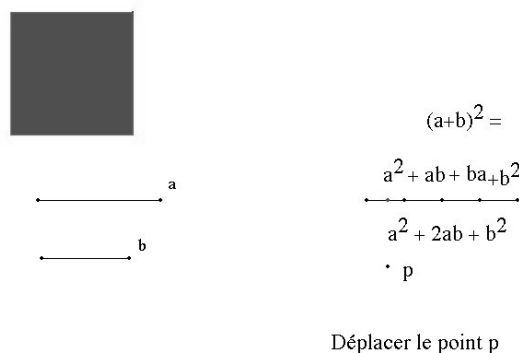


FIG. 10 –

Mais au lieu d’avoir un interrupteur avec des segments emboîtés, nous pouvons utiliser un interrupteur avec des segments consécutifs comme $[p_0p_1]$, $[p_1p_2]$, $[p_2p_3]$, $[p_3p_4]$. Alors le déplacement du point p permet de faire apparaître successivement les différents éléments du développement de $(a + b)^2$.

La figure finale, en couleurs,

CARRE2D.fig

peut être obtenue sur le site de la SBPMef ⁽¹⁷⁾.

Dans un prochain article nous ferons de même pour illustrer le développement de : $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

⁽¹⁶⁾ **Affichage** *Texte*

⁽¹⁷⁾ www.sbpme.be

Enseignement de la Province de Hainaut

Région Mons-Borinage

Direction Générale Régionale Mons-Borinage
065/40.80.80



Haute Ecole Provinciale de Mons-Borinage-Centre
Catégorie Economique à Mons (065/88.12.28)

Haute Ecole Provinciale de Mons-Borinage-Centre
Catégorie Paramédicale à Mons (065/22.12.60)

Lycée Technique
Provincial Richard
Stièvenart à Hornu
(065/61.39.40)

Lycée Provincial
d'Enseignement
Technique du Hainaut
à Saint-Ghislain
(065/71.42.11)

Institut d'Enseignement
Secondaire Provincial
à Mons (065/39.93.40)

Institut d'Enseignement
Secondaire
Paramédical Provincial
à Mons (065/32.89.00)

Ecole
Fondamentale
Provincial
Victor Mirguet à
Mons (065/
32.05.53)

Centre d'Education et
de Formation en
Alternance de l'Athénée
Provincial Jean
d'Avesnes à Mons
(065/40.01.08)

Lycée Provincial Albert
Libiez à Colfontaine
(065/61.33.99)

Athénée Provincial
Jean d'Avesnes
à Mons
(065/40.01.01)

Académie Provinciale
des Métiers à Mons
(065/39.89.79)

Haute Ecole Provinciale de Mons-Borinage-Centre
Catégorie Pédagogique à Mons (065/32.04.90)

Haute Ecole Provinciale de Mons-Borinage-Centre
Catégorie Artistique à Saint-Ghislain (065/71.42.11)

Institut Provincial d'Enseignement de Promotion sociale Mons-Formations à Mons (065/35.38.13)

Centre Provincial d'Enseignement de Promotion sociale du Borinage à Hornu (065/76.76.18)

Ecole Industrielle Supérieure Provinciale à Mons (065/39.89.39)

Cours des Métiers d'Arts du Hainaut (065/84.96.32)

Conseiller en informations scolaires à Mons (065/40.80.80)

La géométrie logique sur TI-*nspire*TM

HUGUES VERMEIREN

Institut Saint-Vincent de Paul, Uccle

*T*³ Wallonie

Introduction

Ces pages se proposent de présenter certains principes de ce qu'on appelle la « géométrie logique ». Plus qu'une nouvelle discipline mathématique, la géométrie logique est une pratique, parfois très subtile, qui s'impose d'elle-même, y compris à un niveau élémentaire, dès qu'on manipule un logiciel de géométrie dynamique. Cette pratique a ses usages, ses trucs et ses astuces qui dépendent du logiciel utilisé.

Après quelques rappels généraux enrichis d'exemples classiques, les possibilités offertes par le concept TI-*nspire*TM (v.1.3) seront développées dans des cas simples mais qui utilisent pleinement les capacités de ce matériel.

L'exemple plus élaboré de l'appartenance d'un point à l'intérieur d'un polygone sera traité à l'aide d'un algorithme élémentaire qui mettra en œuvre plusieurs techniques difficiles à implémenter sur les logiciels classiques de géométrie.

1. Les défis de la géométrie logique

La création de figures en géométrie dynamique pose, même au débutant, un problème fondamental : celui de construire des figures qui résistent aux différentes positions des éléments libres ⁽¹⁾ qui déterminent l'ensemble de

Adresse de l'auteur : Rue de la Victoire 44, 1060 Bruxelles ;

courriel : hgsvermeiren@skynet.be.

⁽¹⁾ On dit aussi éléments *primitifs*.

la figure. Une figure bien construite est une figure dont les constructions varient (s'il le faut) en fonction de ce que certaines conditions sont remplies ou non.

On peut alors définir ainsi [2] une *construction logique* :

« Pour une propriété $\mathbf{p}$, construire un objet $\mathbf{O}$ qui existe ou n'existe pas suivant que $\mathbf{p}$ est vraie ou fausse. ».

Dans le pire des cas, des constructions peuvent s'avérer fausses dès que certaines hypothèses (parfois cachées) ne sont plus satisfaites. Dans les figures bien faites et selon les cas, plusieurs constructions pourront donc coexister, l'une prenant le relai de l'autre en fonction de la situation.

La figure erronée ci-dessous reprend un exemple d'Abracadabri [6].

Un cercle Γ de diamètre d est tangent en I au segment $[AB]$. Construire le point C tel que Γ soit le cercle inscrit au triangle ABC .

Après avoir construit les symétriques J et K de I par rapport aux droites (BO) et (AO) , on place C à l'intersection de (AK) et de (BJ) . Le problème est que, dans cette construction, il se peut que (AO) et (BO) soient des bissectrices extérieures du triangle...

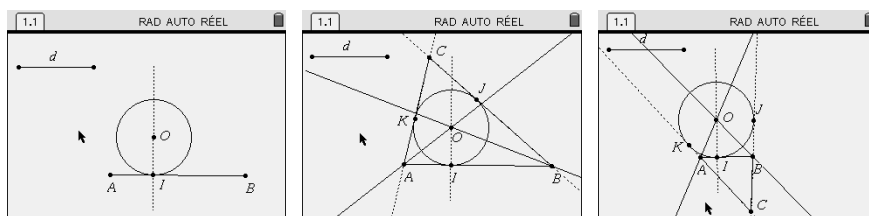


FIG. 1 – Une construction erronée qui exige un traitement logique.

D'autres besoins poussent à la réalisation de *constructions logiques* :

- Cacher/montrer certains éléments d'une figure.
Souvent dans un but pédagogique, par exemple pour faire apparaître la solution d'un problème par étapes.
- Il peut être nécessaire de faire apparaître des commentaires qui aident à la compréhension de la figure (une sorte de « Help »).

Notons enfin, que les techniques utilisées en géométrie logique dépendent des moyens qu'on est prêt à mettre en œuvre. On peut par exemple bannir toute utilisation des commandes de mesure et être ainsi contraint à ne travailler que sur l'incidence. Yves MARTIN (IREM de La Réunion) propose ainsi

dans [2], pour tester la coïncidence de deux points, une ingénieuse construction basée sur l'intersection segment-droite alors qu'on pourrait travailler plus simplement sur la distance entre ces deux points.

2. Plan géométrique, plan analytique

Sur TI-*nspire*, il est important de remarquer que ce qu'il sera possible de faire dépendra du mode d'affichage des pages « Graphique & Géométrie » (pages G&G).

Un point du *Plan Géométrique* ⁽²⁾ n'a pas de coordonnées et un objet du *Plan Géométrique* tel que Droite ou Cercle n'a pas d'équation.

Si donc une construction « logique » (qui dépend de l'existence de certains éléments) utilise des coordonnées ou une équation, on prendra soin d'afficher le *Plan Analytique* pour les créer.

Attention encore : les objets du *Plan Géométrique* sont insensibles aux « Zooms » et changements d'échelle des axes. Ce qui est bien commode, par exemple, lorsqu'on réalise des « glissières » [9] (*sliders* ou *scrollbars*) qui pilotent une courbe définie dans le plan analytique (la glissière ne se contracte/dilate pas lors d'un zoom).

3. Égalité et coïncidence

En géométrie logique, le concept d'*égalité* doit être reprécisé. Pour éviter toute confusion, il sera bon de dire que deux objets sont *coïncidents* [2] plutôt qu'égaux ou confondus.

Par ailleurs, si O_1 et O_2 sont deux objets, O_1 et O_2 peuvent être coïncidents pour diverses raisons :

- O_1 et O_2 ont été superposés à la construction ;
- Lors d'une manipulation des éléments libres de la figure, O_2 passait par là et s'est superposé à O_1 .

La coïncidence parfaite deux objets déplacés à la souris (ou grâce aux touches de direction) est bien souvent un événement dont la probabilité

⁽²⁾ Pléonasme qui ne manquera pas d'en faire sourire plus d'un...

est assez faible ⁽³⁾. Si on désire la forcer, on réalisera un *coïncidence* à ε près ⁽⁴⁾.

Sur TI-*nspire*, la coïncidence d'objets créés dans le *Plan Analytique* pourra se faire en travaillant directement sur les coordonnées des points ou les équations des objets (si elles sont disponibles). Dans le *Plan Géométrique*, il faudra faire preuve de plus d'ingéniosité. . .

4. La célèbre macro « ping-pong »

Cette macro ⁽⁵⁾ « historique » a été développée par le groupe d'enthousiastes à la base du site et de la revue *Abracadabri* [6]. Elle permet de construire « sur » un point existant un nouveau point qui n'existe que si une certaine condition est remplie. Il faut en effet savoir qu'en géométrie dynamique, deux points « confondus » ou « superposés » ne sont pas égaux : ce sont deux objets que sait différencier le logiciel. Lorsque le pointeur s'approche de deux objets très proches ou superposés, il y a ambiguïté sur l'objet pointé, ce que le logiciel ou la calculatrice indique à l'écran à l'aide de tab. Des pressions successives sur la touche tab permettent de « cycler » sur les objets proches ou superposés.

4.1. Principe de la macro

Soit P un point qui peut exister ou ne pas exister. P pourrait être l'intersection de la droite d et du segment S et soit un point quelconque Q . On peut construire « sur Q » un point conditionnel de la façon suivante :

- Construire le milieu M de $[PQ]$ (menu, 9 : Constructions , 5 : Milieu) ;
- Construire le symétrique de P par rapport à M (menu, A : Transformations, 1 : Symétrie).

On crée ainsi un point sur Q qui n'existe que si P existe.

Une des applications les plus fécondes de ce principe est la création d'interrupteurs [3] On/Off. Selon la position de l'interrupteur, on peut faire

⁽³⁾ Comment résister à l'évident jeu de mot : « La coïncidence en géométrie dynamique est une véritable coïncidence » ?

⁽⁴⁾ Voir plus loin, par exemple, le problème des points alignés.

