Photo de couverture : Images d'arbres par projection centrale (Namur, janvier 2008) — Photo P. Dupont

Mathématique et Pédagogie

Sommaire

Articles

Rubriques

N° 167 **Mai – Juin 2008**

NOTE

- Toute correspondance concernant la revue doit être envoyée à l'adresse : Pascal Dupont, Rue du Stampia 77, B - 1390 Grez-Doiceau. Courriel : `pascal.dupont@ulg.ac.be`
- Les articles doivent concerner l'enseignement des mathématiques ou tout sujet s'y rapportant directement : mathématique *stricto sensu*, histoire des mathématiques, applications, expériences pédagogiques, &c.
- Les auteurs sont responsables des idées qu'ils expriment. Il sera remis gratuitement 25 tirés à part de chaque article publié.
- Les auteurs sont invités à envoyer leurs articles encodés sur un CD-rom ou par courrier électronique. L'usage de LaTeX est vivement recommandé ; d'autres traitements de texte ne devraient être utilisés que pour des textes ne comportant pas de formules ; dans ce cas, le format « texte seul » est finalement encore préférable. À défaut, les textes seront dactylographiés. *Les textes devant être réencodés, en tout ou en partie, risquent de voir leur délai de parution allongé de manière appréciable.*
- Si l'article en contient, la qualité des figures est extrêmement importante. Elles devraient être réalisées selon l'une des modalités suivantes, dans l'ordre des préférences décroissantes : l'usage, dans le texte, de l'environnement « tikzpicture » (défini dans le paquet « tikz ») ; l'inclusion de fichiers externes, au format PDF ou JPEG (éviter les compressions trop importantes) : le PostScript devra être converti ; dans le cas d'un article envoyé sur papier, des documents de bonne qualité et prêts à être scannés.
- L'auteur mentionnera dans l'article ses prénom, nom et adresse (personnelle ou professionnelle) ainsi que l'institution où il travaille et, éventuellement, une liste de mots clés (10 maximum).
- La bibliographie doit être réalisée suivant les exemples ci-dessous.
  Pour les livres :
  Dieudonné J., *Foundations of Modern Analysis*, New York et Londres, Academic Press, 1960, 361 pp.
  Pour les articles :
  Gribaumont A., Les structures de programmation, *Mathématique & Pédagogie*, **36** (1982), 53–56.
- Les manuscrits n'étant pas rendus, l'auteur est prié de conserver un double de son article pour corriger l'épreuve qui lui sera envoyée ; il disposera d'un délai maximum de 10 jours pour ce faire.
- MM. les éditeurs qui veulent faire parvenir leurs ouvrages en service de presse pour recension doivent envoyer ceux-ci au rédacteur en chef.

Éditeur responsable : Pascal Dupont, Rue du Stampia 77, 1390 Grez-Doiceau.
Publié avec l'appui de l'Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Service général du Pilotage du système éducatif.

Éditorial

GÉRALD TROESSAERT

En cette année 2008, l'histoire de *Mathématique et Pédagogie* est longue de 55 ans. En effet, le premier numéro est sorti de presse en 1953 sous le nom de *Mathematica et Pædagogia*. La société des professeurs de mathématique était nationale, sa revue aussi. En 1975, séparation linguistique oblige, la société devient d'expression française et la revue prend le nom de *Mathématique et Pédagogie*. Après soixante-trois numéros de *Mathematica et Pædagogia*, vous avez en main le cent soixante-septième numéro de *Mathématique et Pédagogie*, soit un total de deux cent vingt-neuf revues pour plus de mille articles.

La SBPMef publie aussi les deux revues *Math-Jeunes* et *Math-Jeunes junior* à destination des élèves. Début 2006, les rédacteurs en chef de ces différentes revues ont souhaité passer la main, après de nombreuses années d'un investissement remarquable. D'autre part, il devient de plus en plus difficile d'obtenir des articles de qualité en suffisance, les auteurs se faisant de plus en plus rares. Le nombre d'abonnés aux différentes revues est en baisse et les frais d'impression et d'envoi sont de plus en plus lourds. On peut légitimement se poser la question de savoir si, dans ce monde dominé par l'audio-visuel, la communication papier a encore un sens. La SBPMef n'échappe pas à cette évolution de la société qui touche aussi nos associations sœurs en Belgique ou à l'étranger. On peut constater que beaucoup d'entre elles se sont tournées vers le bulletin électronique.