⁽⁵⁾ Il est abusif de parler de *macro* sur TI-*nspire* : les macros n'existent pas (encore) sur ce matériel (v.1.3). Convenons donc d'appeler *macro* toute suite de commande/calculs/constructions menant à un résultat donné à partir d'éléments déterminés.

apparaître ou disparaître un objet déterminé en faisant dépendre l'existence de cet objet d'un point conditionnel. En particulier, un interrupteur peut cacher/montrer la solution d'un problème.

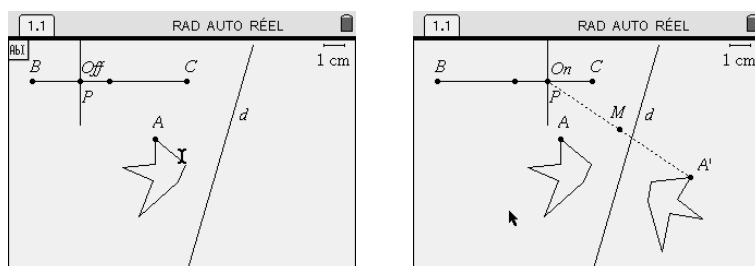


FIG. 2 – Macro Ping-Pong et interrupteur.

Imaginons qu'on veuille cacher/montrer le symétrique d'un polygone dont un sommet est A par rapport à une droite d et soit B le symétrique de A par cette symétrie. Lorsque P appartient à la seconde moitié de $[BC]$, un point On est créé sur P . Par ping-pong, on crée un point A' sur B qui n'existe que si On existe (remarquer le point milieu de $[OnA']$). On crée ensuite l'image du polygone par la symétrie axiale de droite d , image qui n'existe que si A' existe.

4.2. Limitation de la macro « ping-pong »

Le principe du ping-pong est de créer un point sur un autre lorsque qu'un point existe. On peut ainsi déclencher une action dans le cas où cette existence est assurée. Par contre, le ping-pong ne permet pas de faire grand chose à partir d'un point qui n'existe pas.

Il reste que cette macro est un modèle d'élégance en ce qu'elle n'utilise aucun calcul et qu'elle n'utilise que l'incidence entre objets.

4.3. Une petite amusette : le feu rouge (*traffic light*)

Ce bel exercice a été proposé par Pascal DEWAELE [8] lors de formations *Cabri II*.

Dans les figures suivantes, la position de P sur les arcs AB , BC ou CA détermine lequel des feux est allumé. Une animation permet de faire tourner P automatiquement sur le cercle.

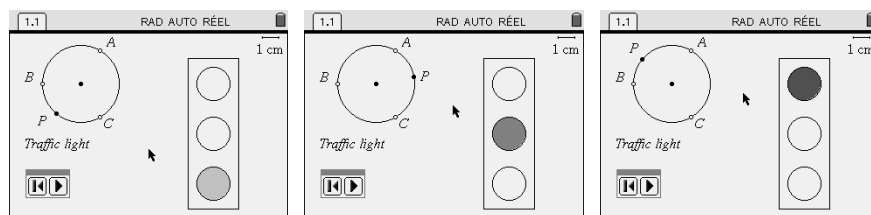


FIG. 3 – Déclenchement de trois événements avec la macro ping-pong

Les pages « G&G » de la TI-*nspire* ne disposent pas (v.1.3) de la commande arc de cercle. La difficulté est ici contournée en construisant un triangle équilatéral dont le centre est le centre O du cercle où se déplace P .

Lorsque P se déplace, la demi-droite $[OP)$ coupe successivement les segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$, créant ainsi trois points conditionnels successivement actifs (par exemple X sur la figure).

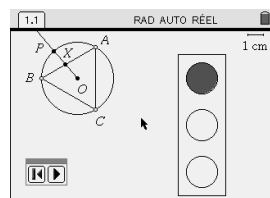


FIG. 4 – Comment suppléer à l'absence de l'objet « arc de cercle ».

5. Quelques cas simples

5.1. Intérieur d'un triangle

On désire savoir si un point P est ou non à l'intérieur d'un triangle (ABC) .

On construit :

- La demi-droite d issue de A passant par P ;
- La perpendiculaire p à d par P ;
- L'intersection M de d avec le segment $[BC]$;
- Le segment $[AM]$;
- L'intersection I de p et de $[AM]$. I est un point « sur » P .

On peut alors, par « ping-pong » à partir de I , créer un point conditionnel X « sur » un point quelconque pour indiquer un message approprié. Il suffit d'affecter à X une étiquette mentionnant « P est à l'intérieur du triangle » : menu, 1 : Actions , 5 : Texte.

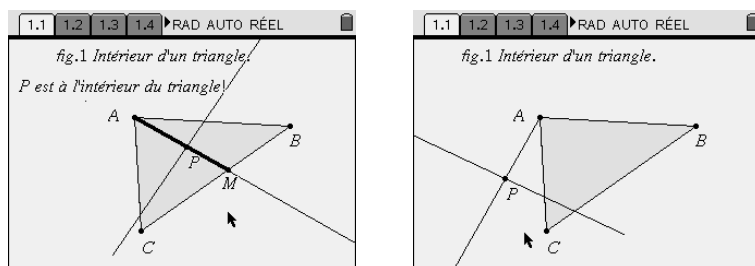


FIG. 5 – Un premier problème d'intérieur...

5.2. Intérieur d'un parallélogramme

Savoir si un point P est à l'intérieur d'un parallélogramme ne pose pas plus de problème.

Par P on construit la parallèle d à un côté du parallélogramme, par exemple $[BC]$ et par P on construit la perpendiculaire p à d . Cette parallèle coupe, peut-être, $[AB]$ et $[CD]$ respectivement en J et I . L'intersection de $[IJ]$ et p est un point conditionnel, « sur » P qui n'existe que si P est intérieur au parallélogramme.

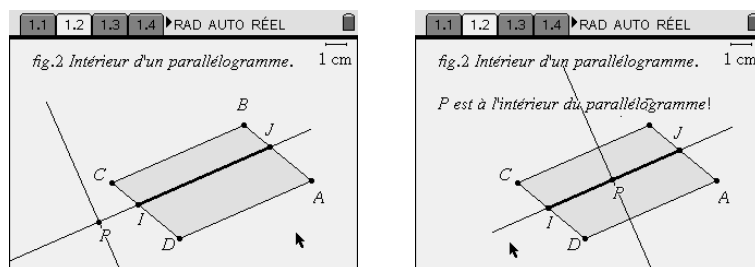


FIG. 6 – Un autre problème d'intérieur... tout aussi simple.

5.3. Intérieur/extérieur d'un cercle

Soit d , la demi-droite de sommet O passant par P (problème si $P = O \dots$). Cette demi-droite d coupe Γ en Q . On construit alors :

1. Le segment $[OQ]$,
2. La demi-droite d' de sommet Q et passant par le symétrique de O par rapport à Q ,
3. La droite p perpendiculaire à d passant par P ,
4. Les intersections de p avec $[OQ]$ et de p avec la demi-droite d' . Ce qui donne deux points « sur » P , conditionnels, n'existant pas simultanément.

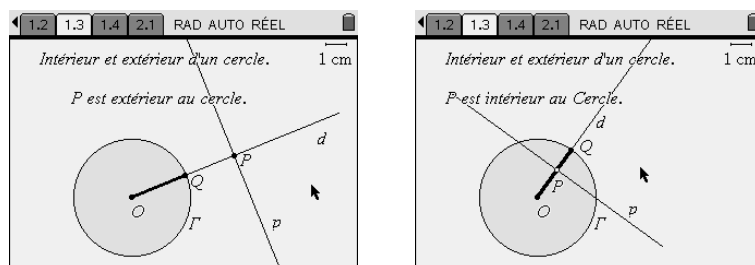


FIG. 7 – Intérieur/Extérieur d'un cercle.

5.4. Intérieur d'un quadrilatère convexe

Cette situation est un peu plus complexe à traiter, du moins avec des moyens classiques (points conditionnels, ping-pong, etc). Soit donc le quadrilatère convexe $ABCD$. Considérons la figure suivante :

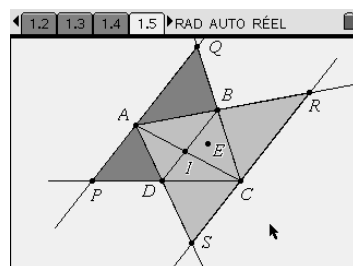


FIG. 8 – Une situation plus complexe malgré qu'on se limite aux quadrilatères convexes.

1. On a tracé les parallèles Δ_1 et Δ_2 à $[BD]$ par A et par C ,
2. $\Delta_1 \cap (DC) = \{P\}$, $\Delta_1 \cap (BC) = \{Q\}$,
3. $\Delta_2 \cap (AB) = \{R\}$, $\Delta_2 \cap (AD) = \{S\}$.

De là, il vient que :

E est intérieur au quadrilatère convexe $ABCD$ ssi E est intérieur au triangle ARS et intérieur au triangle CPQ .

CONSTRUCTION : Il s'agit de construire un point sur E qui n'existera que lorsque E sera à l'intérieur du quadrilatère. Il faut en fait réunir trois conditions :

- $ABCD$ doit être convexe ET
- E doit être intérieur à ARS ET
- E doit être intérieur à CPQ .

On doit donc s'attendre à construire trois points « sur » E ; d'où un empilement de quatre points! Pour savoir si $ABCD$ est convexe, il suffira que construire l'intersection I des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.

- Construire, par ping-pong, un point X sur E qui n'existe que si I existe,
- Construire, par ping-pong, un point X_1 sur X qui n'existe que si E est intérieur à ARS ,
- Construire, par ping-pong, un point X_2 sur X_1 qui n'existe que si E est intérieur à CPQ .

Si X_2 existe, c'est que X_1 et X existent et que donc les trois conditions sont remplies.

Une cascade de points conditionnels est une manière de réaliser un ET logique. La réalisation de OU logique est plus problématique...

5.5. Droite sous un cercle

La considération des différents *cas de figures* est bien illustrée dans cet exemple. Quand une construction ne satisfait plus certaines hypothèses, une autre doit souvent prendre le relai. Un objet Ob_1 crée sous l'hypothèse H_1 disparaît pour faire place à un objet Ob_2 sous l'hypothèse H_2 . Lorsqu'il y a « continuité », le passage de l'existence de $H_1 = \text{« Vrai »}$ à $H_2 = \text{« Vrai »}$ se fait en douceur sans qu'on s'en aperçoive, sauf si volontairement, les formats de Ob_1 et Ob_2 sont différents (épaisseur, pointillés, ...).

Soit donc à tracer la droite (AB) sachant que cette droite doit donner l'impression de passer sous un cercle lorsqu'elle a deux points d'intersection avec celui-ci ⁽⁶⁾. Deux situations sont à couvrir :

1. La droite est extérieure ou tangente au cercle Γ :
 - Construire la droite perpendiculaire p par O à (AB) ;
 - Déterminer les intersections X et Y de p et Γ ;
 - Construire les symétriques O_1 et O_2 de O par rapport à X et Y ;
 - Construire les demi-droites $[XO_1)$ et $[YO_2)$;
 - (AB) coupe $[XO_1)$ ou $[YO_2)$ en Z (ce point est conditionnel) ;
 - Après avoir construit le milieu M de $[AZ]$, on construit par ping-pong un point A' « sur » A . (Veiller à bien répéter deux fois le ping-pong selon que ce Z soit sur $[XO_1)$ ou $[YO_2)$.) ;
 - Construire la droite $(A'B)$. Cette droite « disparaît » lorsque la « vraie » droite (AB) coupe Γ .
2. La droite est sécante à Γ :
 - Déterminer les intersections U et V de (AB) et de Γ ;
 - Construire le symétrique V' de V par rapport à U et celui U' de U par rapport à V ;
 - Tracer les demi-droites $[UV')$ et $[VU')$.

Ne pas oublier de cacher la « vraie » droite (AB) en fin de construction !

⁽⁶⁾ Attention : Sur TI-*nspire* (v.1.3), le remplissage du cercle (Pointer le cercle + Ctrl menu, 2 : Attributs) ne le rend pas opaque (sauf on le remplit de noir!).

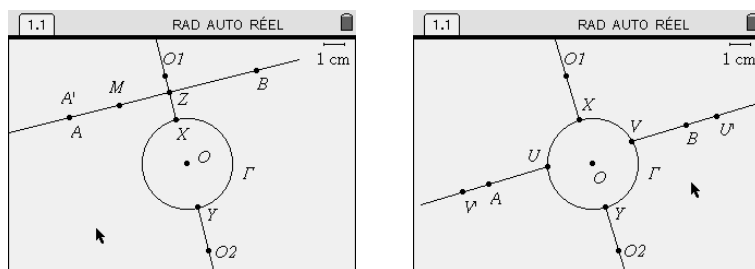


FIG. 9 – Droite sous cercle : une construction prend le relais de l'autre selon la position des objets.

6. Une autre approche : l'utilisation d'une fonction ad hoc

Les fonctions définies par morceaux (souvent discontinues) permettent dans certains cas de déterminer certains comportements de la figure. Considérons deux exemples.

6.1. Puissance d'un point par rapport à un cercle

Soit à calculer dans le plan géométrique la puissance d'un point par rapport à un cercle.

Si P est un point du plan et Γ un cercle, la puissance de P par rapport à Γ est le réel :

$$p = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$$

où A et B sont les points d'intersection d'une droite par P coupant Γ .

- p est positif (négatif) ssi P est à l'extérieur (resp. intérieur) du cercle ;
- p est nul ssi P est sur le cercle.

Dans le plan géométrique, tout ce qu'on mesure est positif, pour afficher le résultat négatif lorsque P est à l'intérieur, on construit une fonction égale à -1 si P est à l'intérieur du cercle et égale à $+1$ dans les autres cas :

$$f(PO) = \begin{cases} +1 & \text{si } PO \geq R \\ -1 & \text{si } PO < R \end{cases} \quad \text{où } R \text{ est le rayon du cercle.}$$

De là, la puissance est $p = PA \cdot PB \cdot f(PO)$

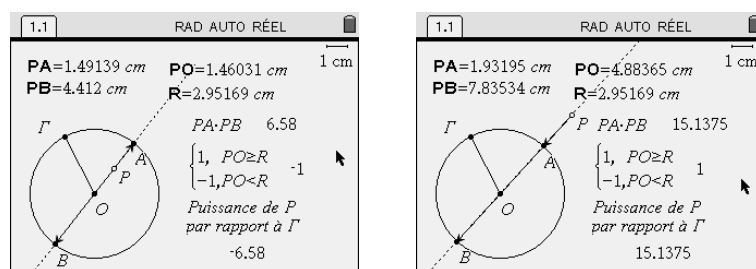


FIG. 10 – La fonction définie par morceaux est directement déposée et évaluée sur la page.

6.2. Extérieur d'un segment

Un point P de la droite (AB) est extérieur à $[AB]$ s'il est extérieur au cercle de diamètre $[AB]$. À la place d'une fonction définie par morceaux, on peut utiliser les puissantes fonctions logiques de la TI-*nspire*.

- On crée un segment $[AB]$ et son milieu O ;
- On construit la droite (AB) ainsi que le cercle Γ ⁽⁷⁾ de diamètre $[AB]$;
- On définit le point P sur (AB) ;
- On mesure OP que l'on envoie vers la variable OP , on mesure le rayon du cercle que l'on envoie vers la variable R ;
- On dépose sur la feuille le « Texte » : $IfFn(OP \geq R, 1, 0)$, (menu, 1 : Action ; 7 : Texte) ;
- On calcule ce texte (menu, 1 : Action ; 7 : Calculer).

La valeur calculée est égale à 0 si le point est intérieur à $[AB]$, égale à 1 si P est sur (AB) et extérieur à $[AB]$. De là, on peut utiliser cette valeur booléenne ⁽⁸⁾ pour déclencher certaines actions.

Une façon d'utiliser cette valeur booléenne b :

- On place une demi-droite d de sommet A (menu, 6 : Points et Droites ; 6 : Demi-droite). La direction de d importe peu ; elle sera cachée ensuite.
- On reporte la valeur b sur cette demi-droite. On obtient le point C .

⁽⁷⁾ On peut très bien se passer de ce cercle mais l'idée est de reprendre ce qui a été fait plus haut...

⁽⁸⁾ Attention : Sur TI-*nspire* (comme sur TI-92), une variable booléenne prend explicitement les valeurs *True* ou *False*. Par exemple, $Not(True) = False$.

Pour info, la fonction *Not* sur un entier réalise le complément (binaire) à 1 de l'entier écrit sur 32 bits... Le couple 0/1 n'est donc pas sous TI-*nspire* un vrai couple booléen ; le « vrai » serait plutôt (*True, False*).

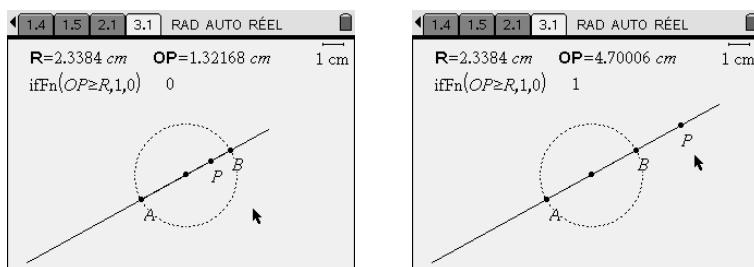


FIG. 11 – Intérieur/extérieur d'un intervalle.

- On construit la médiatrice m du segment $[AC]$.
- On construit le symétrique de C par rapport à m . On obtient un point conditionnel X sur A .

Si la valeur booléenne vaut 0, la médiatrice n'existe plus et donc X non plus.

$IfFn(OP \geq R, 0, 1)$ permet d'inverser la variable b et de construire un point Y sur A lorsque $b = 0$.

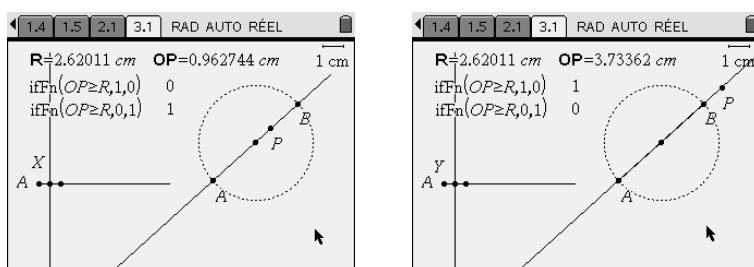


FIG. 12 – Construction d'un point X ou Y « sur » A selon que P est int. ou ext. au cercle

Plus simple mais avec quelques calculs :

- Si b est la variable « booléenne » (0/1), on évalue l'expression $\sqrt{2b-1} \rightarrow b_1$ qui fournit 1 si $b = 1$ et $Undef$ si $b = 0$.
- On reporte cette valeur sur une demi-droite; le point créé est conditionnel.

6.3. Appartenance à une réunion d'ensembles

On a vu que réaliser un « Ou » logique n'est pas toujours chose aisée. Mais si l'appartenance est déterminée par une fonction booléenne, ce genre d'opération logique ne pose aucun problème.

Voici donc, une figure qui permet de déterminer quand un point P appartient à deux cercles parmi trois.

D_i désigne l'intérieur du cercle Γ_i de rayon r_i et de centre O_i ($i = 1, 2, 3$)

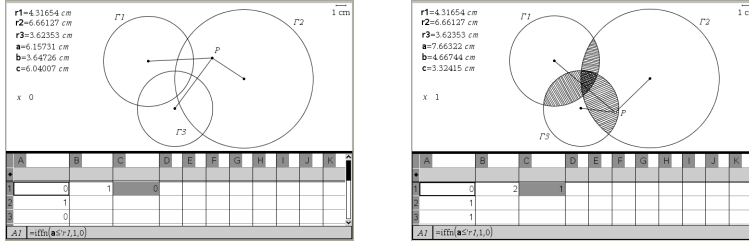


FIG. 13 – Construction d'un « ou » logique : dès que $P \in (D_1 \cap D_2) \cup (D_2 \cap D_3) \cup (D_3 \cap D_1)$, la zone correspondante apparaît hachurée.

Quelques explications :

- Le « ou » est réalisé dans une page « Tableur & Listes »,
- La cellule A1⁽⁹⁾ contient la formule $\text{=ifFn}(a \leq r1), 1, 0)$ où $a = PO_1$ et où r_1 est le rayon de Γ_1 ,
- La cellule B1 contient la somme des cellules A1, A2 et A3,
- La cellule C1 contient la formule $x := \text{ifFn}(b1 = 2 \text{ or } b1 = 3, 1, 0)$, le résultat est donc affecté à la variable x .
- Cette valeur booléenne x est récupérée et évaluée dans la feuille « G&G ».
- On utilise x pour hachurer⁽¹⁰⁾ conditionnellement les trois zones $D_i \cup D_j$, ($i, j = 1, 2, 3$ et $i \neq j$).

⁽⁹⁾ Formules analogues en A2 et A3.

⁽¹⁰⁾ S'entraîner à hachurer des zones est un excellent exercice ! Une hachure est en fait le lieu d'un segment soumis à certaines conditions.

7. Deux approches d'un problème simple : points alignés

On place trois points A , B et C dans le plan et, au cas où ils sont alignés, on désire tracer la droite qui les joint.

Petit problème : en déplaçant trois points « au petit bonheur », la probabilité qu'ils soient alignés est très faible et dépend du nombre de pixels à l'écran. Pour que l'événement « A , B , C sont alignés » se produise de temps à autre, les points libres A , B et C vont en fait piloter des points proches qui feront des sauts par pas réglable (1, 0,5, 0,25, ...).

Si A , B et C ont pour coordonnées respectives $(x_a; y_a)$, $(x_b; y_b)$ et $(x_c; y_c)$, on définit les points $A_1 \left(\frac{1}{n} \lfloor x_a \cdot n \rfloor ; \frac{1}{n} \lfloor y_a \cdot n \rfloor \right)$, $B_1 \left(\frac{1}{n} \lfloor x_b \cdot n \rfloor ; \frac{1}{n} \lfloor y_b \cdot n \rfloor \right)$ et $C_1 \left(\frac{1}{n} \lfloor x_c \cdot n \rfloor ; \frac{1}{n} \lfloor y_c \cdot n \rfloor \right)$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier (relatif) inférieur à x ⁽¹¹⁾.