Lors de l'assemblée générale d'aout 2006, le besoin d'une réflexion sur la politique éditoriale de la société est évoqué et une commission de réflexion est créée. Elle s'est réunie pour la première fois le lundi 23 octobre 2006. Il est apparu rapidement que l'on ne pouvait pas faire l'économie d'une étude globale de la communication de notre société et le conseil d'administration a donné pour mission à la commission de prendre en charge tout ce qui concerne celle-ci, y compris la réflexion sur le site internet et les problèmes liés aux différentes publications. À l'issue de ses travaux, la commission devra remettre un avis d'orientation.

Les premiers travaux de la commission débouchent sur des questions plutôt que sur des réponses aux questions posées.

- Faut-il maintenir une revue destinée aux enseignants ?
- Faut-il maintenir une ou des revues destinées aux élèves ?
- Faut-il continuer à publier sur support papier ? Faut-il envisager de publier sur internet ? Ou les deux ?
- Serait-il intéressant de coordonner les publications à destination des élèves avec *Mathématique et Pédagogie* ?
- Les livrets consacrés au Rallye Mathématique Transalpin et à destination des instituteurs doivent-ils être étendus vers d'autres enseignants ?
- Doit-on envisager des collaborations avec d'autres publications telles *Math-École* ou les revues de l'APMEP ?
- Quels services voulons-nous rendre à nos membres ?
- Comment peut-on apporter un soutien aux professeurs de mathématique, nouveaux dans le métier et parfois moins préparés à celui-ci ?
- Comment professionnaliser la réalisation des revues ?

Au fil des réunions, des règles générales se dégagent. La SBPMef doit garder un lien papier avec ses membres. La société doit promouvoir le développement de la culture mathématique des élèves ; il est indispensable de publier à leur destination. Internet est un média incontournable ; la société doit s'engager dans la modernisation du site et développer des interactions fortes entre celui-ci et les publications. Des collaborations avec d'autres revues peuvent être envisagées mais la société doit garder sa propre revue. Une publication unique pour tous les enseignants doit être préférée à une publication par niveau d'enseignement.