C'est l'alignement des points A_1 , B_1 et C_1 qui sera en fait testé.

Construction de la figure et exécution des calculs :

- Insérer une page « Tableur & Listes » et diviser la page horizontalement, la partie inférieure étant une page « G&G ». (*Attention : Tout sera réalisé dans le Plan Analytique.*)
- Placer trois points A, B et C et envoyer leurs coordonnées dans les six variables xa , ya , xb , yb , xc et yc ⁽¹²⁾.
- Dans la cellule $a4$ du tableur placer un entier positif (p. ex. : 4) et définir cette cellule comme variable TI-*nspire* n .
- Dans la cellule $a1$ placer la formule $\text{floor}(xa \cdot n)/n$.
- Formule analogue pour ya dans $b1$, pour xb dans $a2$, pour yb dans $b2$, pour xc dans $a3$ et yc dans $b3$. Ces cellules contiennent les coordonnées des points A_1 , B_1 et C_1 .
- Récupérer ces valeurs dans la zone « G&G » pour les reporter sur les axes en vue de construire les points A_1 , B_1 et C_1 .
- Placer le réel 1 dans les cellules $c1$, $c2$ et $c3$.
- Calculer, en plaçant le résultat en $b4$, le déterminant du champ $a1 : c3$. Ce déterminant sera nul si et seulement si A_1 , B_1 et C_1 sont alignés.

⁽¹¹⁾ Sur TI-*nspire*, $\frac{1}{n} \lfloor x_a \cdot n \rfloor$ « s'écrit » : $\text{floor}(xa \cdot n)/n$.

⁽¹²⁾ Il n'y a pas d'indices dans les noms de variables TI-*nspire*.

- En *c4*, introduire la formule $= \text{ifn}(|b4| < 10^{-10}, 1, 0)$ (variable booléenne d'alignement).
- Placer cette valeur 0/1 dans la variable *alignes* et la récupérer dans la zone « G&G ». De là, il est facile d'utiliser cette valeur pour faire apparaître la droite contenant nos trois points... s'ils sont alignés.

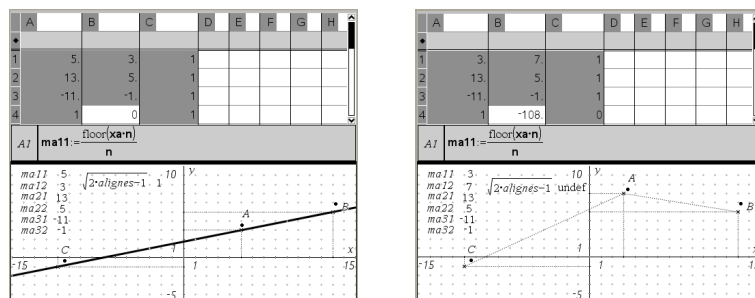


FIG. 14 – Points alignés sur les mailles d'un réseau.

On peut aussi raisonner beaucoup plus simplement, en restant dans le *Plan Géométrique* !

En effet : A , B et C sont alignés ssi l'aire du triangle ABC est nulle.

Dans une page « G&G » dans laquelle on affiche le plan géométrique, il suffit donc de tester la nullité ⁽¹³⁾ de l'aire du triangle !

Si cette aire est envoyée vers la variable S , on évalue :
$$\begin{cases} -1 & \text{si } S > 10^{-3} \\ +1 & \text{si } S \leq 10^{-3} \end{cases}$$

En reportant cette valeur sur la demi-droite $[AB)$, on obtient un point conditionnel X . On construit la droite (AX) qui n'existe que si A , B et C sont alignés.

Ces deux approches utilisent des moyens apparemment très différents mais en réalité, on sait que là où il y a des déterminants, il y a aussi des aires de parallélogrammes...

L'aire *orientée* du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de composantes respectives $\begin{pmatrix} \alpha_u \\ \beta_u \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \alpha_v \\ \beta_v \end{pmatrix}$ est $\det \begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \end{pmatrix}$.

⁽¹³⁾ Pour des raisons de commodité, sans quoi il est difficile d'aligner des points à l'écran, on teste la « quasi » nullité de l'aire; ce qui est bien sûr sujet à caution. En effet, un triangle peut avoir une aire très petite et être équilatéral. Ses sommets sont alors loin d'être alignés.

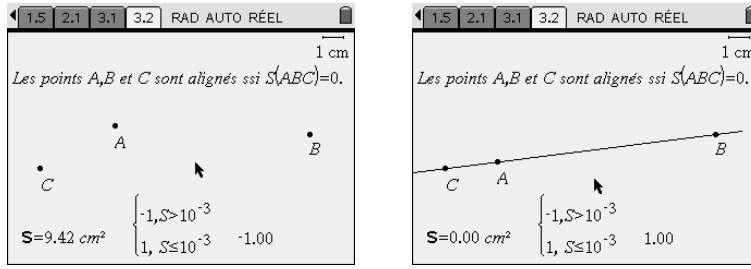


FIG. 15 – Les points sont alignés s'ils sont les sommets d'un triangle d'aire nulle.

L'aire du triangle ABC est donc $S(ABC) = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \end{pmatrix} \right|$.

Le « truc » vu, souvent sans trop d'explications géométriques, au niveau secondaire supérieur :

$A(x_a; y_a), B(x_b; y_b)$ et $C(x_c; y_c)$ sont alignés ssi $\det \begin{pmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{pmatrix} = 0$

est strictement équivalent (à un facteur 2 près) à la méthode utilisant l'aire du triangle.

On vérifie en effet que : $\det \begin{pmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_b - x_a & y_b - y_a \\ x_c - x_a & y_c - y_a \end{pmatrix}$.

Pour vérifier cette dernière égalité, les plus paresseux pourront utiliser le calcul formel (s'ils disposent d'une calculatrice [ou du logiciel] TI-*nspire* « CAS ») : v. la fig. 16.

8. Existence/non-existence sur la TI-*nspire*

On a vu qu'un inconvénient de la macro ping-pong était qu'il est difficile de créer quelque chose à partir d'un objet qui n'existe pas ou plus. Mais quand un objet disparaît, il doit bien laisser une trace quelque part...

Nous aimerions définir une variable TI-*nspire* qui vaut 1 si un point existe et qui vaut 0 si le point n'existe pas.

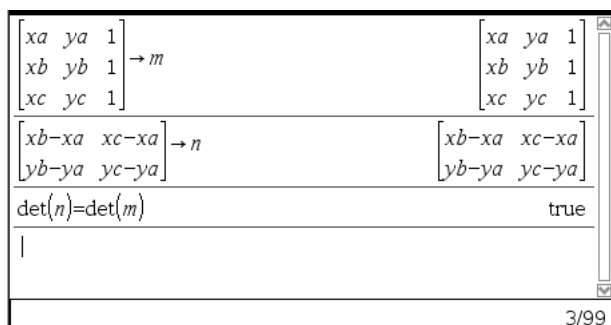


FIG. 16 – Utilisation des fonctions CAS.

Ceci permettra :

- De traiter facilement aussi bien les « et » que les « ou » logiques (le « ou » est un point faible des macros d'existence) ;
- De traiter des expressions logiques « complexes » ;
- De créer des tables ou des listes de valeurs logiques (0/1) susceptibles d'un traitement global.

8.1. Exploitation du « undef »

- Construisons
 - Un point M mobile sur une droite d ;
 - Une perpendiculaire à d par M ;
 - Un segment s dont le support est parallèle à d .
- La perpendiculaire coupe (éventuellement) le segment s en P .
- La mesure de $[MP]$ est envoyée vers la variable xx qui est récupérée dans une page « Tableur & Liste » dans la cellule $a1$.
- La valeur (numérique ou non) de $a1$ (ou xx) est alors testée.
Si le point P n'existe pas, xx n'est pas définie et la cellule $a1$ contient $\#undef$.
- Dans la cellule $b1$, on place la formule ⁽¹⁴⁾

$$= iffn(left(string(a1), 1) = 'u', 0, 1)$$

Cette valeur est affectée à la variable $ex1$,

⁽¹⁴⁾ La formule plus simple « $= iffn(string(a1) = 'undef', 0, 1)$ » ne convient apparemment pas...

- On peut alors récupérer *ex1* dans la page G&G pour utilisation ultérieure.

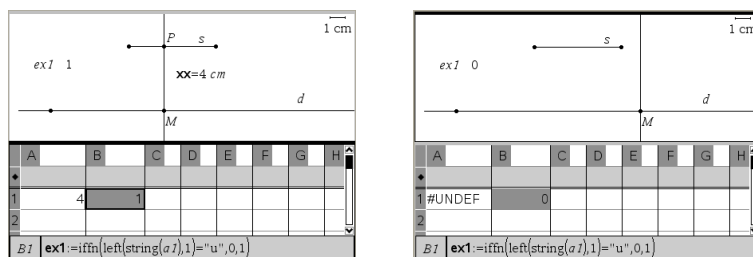


FIG. 17 – Utilisation du message « undef » comme critère de non existence

Cette technique du « undef » nous permet de résoudre le problème des points alignés d'une autre manière.

Si $A \neq C$ et $B \neq C$, A , B et C sont alignés ssi les médiatrices de $[AC]$ et de $[BC]$ sont parallèles. Il suffit de tester l'existence du point P d'intersection de ces médiatrices.

Dans le *Plan Analytique*, on envoie l'abscisse de P vers une variable x dont il suffit de tester l'existence comme ci-dessus.

Dans le *Plan Géométrique*, on doit aussi pouvoir se débrouiller...

8.2. Mesure d'un arc orienté

La TI-*nspire*, comme d'autres logiciels de géométrie dynamique (mais pas tous...) ne permet pas de mesurer un angle compris entre 0 et 360° (angle orienté).

Le plan de la géométrie dynamique est pourtant bien orienté. Si on construit l'image A' du point A par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour du point B (**menu**, A : Transformations, 4 : Rotation), on se rend compte que le plan est orienté positivement dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (rien que de très normal!).

Si donc, il s'agit de mesurer l'angle *orienté* $\widehat{ABC}$, cet angle aura une mesure :

- Comprise entre 0 et π si $[CA']$ ne coupe pas (AB) ,

- Comprise entre π et 2π ⁽¹⁵⁾ si le segment $[CA']$ coupe la droite (AB) en un point I ⁽¹⁶⁾.

En travaillant dans le *Plan Géométrique*,

- On mesure l'angle $\widehat{ABC}$ non orienté (**menu**, 7 : Mesures, 4 : Angles). On place cette mesure dans la variable b .
- On mesure la distance CI qu'on envoie dans une variable d et qu'on récupère dans une cellule de tableur en vue d'appliquer le « undef ».
- Dans la cellule A1 on place la formule « = d ».
- Dans B1, on place la formule « =ifn(left(string(a1),1)='undef',0,1) » dont le contenu est envoyé dans la variable a qui est remplacée et recalculée sur la feuille « G&G ».
- Le « texte » $(1-a) \cdot b + a \cdot (2 \cdot \pi - b)$ ⁽¹⁷⁾ est déposé et calculé sur la feuille. Cette valeur est la mesure (en radians) de l'angle orienté $\widehat{ABC}$.