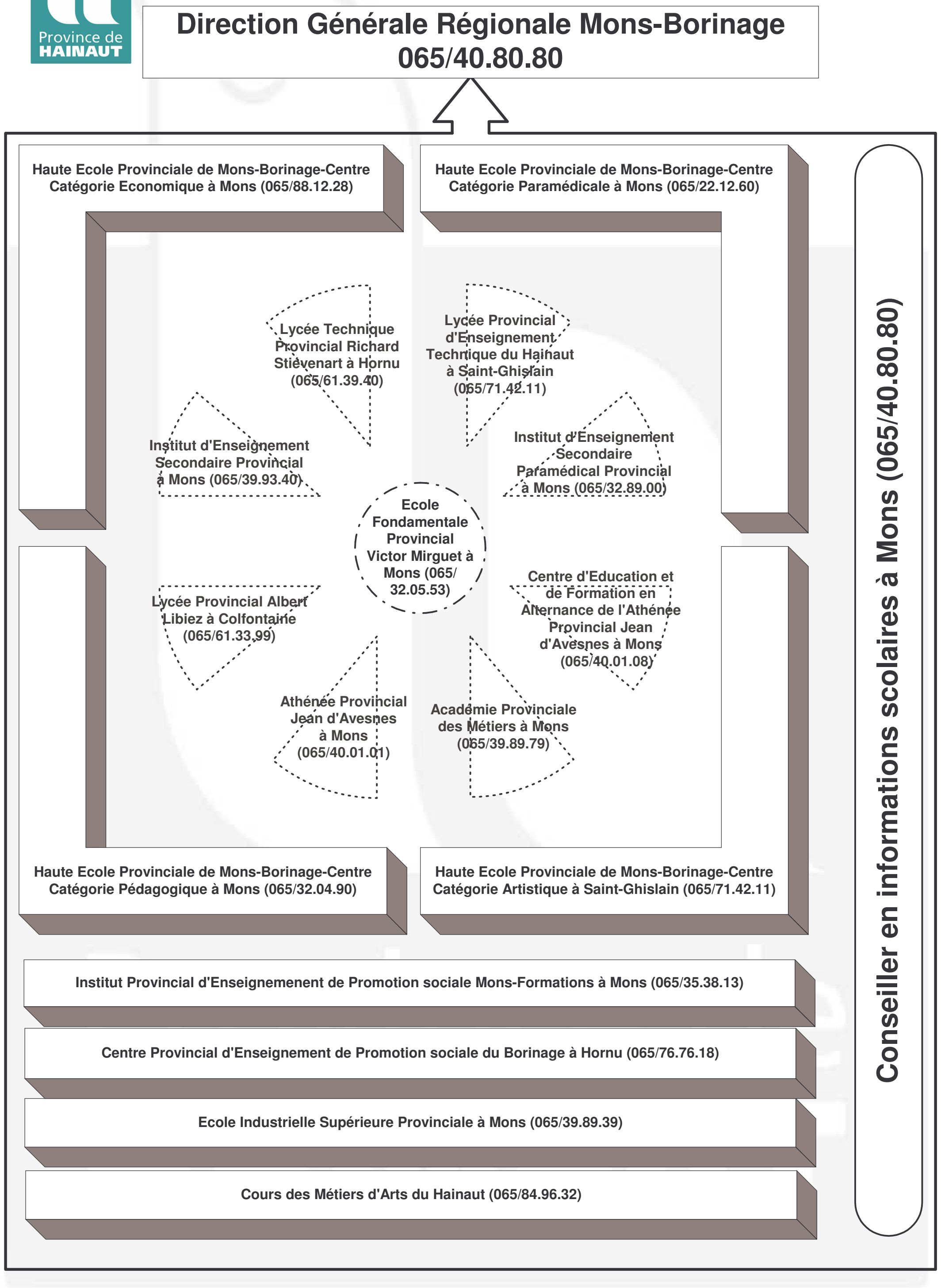
De plus, de petits sondages auprès de lecteurs montrent que les enseignants sont au moins aussi intéressés par *Math-Jeunes* que les étudiants. Il est donc intéressant d'évoluer vers une publication destinée aux enseignants et contenant des éléments destinés aux élèves.

Finalement, après de nombreux et longs débats, la commission propose au comité de la SBPMef de réaliser une revue périodique unique (cinq numéros par an) qui soit commune aux élèves et aux professeurs. Le cloisonnement entre les élèves et les professeurs mais aussi entre les professeurs des différents niveaux sera ainsi évité. Chaque enseignant, quel que soit le niveau où il exerce, primaire, secondaire (inférieur ou supérieur), supérieur, devra pouvoir y trouver des articles le concernant mais aussi avoir accès aux articles consacrés aux autres niveaux. Des sections à destination des élèves seront incluses dans la revue. Elles pourront être dupliquées en vue d'une utilisation en classe ou simplement proposées aux étudiants intéressés. Un recueil annuel de ces articles destinés aux élèves pourrait être remis aux demi-finalistes de l'Olympiade Mathématique Belge.

Vous tenez donc en main le dernier numéro de *M&P* ancienne formule. Une page se tourne et un monde nouveau s'ouvre. La nouvelle revue, dont le titre, *Losanges*, vient d'être décidé, vous parviendra au mois de septembre, pour accompagner la nouvelle année scolaire. Les problèmes ne sont pas pour autant entièrement résolus et de grands défis se profilent. Réussira-t--on l'articulation de cette nouvelle publication qui séduit par les possibilités d'interactions qu'elle offre, par exemple un sujet pour les élèves et son écho didactique pour les enseignants ou un sujet de leçon pour les enseignants et des applications ludiques coordonnées pour les élèves, le tout dans un même document ? Comment réaliser les interactions avec le site internet ? De plus, le lancement d'une nouvelle revue, même si elle en remplace trois, ne résout pas le problème du manque d'articles. Le succès de celle-ci va dépendre de la qualité des textes qui sont soumis et de leur diversité. C'est ici qu'en tant que membre de la société vous pouvez nous aider à faire de cette nouvelle revue un outil de référence pour tous nos collègues enseignant les mathématiques.