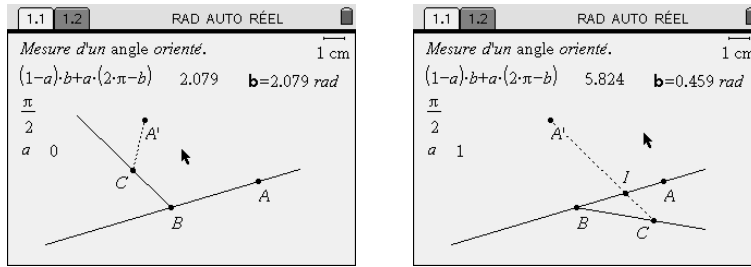


FIG. 18 – Mesure d'angle orienté et appartenance à un demi-plan.

9. Intérieur d'un polygone quelconque

9.1. Intérieur et extérieur : un problème bien difficile

Richard COURANT et Herbert ROBBINS, dans [1], posent la question, apparemment évidente, de savoir si un point est *intérieur* ou *extérieur* à un polygone.

⁽¹⁵⁾ Ou comprise entre $-\pi$ et 0, au choix.

⁽¹⁶⁾ Remarquons qu'on a là un critère simple de séparation du plan en deux demi-plans, par incidence, sans coordonnées, sans équations et sans calculs.

⁽¹⁷⁾ À adapter si on désire mesurer entre $-\pi$ et $+\pi$.

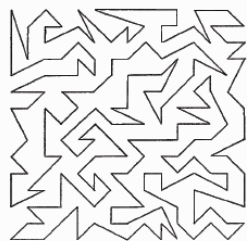


FIG. 19 – Quels sont les points du plan situés à l'intérieur du polygone ?

C'est à Camille JORDAN (1838–1922) que l'on doit le résultat suivant ⁽¹⁸⁾ :

Théorème 1 *Le complémentaire d'une courbe de Jordan ⁽¹⁹⁾ Γ dans un plan affine réel est formé d'exactly deux composantes connexes distinctes, dont l'une est bornée et l'autre non. Toutes deux ont pour frontière la courbe de Jordan Γ .*

La partie non bornée est appelée « extérieur » de la courbe.

On a vu que déterminer si un point était ou non à l'intérieur d'un quadrilatère convexe n'était pas chose aisée avec les moyens « classiques » (incidence, ping-pong,...). Il existe cependant des algorithmes bien connus permettant de faire le boulot sans trop de difficultés. Ces algorithmes sont souvent difficiles à mettre en œuvre sur les logiciels classiques de géométrie dynamique. La raison en est que ces logiciels ne prévoient pas d'élaborer un « script », un programme pour traiter un problème même si les macros qu'ils proposent constituent des outils très puissants dans bien des cas [10].

Le plus simple de ces algorithmes est sans doute le suivant :

Soit un polygone $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ ($P_i \neq P_j$ pour $i \neq j$), non croisé. *En général* (il faudra préciser...), le point Q est à l'intérieur du polygone, si une demi-droite de sommet Q coupe le polygone un nombre *impair* de fois.

Constatons que ceci est une conséquence du théorème de JORDAN. Mais sans pour autant démontrer ce théorème dans le cas général, on peut le

⁽¹⁸⁾ La démonstration de ce résultat intuitivement évident est difficile. La version définitive de la preuve (1905) serait due à Oswald VEBLEN (1880–1960).

⁽¹⁹⁾ Une *courbe de Jordan* est une courbe simple fermée du plan ou une application injective et continue d'un cercle vers le plan. Notre polygone non croisé en est un exemple.

prouver de manière élémentaire dans le cas d'un polygone non croisé (la démonstration est donnée dans [1]).

9.2. Une méthode imparfaite

Contentons nous d'appliquer brutalement notre algorithme.

Attention, le plan affiché sera le *Plan Analytique* ! Pour fixer les idées, donnons-nous un polygone à douze sommets $P_1, P_2, \dots, P_{12}$ et un point quelconque P du plan.

- On construit une demi-droite de sommet P . On veillera à pouvoir modifier sa direction en la faisant passer par un point Q libre sur un cercle centré en P . Cette demi-droite sera notre *demi-droite* « *test* ».
- Patiemment, on déplace P et/ou on modifie la direction de la demi-droite $[PQ)$ de manière à définir l'intersection entre $[PQ)$ et chacun des douze côtés du polygone. À chaque fois, on détermine les coordonnées de ce point d'intersection et on envoie son abscisse vers une variable. On obtient donc 12 variables x_i ($i = 1, \dots, 12$) qui peuvent être « undef ».
- Ces variables x_i sont récupérées et placées dans les cellules $B1$ à $B12$ d'une page « Tableur & Listes »,
- Pour changer d'usage et ne plus utiliser la fonction « `iffn(proposition logique, expr A, expr B)` », on encode dans une page « Calcul » la fonction « `test_existe(valeur)` » définie par l'utilisateur :

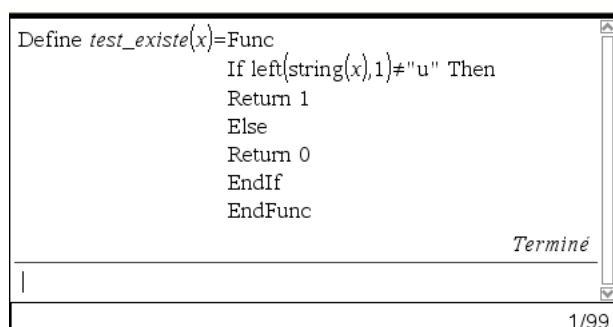


FIG. 20 – Une fonction Nspire définie par l'utilisateur.

- Dans la cellule $C1$ du tableur, on place la formule « `=test_existe(b1)` »
On recopie ensuite cette formule dans les cellules de $C2$ à $C12$.

- On calcule la somme des valeurs des cellules $C1$ à $C12$ et on évalue cette somme *modulo* 2. On envoie ce dernier résultat dans une variable « interieur » qu'on peut récupérer dans la page « G&G ».

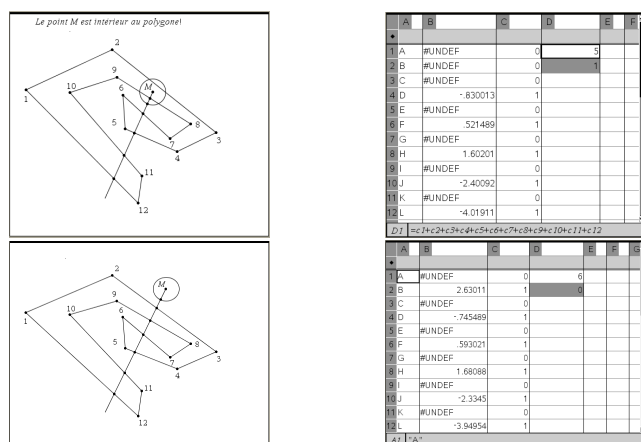


FIG. 21 – 5 (6) points d'intersection : le point est intérieur (resp. extérieur).

La méthode montre ses limites si

- La demi-droite « test » passe par un ou des sommet(s) du polygone,
- La demi-droite « test » est support d'un côté (ou plus) du polygone.

On conçoit donc que cette demi-droite issue de P doive s'adapter aux conditions (polygone et position de P).

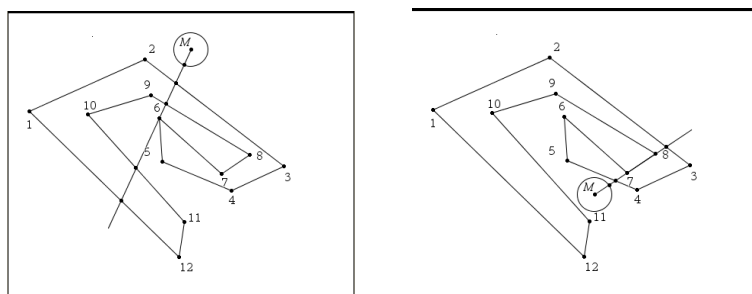


FIG. 22 – Là où la méthode est défaillante...

9.3. La figure finale

Nous devons donc créer dynamiquement notre demi-droite « test ». Soit d cette demi-droite. Pour que d soit une bonne demi-droite, il suffit que :

- La pente de d soit différente de celles de chacune des droites $(P_i P_j)$ ($i \neq j$);
- La pente de d soit différente de celles de chacune des droites (PP_i) .

Une idée est alors de calculer ces 24 pentes (en tenant compte du fait que certaines pourraient ne pas exister (droites parallèles à Oy)) et d'en choisir une différente pour d . Le plus simple est de rajouter 1 à la plus grande des 24 pentes. Si une des pentes n'existe pas (undef), on la remplace par 0. La pente de d étant déterminée (elle s'adapte dynamiquement aux circonstances), il ne reste plus qu'à appliquer la méthode utilisée précédemment.

Contenu de la page « Tableur & Listes » :

- Cellules $A1$ à $A12$ et $B1$ à $B12$: abscisses et ordonnées des sommets du polygone,
- Cellules $C1$ à $C12$: calculs des pentes des côtés du polygone $(P_i P_j)$,
- Cellules $C13$ à $C24$: calculs des pentes de droites (PP_i) ,
- Cellules $D1$ à $D24$: on détecte les pentes « undef » par la formule « =ifFn(left(string(Ci),1)='u',0,ci) » ($i = 1, \dots, 24$)
- Cellule $E1$: on détermine la pente maximale « =max(d1 :d24) »,
- Cellule $E2$: on ajoute 1 à cette pente et on envoie le résultat dans la variable p ,

Cette variable p est récupérée dans la page « G&G ». On place alors un vecteur de composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix}$ et d'origine P ; ce qui nous donne la demi-droite « test ».

- Cellules $F1$ à $F12$: abscisses des éventuels points d'intersection de la demi-droite avec les douze côtés du polygone.
- Cellules $G1$ à $G12$: mise à 1 ou 0 selon que le point d'intersection avec le côté existe ou non.
formule « =ifFn(left(string(Gi),1)='u',0,1) »
- Cellule $G13$: « =sum(g1 :g12) ». Cellule $G15$: « =mod(g13,2) » envoyé vers la variable « interieur ».

Aucune différence sensible n'est perceptible entre cette version et la première. La position des objets est en général telle que les limitations de la première version sont rarement rencontrées. Mais rappelons que nous faisons ici des mathématiques et que la rigueur nous impose d'envisager tous

les cas. (Tiens, avons-nous pensé au cas du point *sur* le polygone?) Et il suffit bien sûr d'avoir négligé un cas, pour qu'il se présente. . .