Cet éditorial est donc aussi un appel. Le conseil d'administration tente de s'adapter aux impératifs de l'époque. Ainsi, le site internet retrouve un dynamisme qu'il avait perdu mais certaines fonctionnalités telles que le forum ne peuvent fonctionner que grâce à votre contribution. En ce qui concerne la nouvelle revue, le conseil d'administration souhaite que les membres se l'approprient en proposant de nombreux articles. De par son objectif, la revue accueillera des articles de natures très variées à destination d'un public multiple. Soyez courageux et participez à notre aventure. Les responsables de l'édition de la nouvelle revue sont enthousiastes, votre contribution fera le reste.

Enseignement de la Province de Hainaut
Région Mons-Borinage



Un mot du rédacteur en chef

PASCAL DUPONT

Ce numéro de *M&P*, le cent soixante-septième du nom, est le donc dernier de sa lignée. Mais les publications de la SPBMef ne meurent pas, elles muent ; elles muent dans l'espoir de rencontrer plus encore les souhaits et les besoins de ses membres. Notre président s'en est expliqué dans les pages précédentes et il n'est pas nécessaire que j'y revienne davantage. Quoi qu'il en soit, bienvenue à *Losanges* et bon vent à son équipe — qui pourra toujours compter sur moi.

Cet ultime *M&P* est, pour l'essentiel, constitué de reprises d'anciens articles. Cela m'a semblé une manière de faire un bilan, de jeter un coup d'œil rétrospectif sur le contenu des nombreuses pages publiées.

Pédagogie et mathématique au sommaire de ce numéro. Pour une fois, les préséances sont bousculées. L'article collectif *Quelle philosophie pour l'enseignement des mathématiques au secondaire ?* date d'une époque bouillonnante — vu d'ici, un vrai petit Mai '68. Certaines A.G. de notre Société, à l'époque, ont été animées ! Le nombres de participants extérieurs au C.A. ne se limitait pas à 3, comme samedi dernier, mais se comptait en nombreuses dizaines. Le rapport « Danblon », le *Livre blanc*, ont été des jalons importants. Le premier article que je vous propose procède du même état d'esprit. A-t-il perdu de sa pertinence ou de son actualité ? À vous de voir…

Le second des textes que j'ai exhumés pour vous pourrait, pour mieux se vendre, être flanqué du sous-titre *PISA avant PISA*. Eh oui, les classements inter-nationaux des élèves sont plus anciens que cette enquête devenue célèbre. À l'heure où les lamentations sont unanimes, où les enquêtes se confirment l'une l'autre, un petit regard dans le rétroviseur est peut-être utile.

Enfin, Luc Lemaire nous offre un texte mathématique. Oh, pas l'article de recherche, dont la lecture serait réservée à quelques initiés, qu'il aurait — évidemment — pu écrire. Plutôt, un plaidoyer pour les mathématiques. Montrer qu'elles sont actuelles et qu'elles sont utiles, c'est l'objectif de l'auteur. Et surtout montrer qu'elles sont vivantes... tellement vivantes qu'elles se rebellent lorsque L. Lemaire tente de les « archiver » dans un texte : les lecteurs fidèles et collectionneurs pourront retourner à l'année 1988 pour retrouver la première version du texte, à laquelle il est fait allusion ([1]). Et seuls les mauvais esprits imagineront que je republie ce texte pour inciter Luc Lemaire à l'actualiser à nouveau...

À l'heure de recentrer mon travail au sein de la SBPMef vers des activités plus « olympiques » ([2]), je voudrais remercier tous les auteurs avec qui j'ai eu le plaisir — vraiment, ce n'est pas une formule — de dialoguer pour que la présentation de leur texte soit la plus satisfaisante possible. Et je voudrais, une dernière fois, vous présenter mes excuses, chers lecteurs, pour mes retards devenus hélas coutumiers.

([1]) *M&P* n° 66, mars-avril 1988, pp. 5–28.
([2]) Non, je ne pas pas pour Pékin.

Quelle philosophie pour l'enseignement des mathématiques au secondaire ?