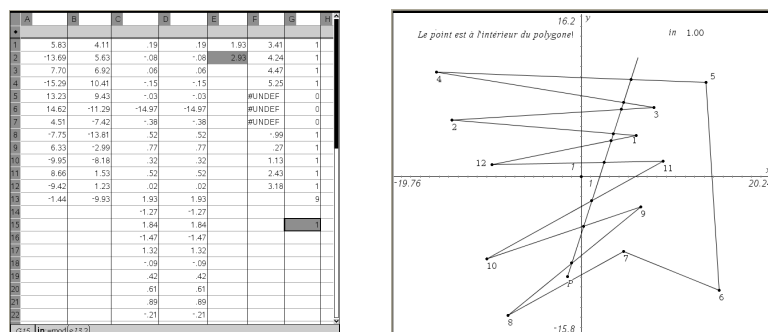


FIG. 23 – La figure finale. . .

Cette figure serait difficile à réaliser sur un logiciel classique. Nous avons ici tiré parti des principales qualités du concept TI-*nspire* :

1. Utilisation de variables globales à une activité.
2. Gestion « propre » des calculs dans une page « Tableur & Listes »
3. Utilisation des fonctions logiques du langage TI-*nspire*.
4. Lien dynamique (en temps réel) entre les pages « G&G » et « Tableur & Listes »

Bibliographie

- [1] Richard COURANT, Herbert ROBBINS, *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*, Oxford University Press, Oxford, 1947, 1996.
- [2] Roger CUPPENS, *Avec Cabri-Géomètre II, jouez... Et faites de la géométrie!*, T. 1 & 2, Publications de l'APMEP n^{os} 136 & 137, 2003.
- [3] Eric HAKENHOLZ, Interrupteurs à choix multiples, *Abracadabri*, **3**, Mai-Juin 1994.
- [4] *Apprivoiser la géométrie avec Cabri-Géomètre*, Centre Informatique Pédagogique (CIP), Genève, 1996.
- [5] <http://www.cabri.net/abracadabri/>
Le site historique des enthousiastes de Cabri II.

- [6] <http://www.cabri.net/abracadabri/GeoLogique/AliceGene.html>
Les pages de géométrie logique d'*Abracadabri*.
- [7] <http://pagesperso-orange.fr/jcmonrocq/>
Le site de Jean Charles MONROCQ, des macros logiques robustes et décrites en détail.
- [8] <http://users.skynet.be/cabri/>
Le site de Pascal DEWAELE, formateur Cabri II et Cabri 3D.
- [9] <http://www.johnhanna.us/TI-nspire.htm>,
Les pages TI-*nspire* de John HANNA ; voir en particulier *How to make and use « Sliders »*.
- [10] <http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/geometry/insidepoly/>
Quelques algorithmes pour déterminer si un point est à l'intérieur d'un polygone et leur implémentation en langage C.

Bibliographie

Jacques Navez

Robert DELORD, Gérard VINRICH, Michel BOURDAIS,
Nicole CAZANAVE-NEBOUT (pour les rubriques *Maths – Magazine*), Lydia MISSET, Jacques TURNER,
Éric LOTZ (pour les extraits de *Déclic 2^{nde}*);
Mady FRÉMAL & Rita MIDAVAINÉ (pour l'adaptation belge),
Maths 3^e – tome 2,
Hachette (coll. *Collection cinq sur cinq*), 2007.

Ce livre, conçu pour la dernière classe du collège en France, a été adapté aux programmes belges de 3^e par Mady FRÉMAL et Rita MIDAVAINÉ sous les auspices des éditions Érasme de Namur. Il contient les 6 derniers chapitres de la matière et est consacré principalement à la géométrie, à l'exception du premier chapitre qui traite des polynômes. Le contenu en est le suivant :

- Chapitre 7 : Polynômes ;
- Chapitre 8 : Le théorème de Thalès et sa réciproque ;
- Chapitre 9 : Angles et triangles ;
- Chapitre 10 : Transformations et triangles ;
- Chapitre 11 : Triangle rectangle et trigonométrie ;
- Chapitre 12 : Avec des coordonnées.

Tous les chapitres sont organisés de la même manière :

- Une première partie appelée « De quoi s'agit-il ? » permet de découvrir la notion étudiée. Elle est à la fois claire et concise et adopte un style direct favorable à la compréhension.
- Une seconde partie appelée « Retenir » synthétise, comme son nom l'indique, l'essentiel de l'information qui devrait être mémorisée par l'élève.
- Cette dernière partie est entrecoupée fort judicieusement par une troisième partie « Mettre en pratique » qui donne le détail des opérations à effectuer pour appliquer correctement les notions qui doivent être retenues.

- Une quatrième partie « Appliquer le cours » propose des applications immédiates et sans complications techniques inutiles des concepts qui viennent d'être étudiés.
- Une cinquième partie « Faire le point » permet aux apprenants d'effectuer une brève autoévaluation de leurs compétences sur le sujet.
- Une sixième partie « Consolider et approfondir » propose des exercices gradués, des problèmes et des tests de compréhension.
- La septième et dernière partie « Maths Magazine » propose quelques informations complémentaires de nature artistique ou historique comme par exemple la divine proportion, une notice sur Descartes, ...

Ce livre comporte plusieurs facettes particulièrement plaisantes. J'ai apprécié le découpage de chaque chapitre qui permet un apprentissage bien conduit, les notions clairement exprimées, un style direct et précis, de nombreuses figures et illustrations qui aèrent la matière et la rendent plus perceptible. On y retrouve des indications pour utiliser un logiciel de construction géométrique, un aide-mémoire pour les notions fondamentales et un « Mini-dico » qui sert d'index. En bref, beaucoup de bonnes choses non seulement pour faciliter le travail de l'élève mais encore pour le rendre suffisamment agréable pour que cela l'incite à aller plus loin.

Problèmes

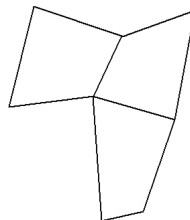
Claudine Festraets ⁽¹⁾

Développement

Problème n° 343 de *M&P* n° 163

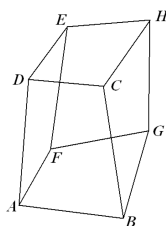
Trois quadrilatères, n'ayant tous trois pas de côtés parallèles, constituent trois des six faces d'un hexaèdre. Avec la règle et le compas, construire les trois autres quadrilatères pour ainsi constituer un développement de cet hexaèdre. Préciser les conditions de solubilité du problème (on suppose que les trois quadrilatères forment un « L »).

(Problème proposé par A. LAFORT de Nivelles).



Solution de l'auteur

Considérons l'hexaèdre $ABCDEFGH$ à faces quadrangulaires. Nous choisissons comme plan de développement celui qui contient le quadrilatère contigu aux deux autres parmi les 3 donnés par le problème, ce sera donc le plan $ABFG$; nous appellerons socle ce quadrilatère $ABFG$. Ces 3 quadrilatères fournissent les points A, B, C, D, E, F et G , sept des huit sommets de l'hexaèdre.



1. Résolution du problème à 3 dimensions

Le 8^e sommet H est l'intersection des 3 plans connus EDC , EFG et BCG .

⁽¹⁾ Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à Cl. FESTRAETS, Rue J.-B. Vandercammen 36, 1160 Bruxelles ou à l'adresse courriel hamoircl@brutele.be.

a) Recherche de PE , intersection de EDC et EFG :

M = intersection de AD et EF ,

N = intersection de AB et FG ,

P = intersection de MN et CD .

b) Recherche de SC , intersection de EDC et BCG :

Q = intersection de AD et CB ,

R = intersection de AF et BG ,

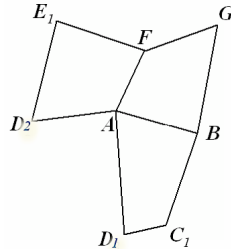
S = intersection de QR et DE .

c) H est l'intersection de PE et SC .

2. Première étape dans la recherche du développement

Recherche du développement incomplet formé du socle et des quatre quadrilatères qui lui sont contigus, deux fournis par les données et deux à construire.

Dans cette configuration les 4 points A , B , F et G apparaissent une seule fois et sont confondus avec leur projection orthogonale sur le plan du socle. Par contre, les 4 autres points C , D , E et H apparaîtront deux fois dans ce plan : nous les appellerons C_1 , C_2 , D_1 , D_2 , E_1 , E_2 et leur projection orthogonale C' , D' , E' et H' .



3. Conditions de résolution du problème

AD_1 et AD_2 ont même longueur. La somme des amplitudes des angles $\widehat{D_2AF}$ et $\widehat{D_1AB}$ est supérieure à celle de $\widehat{BAF}$.

4. Étapes de résolution

– Recherche de D' .

D' est l'intersection de la perpendiculaire à AF issue de D_2 et la perpendiculaire à AB issue de D_1 .

– Recherche de E' .

X = intersection de E_1D_2 et AF . E' = intersection de XD' et de la perpendiculaire à AF issue de E_1 .

- Recherche de C' .
 Y = intersection de C_1D_1 et AB . C' = intersection de YD' et de la perpendiculaire à AB issue de C_1 .
- Recherche de E_2 .
 E_2 est l'intersection du cercle de centre F et de rayon FE_1 et de la perpendiculaire à FG issue de E' .
- Recherche de C_2 .
 C_2 est l'intersection du cercle de centre B et de rayon BC_1 et de la perpendiculaire à BG issue de C' .
- Recherche de H' .
 M' = intersection de AD' et $E'F$,
 N' = intersection de AB et FG ,
 P' = intersection de $M'N'$ et $C'D'$,
 Q' = intersection de AD' et $C'B$,
 R' = intersection de AF et BG' ,
 S' = intersection de $Q'R'$ et $D'E'$,
 H' = intersection de $P'E'$ et $S'C'$.
- Recherche de H_1 .
 Y = intersection de $H'E'$ et FG . H_1 = intersection de YE_2 et de la normale à FG issue de H'
- Recherche de H_2 .
 X = intersection de $H'C'$ et BG . H_2 = intersection de XC_2 et de la normale à BG issue de H'
- Dernière étape dans la recherche du développement.
Tracé de la sixième face qui est contiguë à un des 4 quadrilatères non socle. De cette sixième face les longueurs des côtés sont connues mais cela ne suffit pas à le construire. Pour y arriver, on peut, par exemple, suivre la démarche suivante :
 - On considère comme nouveau socle le quadrilatère BGH_2C_2 ;
 - On effectue la rotation de centre B et appliquant C_1 sur C_2 et donc transformant AD_1C_1B en $A_2D_3C_2B$;
 - On reprend les démarches de la première étape dans cette nouvelle configuration.

Je n'ai reçu qu'une seule autre solution. J'admire H. VERMEIREMN de Bruxelles qui s'est attelé à ce difficile problème et je le remercie. Pour que sa solution soit publiée, il m'aurait fallu refaire certaines figures peu lisibles dans son envoi et ces figures étant très compliquées, j'avoue que je n'en ai pas eu le courage.

Diagonales

Problème n° 344 de *M&P* n° 163

Démontrer que les diagonales d'un quadrilatère sont perpendiculaires si et seulement si la somme des carrés de deux côtés opposés est égale à la somme des carrés des deux autres côtés.

Solution de J. Ooms, de Chimay

Soit $\alpha = \widehat{BOD}$ l'angle aigu ou droit des diagonales du quadrilatère $ABCD$. Avec les notations de la figure :

$$x^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \alpha,$$

$$y^2 = b^2 + d^2 - 2bd \cos \alpha,$$

$$\text{d'où } x^2 + y^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2(ac + bd) \cos \alpha;$$

$$z^2 = a^2 + d^2 + 2ad \cos \alpha,$$

$$u^2 = c^2 + b^2 + 2bc \cos \alpha,$$

$$\text{d'où } z^2 + u^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ad + bc) \cos \alpha.$$

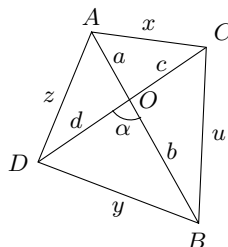
De là,

$$x^2 + y^2 = z^2 + u^2 \Leftrightarrow -\cos \alpha (ac + bd) = \cos \alpha (ad + bc)$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha (ad + bc + ac + bd) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = 0 \quad (\text{car } ad + bc + ac + bd > 0)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 90^\circ.$$



Bonnes solutions de J. ANSEEUW, de Roeselare ; R. CHOLET, de Avenay ; K. CHIRIAA, de Bruxelles ; A. PATERNOTTRE, de Boussu ; J. RASSE, de Méan ; M. VERHEYLEWEGHEN, de Bruxelles et Cl. VILLERS, de Hyon.

Maximum et minimum

Problème n° 345 de *M&P* n° 163

La somme des périmètres de deux triangles équilatéraux est une constante L . Déterminer les périmètres L_1 et L_2 de chacun des triangles pour que la somme de leurs aires

(a) soit maximale,

(b) soit minimale.

Solution de R. Choulet, de Avenay (France)

Avec les notations proposées on a $L = L_1 + L_2$ tandis que la somme des aires des triangles est du type $S = k(L_1^2 + L_2^2)$ avec $k > 0$ (en fait $k = \frac{\sqrt{3}}{36}$). Donc $S = f(L_1) = k(L_1^2 + (L - L_1)^2)$.

Cette fonction f décroît sur $[0; L/2]$, de kL^2 à $kL^2/2$ puis croît sur $[L/2; L]$, de $kL^2/2$ à kL^2 . Ainsi le minimum de S est-il obtenu pour deux triangles isométriques de périmètre $L/2$ et le maximum lorsque l'un des triangles est réduit à un point, l'autre ayant pour périmètre L .

Bonnes solutions de J. ANSEEUW, de Roeselare; K. CHRİAA, de Bruxelles; G. DELCROIX, de Braine-le-Comte; J. OOMS, de Chimay; A. PATERNOTTE, de Boussu; J. RASSE, de Méan; J. G. SERGERS, de Liège et Cl. VILLERS, de Hyon.

* *

*

Les solutions des problèmes que voici doivent me parvenir au plus tard deux mois après la parution de cette revue. Ces solutions peuvent être manuscrites, mais vous pouvez aussi les envoyer à mon adresse e-mail sous la forme d'un fichier $\text{\LaTeX}$ ou à défaut au format doc, pdf ou txt. Rédigez vos différentes solutions sur des feuilles séparées et n'oubliez pas d'indiquer votre nom sur chacune des feuilles.

352. Relativement premier

Soit la suite infinie $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$ où $n \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Déterminer tous les nombres entiers strictement positifs qui sont premiers avec tous les termes de cette suite.

353. Curieux triangle

Dans le triangle ABC , la hauteur, la bissectrice et la médiane issues du sommet A divisent l'angle $\widehat{A}$ en quatre parties égales. Déterminer les amplitudes des trois angles du triangle.

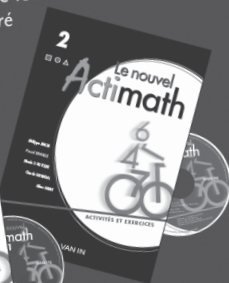
354. Cubes et carrés

Si la différence entre les cubes de deux entiers strictement positifs consécutifs est un carré, alors c'est le carré de la somme de deux carrés.

Le nouvel Actimath !

Au premier degré, Le nouvel Actimath se compose :

- > des 2 cahiers Activités et exercices avec leur CD-Rom
- > du référentiel Théorie du premier degré



*La collection de mathématique
incontournable du 1^{er} degré.*

**Réactualisé
l'année dernière,
il remporte un vif succès.**

Le nouvel Actimath
*le même mais en mieux
car arrivé à pleine maturité !*



Pour tout complément d'information, notre service clientèle est à votre disposition au 010 45 55 30 ou notre déléguée pédagogique au 0478 58 61 83

www.actimath.be

Olympiades

Claudine Festraets ⁽¹⁾

Voici les solutions des trois premiers problèmes proposés à l'Olympiade Internationale de Mathématique de 2007.

Problème 1.

Soit n nombres réels $a_1, a_2, \dots, a_n$. Pour chaque i ($1 \leq i \leq n$) on définit

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

et on pose

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Montrer que pour tous nombres réels $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$,

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \quad (\star)$$

(b) Montrer qu'il existe des nombres réels $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ tels que $(\star)$ soit une égalité.

Solution

Soit

$$d = d_q = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\} = a_k - a_t,$$

où

$$\begin{aligned} a_k &= \max\{a_i : 1 \leq i \leq q\}, \\ a_t &= \min\{a_i : q \leq i \leq n\}, \end{aligned}$$

et $k \leq t$.

Posons : $\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} = |x_p - a_p|$.

(a) D'abord, $|x_p - a_p| \geq |x_k - a_k| = |a_k - x_k|$ et $|x_p - a_p| \geq |x_t - a_t|$; en additionnant ces deux inégalités, il vient

⁽¹⁾ Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à Cl. FESTRAETS, Rue J.-B. Vandercammen 36, 1160 Bruxelles ou à l'adresse courriel hamoircl@brutele.be.

$$\begin{aligned}
|x_p - a_p| &\geq \frac{1}{2} (|a_k - x_k| + |x_t - a_t|) \\
&\geq \frac{1}{2} |a_k - x_k + x_t - a_t| \\
&\geq \frac{1}{2} |a_k - a_t| \quad (\text{car } t \geq k \Rightarrow x_t \geq x_k) \\
&\geq \frac{1}{2} d.
\end{aligned}$$

(b) Choisissons $x_i = \max_{1 \leq j \leq i} a_j - \frac{1}{2}d$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. On a bien

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n.$$

D'une part, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned}
x_i - a_i &= \max_{1 \leq j \leq i} a_j - \frac{1}{2}d - a_i \\
&= \left(\max_{1 \leq j \leq i} a_j - a_i \right) - \frac{1}{2}d \\
&\leq \left(\max_{1 \leq j \leq i} a_j - \min_{i \leq j \leq n} a_j \right) - \frac{1}{2}d \\
&= d - \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}d ;
\end{aligned}$$

d'autre part,

$$x_i - a_i \geq x_i - \max_{1 \leq j \leq i} a_j = -\frac{1}{2}d ;$$

d'où $|x_i - a_i| \leq \frac{1}{2}d$, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

En particulier,

$$|x_p - a_p| = \max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \leq \frac{1}{2}d,$$

et en vertu du (a), on a $|x_p - a_p| = \frac{1}{2}d$.

Problème 2.

On donne cinq points A, B, C, D et E tels que $ABCD$ soit un parallélogramme et $BCED$ un quadrilatère convexe, inscriptible. Soit l une droite passant par A . On suppose que l coupe l'intérieur du segment DC en F et coupe la droite BC en G . On suppose aussi que $EF = EG = EC$. Montrer que l est la bissectrice de l'angle $\widehat{DAB}$.

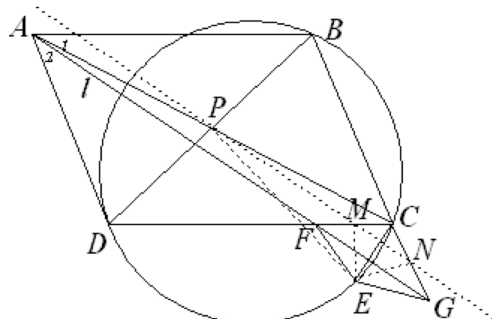
Solution

Soient M, N, P les milieux respectifs de $[CF]$, $[CG]$ et $[BD]$. Le point P est aussi le milieu de $[AC]$ car $ABCD$ est un parallélogramme.

Dans le triangle ACF , la droite PM qui joint les milieux des côtés $[AC]$ et $[CF]$ est parallèle à $AF = l$. Dans le triangle FCG , la droite MN qui joint les milieux des côtés $[FC]$ et $[CG]$ est parallèle à $FG = l$. Donc P, M et N sont alignés sur une parallèle à l .

Or les triangles CEF et CEG sont isocèles, donc $EM \perp DC$ et $EN \perp BC$ et dans le triangle inscrit BCD , la droite MN est la droite de Simson correspondant au point E du cercle. D'où $EP \perp BD$.

Le triangle BED est isocèle puisque EP est la médiatrice de $[BD]$, et on a $|BE| = |DE|$ et $\widehat{DBE} = \widehat{EDB} = \alpha$.



Or $\alpha = \widehat{DBE} = \widehat{DCE}$ et $\alpha = \widehat{EDB} = \widehat{GCE}$, donc les triangles isocèles FEC et CEG sont isométriques, $|FC| = |CG|$ et le triangle FCG est isocèle.

$\widehat{A_1} = \widehat{CFG}$ et $\widehat{A_2} = \widehat{CGF}$ (angles à côtés parallèles), d'où $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ et l est bien la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$.

Problème 3.

Dans une compétition mathématique certains participants sont des amis. L'amitié est toujours réciproque. Un groupe de participants est appelé une clique si toute paire d'entre eux est formée de deux amis. (En particulier, chaque groupe d'au plus un participant constitue une clique.) Le nombre de participants dans une clique est appelé sa taille.

On suppose que, dans cette compétition, la plus grande taille des cliques est paire. Montrer que les participants peuvent être répartis dans deux pièces de telle sorte que la plus grande taille des cliques contenues dans une de ces pièces soit égale à la plus grande taille des cliques contenues dans l'autre.

Solution

Soit $2n$ la plus grande taille des cliques. Désignons par A et B les deux pièces et par T_A , T_B la plus grande taille des cliques dans A et dans B respectivement.

Plaçons une des cliques de taille $2n$ dans A et toutes les autres dans B . Dans ce qui suit, nous noterons « a » chacun des éléments de la clique initiale dans A et « b » les autres éléments.

1. S'il existe deux ou plusieurs cliques de taille $2n$, alors $T_B = 2n$ et la proposition est démontrée.

2. S'il n'existe pas deux cliques de taille $2n$, toutes les tailles dans B sont strictement inférieures à $2n$.

- Si $T_B = 2n - 1$ et s'il existe au moins un élément « a » de A qui n'est pas ami avec tous les éléments d'une clique quelconque de taille T_B , transférons cet élément « a » de A dans B et il vient $T_A = T_B = 2n - 1$.

C'est le cas si la clique de taille $2n - 1$ de B est unique ; en effet, il est impossible que deux éléments de A soient amis avec les éléments d'une même clique de taille $2n - 1$, car en transférant ces deux éléments de A dans B , on obtiendrait alors une clique de taille $2n + 1 > 2n$.