COMMISSION PÉDAGOGIQUE

Repris de *M&P* n° 102, mai–juin 1995

En cette période de modifications profondes de l'enseignement de la mathématique en Communauté Française de Belgique, le Conseil d'Administration de la SBPMef a estimé souhaitable qu'ait lieu une réflexion approfondie sur les grandes orientations de cet enseignement. Il estime aussi que cette réflexion ne peut être le seul fait ni de la SBPMef ni même de l'ensemble des professeurs de mathématique. Pourraient et devraient y être associés d'autres milieux tels que les diverses composantes de la communauté mathématique belge (Société Mathématique de Belgique, Comité National de Mathématiques, Centre de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques, divers groupes universitaires, des représentants des mathématiciens non enseignants, ...) ainsi que des responsables de l'enseignement des différents réseaux, des représentants des utilisateurs de mathématique, etc.

Le texte qui suit a été élaboré par la Commission Pédagogique de la SBPMef, soumis à une assemblée générale en mars 1994 et amendé dans le but de tenir compte des opinions émises lors de cette réunion. Il a été approuvé par le Conseil d'Administration en sa séance du 25 janvier 1995. Il doit être considéré non comme la conclusion d'un débat d'idées mais comme une contribution à la réflexion souhaitée. La SBPMef a l'espoir que d'autres organismes parmi ceux mentionnés plus haut, ou même éventuellement des groupes informels, examineront à leur tour les problèmes de fonds posés par l'enseignement de la mathématique en cette fin du deuxième millénaire, et feront connaître leurs points de vue. Elle est prête, par ses différentes publications, à diffuser les documents cohérents et substantiels qu'elle recevrait, même si leur contenu devait s'opposer à ses propres prises de position.

1. Introduction

Bien que la SBPMef considère depuis longtemps que les réformes de contenu des programmes ne sont ni nécessaires ni suffisantes pour améliorer l'enseignement des mathématiques, face à la modification des grilles horaires

Les réformes de contenu des programmes ne sont ni nécessaires ni suffisantes pour améliorer l'enseignement des mathématiques.

mises en application dernièrement, elle doit se rendre à l'évidence : une révision des programmes de toutes les sections de l'enseignement secondaire, voire (par ricochet) de l'enseignement supérieur semble inévitable. Il convient de se demander comment devrait s'orienter une telle réforme des programmes, et comment, par qui, elle devrait être menée.

Dans son rapport, la Commission Danblon considérait que l'élaboration d'un programme de mathématique ne pouvait être réalisée seulement par les actuelles commissions de programmes. Celles-ci devraient *être entourées par des équipes attachées à produire des curriculums* (1)*, et recourir tout au long de leurs travaux à des mathématiciens professionnels et à des utilisateurs de mathématiques issus du milieu de l'industrie et des affaires.*

Dans l'optique de la Commission Danblon, on peut penser que l'élaboration de nouveaux programmes devait être précédée d'une réflexion aussi large que possible sur leur philosophie et leur contenu. Les questions qui se posent sont simples à énoncer : *quelle est la finalité de l'enseignement des mathématiques dans le secondaire ? Quelle philosophie doit sous-tendre cet enseignement ? En particulier, quels sont les objectifs de comportement et de connaissance qu'il convient d'attribuer à la formation mathématique des différentes filières de l'enseignement secondaire ?*

Tout citoyen aura probablement des réponses à ces questions. Même en se limitant au milieu professionnel des enseignants de mathématique, les réponses individuelles seront très souvent contradictoires. C'est bien pourquoi la réflexion et la discussion ne peuvent être escamotées. Les questions posées sont délicates, complexes. Les réponses à retenir ne peuvent être sommaires. Il faut viser à aboutir à une synthèse cohérente des idées émises et non à la rédaction de textes qui soit les reprendraient toutes, soit ne retiendraient que celles qui seraient partagées par une écrasante majorité.

(1) Nous renvoyons pour la définition de ce terme au point 5.2 du rapport Danblon.

2. Mathématique et société

La généralisation de l'enseignement secondaire à l'ensemble de la population est une des réformes les plus importantes intervenues dans le système éducatif dans les cinquante dernières années. De plus en plus, une scolarité de niveau secondaire sera indispensable à l'intégration sociale du jeune. On ne peut pas ne pas tenir compte de cette donnée sociologique essentielle lors d'une réflexion sur l'enseignement des mathématiques.

Le problème est donc de savoir ce que le cours de mathématique va apporter aux jeunes ; à *tous* les jeunes, aussi bien à ceux qui ne poursuivront pas d'études au delà de l'enseignement secondaire (voire qui n'achèveront pas ce cycle d'études) ou dont les activités ultérieures ne nécessiteront guère de connaissances mathématiques, qu'à ceux qui s'orienteront vers une carrière scientifique ou technique comportant une composante mathématique importante.