S'il existe un élément « a » de A ami avec les éléments d'une clique C_1 de B et s'il existe dans B au moins deux cliques C_1 et C_2 de taille $2n - 1$, montrons qu'il existe au moins un élément « a' » de A qui n'est ami avec aucun des éléments d'aucune des cliques de taille $2n - 1$ de B . On sait déjà que comme « a » est ami avec tous les éléments de C_1 , « a' » ne peut l'être aussi. Si « a' » était ami avec tous les éléments de C_2 , en transférant « a » et « a' » de A dans B , nous obtiendrions ainsi deux cliques de taille $2n$, ce qui est faux par hypothèse. On peut donc transférer « a' » de A dans B sans modifier la plus grande taille dans B et on a $T_A = T_B = 2n - 1$.

- Si $T_B < 2n - 1$, déplaçons un à un les éléments « a » de A dans B jusqu'au moment où $T_A = k + 1$ et $T_B = k$.

Tous les « a » sont amis, donc, dans B , il existe à présent une clique composée uniquement des « a » qui ont été déplacés de A vers B . Cette clique ne peut être de taille k car $(k + 1) + k$ est impair, elle est de taille strictement inférieure à k et donc $2n - (k + 1) < k$, ce qui conduit à $n \leq k$.

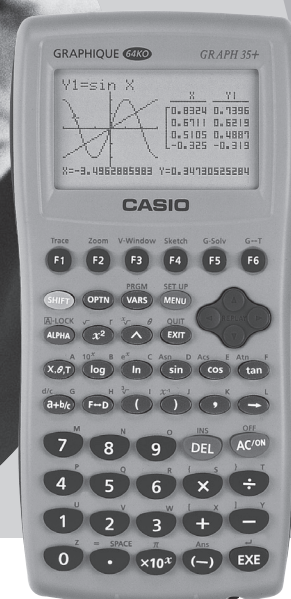
Une clique dans B de taille $T_B = k$ est soit composée de « a » et de « b », soit composée uniquement de « b ».

S'il existe dans B une clique K_1 de taille $T_B = k$ composée de « a » et de « b », il est impossible que tous les « a » encore situés dans A soient amis avec tous les « b » de cette clique car en transférant tous les éléments de A dans B on obtiendrait une clique de taille $k + (k + 1) = 2k + 1 > 2n$. Donc, il existe dans A au moins un élément « a » qui n'est pas ami avec les éléments « b » de K_1 . Appelons « a_1 » cet élément et transférons-le dans B .

S'il n'existe pas dans B d'autre clique de taille k que K_1 , alors $T_A = T_B = k$ et la proposition est démontrée.

Si « a_1 » est ami avec tous les éléments d'une autre clique K_2 de taille k , la taille de $K_2 \cup \{\text{« } a_1 \text{ »}\}$ est $k + 1$. Si K_2 ne contient que des « b », alors on transfère un élément quelconque « a » ($\neq \text{« } a_1 \text{ »}$) de B vers A et $T_A = T_B = k + 1$. Si $K_2 (\neq K_1)$ contient des « a » et des « b », il existe au moins dans K_1 un élément « a » qui n'est pas ami avec les éléments « b » de K_2 (si tous les « a » de K_1 étaient amis avec tous les « b » de K_2 , on aurait $K_1 = K_2$), on transfère cet élément dans A et $T_A = T_B = k + 1$; dans les deux cas, la proposition est démontrée.

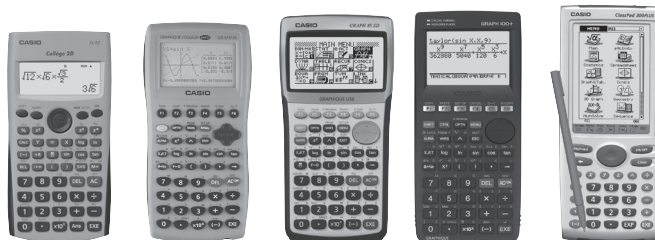
ENSEIGNEMENT SECONDAIRE



GRAPH 35+

DES CALCULATRICES ADAPTÉES À CHAQUE NIVEAU SCOLAIRE

- 9 modèles de calculatrices scientifiques et graphiques pour accompagner les élèves tout au long de leur scolarité
- Légères, solides et faciles à utiliser
- Tous les modèles scolaires sont garantis trois ans



CASIO
www.cas-bel.com

Le coin du trésorier

R. Scrève

Tarifs (Janvier 2008)

Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent *Mathématique et Pédagogie*, *SBPM-Infor* et les deux *Math-Jeunes*.

- Belgique :
 - Cotisation ordinaire : 24 € ;
 - Cotisation multiannuelle (5 ans) : 110 € ;
 - Cotisation familiale (réservée aux couples cohabitant ; les intéressés ne reçoivent qu'un exemplaire des publications, mais sont membres à part entière et participent donc aux élections) : 30 € ;
 - Cotisation réduite (réservée aux étudiants et aux sans-emploi) : 15 € ;
- Europe : 65 € (non-PRIOR), 72 € (PRIOR) ;
- Autres pays : 70 € (non-PRIOR), 79 € (PRIOR).

Abonnement à *Mathématique et Pédagogie*

- Belgique : 30 € ;
- Europe : 50 € (non-PRIOR), 54 € (PRIOR) ;
- Autres pays : 53 € (non-PRIOR), 58 € (PRIOR).

Anciens numéros :

- < 2006 : 0,75 €/n° + frais d'expédition.
- ≥ 2006 : 2,50 €/n° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : consulter le secrétariat.

Abonnement à *Math-Jeunes* ou *Math-Jeunes Junior*

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, supérieur et inférieur respectivement, sont idéalement pris de manière groupée par l'intermédiaire d'un professeur.

- Abonnements groupés (au moins 5) :
 - Abonnements groupés à une des revues (3 numéros) Belgique : 4 € ;
 - Abonnements groupés aux deux revues (6 numéros) Belgique : 8 €.

- Abonnements individuels :
 - Abonnements à une des revues (3 numéros)
Belgique : 6 € ;
France : 8 € (à prendre par l'intermédiaire de l'APMEP) ;
Europe : 18 € (non-PRIOR), 20 € (PRIOR) ;
Autres pays : 19 € (non-PRIOR), 22 € (PRIOR).
 - Abonnements aux deux revues (6 numéros)
Belgique : 12 € ;
France : 16 € (à prendre par l'intermédiaire de l'APMEP) ;
Europe : 24 € (non-PRIOR), 26 € (PRIOR) ;
Autres pays : 25 € (non-PRIOR), 28 € (PRIOR).

Anciens numéros :

- < 2006–2007 : 0,25 €/n° + frais d'expédition.
- ≥ 2006–2007 : 0,50 €/n° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : consulter le secrétariat.

Bulletin de l'APMEP

Les membres de la SBPMef peuvent, par versement à son compte, devenir membres de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (France). Le prix de l'abonnement est de 50 €. Ils recevront le *Bulletin* de l'APMEP, le BGV (*Bulletin à Grande Vitesse*) et *PLOT*.

Les membres de la SBPMef peuvent aussi commander par celle-ci les publications de l'APMEP ; ils bénéficient du prix « adhérents ».

Autres publications (brochures et CD-ROM)

Les prix indiqués sont les prix des publications ; les frais d'expédition (port et emballage) sont en sus. Les prix réduits sont réservés aux membres de la SBPMef ou de sociétés associées (comme l'APMEP) et aux étudiants. N'hésitez pas à consulter notre secrétariat ou à visiter notre site Internet.

Pour toutes nos publications non périodiques, à partir du dixième exemplaire, toute la commande bénéficie d'une réduction de 10 %.

Modalités de paiement :

Pour effectuer une commande, versez le montant indiqué sur un des comptes suivants :

- **Si vous habitez en Belgique** : Compte 000-0728014-29 de SBPMef.
- **Si vous habitez en France** : Compte CCP Lille 10 036 48 S de SBPMef.
- **Si vous habitez ailleurs** : Virement international sur l'un de nos deux comptes avec les références internationales suivantes :
CCP BELGIQUE : IBAN BE26 0000 7280 1429 / BIC BPOTBEB1
ou CCP LILLE :
IBAN FR68 2004 1010 0510 0364 8S02 683 / BIC PSSTFRPPLIL

	Prix plein	Prix réduit	Frais d'expédition
Séries RÉNOVER			
Série 1 (n° 12)	1 €	—	T ₁
Série 2 (n°s 7-11 & 13)	5 €	—	T ₂
Série 3 (n° 14)	5 €	—	T ₂
Les 3 séries	7,50 €	—	T ₂
Dossiers d'exploration didactique			
Dossier 2 : <i>Autour du PGCD</i>	1,80 €	1,20 €	T ₁
Dossier 3 : <i>Isomorphisme et Dimension</i>	1,80 €	1,20 €	T ₁
Dossier 6 : <i>Statistique</i>	7,40 €	6 €	T ₁ ⁽¹⁾
Dossier 7 : <i>Vers les infiniment petits</i> (Simone TROMPLER et Guy NOËL)	6 €	—	T ₁
Dossier 8 : <i>La démonstration en géométrie plane dans les premières années l'enseignement secondaire</i> (Claude VILLERS et al.)	9 €	—	T ₂ ⁽²⁾
Dossier 9 : <i>Des démonstrations à la rencontre des compétences à travers de thèmes</i> (Claude VILLERS et al.)	9 €	—	T ₂ ⁽²⁾
Dossier 10 : <i>Narrations de recherche — De la théorie à la pratique dans les enseignements secondaire et supérieur</i> (Jacques BAIR, Jean-Claude DELAGARDELLE, Valérie HENRY)	6 €	—	T ₁
Dossier 11 : <i>Enseignons en jouant</i> (B. HONCLAIRE, N. LAMBELIN, Y. & G. NOËL)	20 €	15 €	T ₂
Jacques BAIR, <i>Mathématique et Sport</i>	5 €	3,70 €	T ₁
François JONGMANS, <i>Eugène Catalan, Géomètre sans patrie, ...</i>	12 €	9,50 €	T ₂
G. ROBERT, CD-ROM, logiciels mathématiques	5 €	—	T ₁
Recueils de questions des OMB			
Tome 5	6 €	—	T ₁ ⁽¹⁾
Tome 6	6 €	—	T ₁ ⁽¹⁾
Tomes 5 & 6 ensemble	10 €	—	T ₁ ⁽¹⁾

⁽¹⁾ 2-3 ex. : T₂; 4-6 ex. : T₃; 7-12 ex. : T₄; au-delà : consulter le secrétariat.
⁽²⁾ 2 ex. : T₃; 3-4 ex. : T₄; au-delà : consulter le secrétariat.

Frais d'expédition (non-PRIOR)			
	Belgique	Europe	Autres pays
Tarif 1	1,80 €	4,50 €	6 €
Tarif 2	3,50 €	8,50 €	12 €
Tarif 3	5 €		
Tarif 4	7 €		

Pour les expéditions PRIOR : consulter le secrétariat.
Pour la définition d'« Europe », voir les tarifs postaux.
Pour tout problème, consulter le secrétariat.