Pour tous nous pensons que le principal apport de l'enseignement des mathématiques doit se situer au niveau des comportements et de la culture générale.

Le principal apport de l'enseignement des mathématiques doit se situer au niveau des comportements et de la culture générale.

Apprendre aux jeunes à aborder un problème — relevât-il même d'un domaine non scientifique — de façon ordonnée, méthodique, sans se laisser guider par des *a priori*, des slogans, sans pratiquer l'à-peu-près, serait leur donner une rigueur intellectuelle et une confiance en eux-mêmes les aidant à jouer un rôle constructif dans une société qui n'a que trop tendance à pratiquer des analyses sommaires, des amalgames et des simplifications abusives. Leur apprendre à choisir un moyen d'expression adéquat (dans certains cas, la langue française) et à traduire une idée d'un langage dans un autre est également un objectif essentiel.

En ce qui concerne la culture générale, on pourrait explorer des thèmes ayant joué un rôle important dans le développement de la pensée humaine. À titre d'exemple, l'histoire des tentatives de démonstration du postulat d'Euclide permet de retracer l'évolution de la notion de rigueur. Elle est aussi l'occasion de pratiquer la géométrie et donc de résoudre des problèmes.

Pour les jeunes dont les activités ultérieures ne nécessiteront que peu de connaissances mathématiques, le choix des matières à enseigner n'a pas de caractère crucial.

Les principes qui viennent d'être énoncés sont selon nous valables pour tous les jeunes, y compris ceux des sections professionnelles et ceux des sections non scientifiques des autres filières de l'enseignement secondaire. Il est clair que si les mêmes principes sont d'application dans des contextes aussi différents, la façon de les appliquer devra tenir compte de situations concrètes extrêmement différentes et que bien des problèmes se posent pour lesquels nous n'avons pas nécessairement de solutions.

Pour les jeunes dont les activités ultérieures ne nécessiteront que peu de connaissances mathématiques, le choix des matières à enseigner n'a pas de caractère crucial, mises à part sans doute les notions absolument indispensables à l'insertion sociale du citoyen parmi lesquelles nous rangerions les fondements des statistiques. Par contre, pour les autres, il convient en plus de veiller à ce que l'utilité réelle pour les applications constitue un des critères de choix des matières enseignées.

Pour les autres, il convient en plus de veiller à ce que l'utilité réelle pour les applications constitue un des critères de choix des matières enseignées.

3. Du point de vue des comportements

3.1. Méthode axiomatique et pédagogie des situations

La SBPMef s'est prononcée depuis plusieurs années pour une pédagogie incluant comme une de ses méthodes essentielles, mais non exclusive, la pédagogie des situations, basée sur des résolutions de problèmes. Les situations peuvent être d'origine extra-mathématique auquel cas on pratiquera l'interdisciplinarité, ou d'origine mathématique. De cette façon les élèves comprendront ce que sont les mathématiques, à quoi elles peuvent servir, et comment on s'en sert.

L'objectif de comportement que nous attribuons à l'enseignement des mathématiques au secondaire, et qui est valable quelle que soit la filière d'enseignement, porte un nom : *l'apprentissage de la méthode axiomatique*..

L'objectif de comportement que nous attribuons à l'enseignement des mathématiques au secondaire, et qui est valable quelle que soit la filière d'enseignement, porte un nom : *l'apprentissage de la méthode axiomatique.* La méthode axiomatique est pour le mathématicien ce que la méthode scientifique est pour le physicien ou le chimiste. C'est une façon d'aborder rationnellement les situations problématiques, d'analyser les données et les questions, de mobiliser en fonction de celles-ci des connaissances théoriques susceptibles d'être utiles, puis de concevoir une stratégie de résolution. C'est bien un objectif valable pour tous les élèves.

Précisons bien que NOUS N'ENTENDONS PAS PAR MÉTHODE AXIOMATIQUE la *mise en forme, suivie de l'exposé purement déductif d'une théorie déjà élaborée.* Dans une telle activité, l'essentiel du travail est réalisé par l'enseignant, qui commence par dégager d'une masse de résultats connus ceux d'entre eux susceptibles d'être acceptés sans démonstration, puis qui structure la matière de façon que tout énoncé vrai s'obtienne à partir des précédents par les seules règles de la logique. Si des exposés de ce type sont utiles et même indispensables au mathématicien professionnel qui doit contrôler strictement la correction de son travail, ils ne peuvent généralement pas être recommandés dans l'enseignement secondaire car ils ne permettent à l'élève ni de participer personnellement à l'élaboration de nouveaux concepts ou à la découverte de nouvelles propriétés, ni de le motiver pour l'étude d'un sujet déterminé. La mathématique lui apparaît alors comme une activité gratuite et finalement peu intéressante.

Bien au contraire la méthode axiomatique que nous préconisons doit donner l'occasion à tout élève de s'approprier la mathématique grâce à une activité motivante et significative. Il s'agit de lui apprendre à modéliser une situation posant problème, à développer le modèle, puis à comparer les résultats obtenus au problème de départ afin de vérifier que la modélisation

La méthode axiomatique que nous préconisons doit donner l'occasion à tout élève de s'approprier la mathématique grâce à une activité motivante et significative.

était satisfaisante. Si elle ne l'est pas, le modèle doit être soit rejeté, remplacé par un autre, soit affiné, perfectionné.

L'usage de l'expression « méthode axiomatique » se justifie par le fait que la modélisation d'une situation comporte la mise en évidence des propriétés fondamentales de la situation étudiée, celles que l'on essaie de placer à la base de la résolution du problème posé et qui de ce fait joueront le rôle d'axiomes pour une mini-théorie qui reste à construire. À titre d'exemple (très simple !), si un problème d'algèbre élémentaire se traduit en un système de deux équations linéaires à deux inconnues, nous pouvons considérer le système comme un modèle du problème, et les équations elles-mêmes comme les axiomes du modèle. Dans ce cas, résoudre le système consiste bien à rechercher certaines conséquences des axiomes.

La phase de modélisation est une phase de recherche, d'induction, de manipulation, de bricolage. Elle nécessite de l'imagination. C'est sans doute la plus difficile. Et c'est bien pourquoi on ne la rencontre que trop peu dans les classes. Et cependant, c'est vraisemblablement la plus importante ! Si vous pouvez mettre un problème en équation, une machine pourra éventuellement la résoudre. Mais si vous n'avez pas appris à la construire ?

La phase de modélisation est en particulier une phase d'abstraction. Nous devons ici nous inscrire en faux contre une opinion assez répandue ([2]) selon laquelle il convient de proscrire l'abstrait au profit du concret. Construire un modèle mathématique d'une situation (qu'elle soit elle-même extra-mathématique ou non) nécessite de distinguer parmi les éléments de la situation ceux qui seront utiles pour résoudre le problème posé et que la maturité des élèves permet de prendre en charge. On fait donc abstraction de certains éléments. Ainsi, le modèle abstrait n'est pas plus compliqué, mais plus simple que la situation de départ. S'il ne l'était pas, il serait inutilisable.

Ce qui peut être assez difficile pour l'élève, ce sont les processus d'abstraction et de modélisation eux-mêmes, plus que le modèle abstrait qui en résulte. Ces processus nécessitent des qualités d'*analyse* pour disséquer la situation donnée en éléments constitutifs, discerner ceux qui sont pertinents, détecter les relations qui les unissent. Ils nécessitent des qualités de *synthèse* pour reconstituer ces éléments, dépouillés du superflu, en un modèle cohérent et efficace. L'élève qui a participé activement à l'élaboration du modèle, qui en a suivi les différentes étapes, qui les a comprises, intégrées

([2]) et qui provient en partie de ce que les mots « abstrait » et « concret » sont employés couramment dans des sens différents à ses démarches mentales, celui-là a accompli la plus grande partie du travail nécessaire.

L'abstraction et la modélisation sont des activités fondamentales de l'être humain. Un entrepreneur pourrait-il construire une maison sans en avoir au préalable fait établir des plans ? Ceux-ci constituent bien une modélisation abstraite d'un bâtiment qui n'existe même pas encore ! L'enseignement des mathématiques ne peut éviter de pratiquer la pédagogie des situations avec les démarches de modélisation que cela comporte.

Traduire un problème en équation, exécuter une représentation graphique (de type quelconque : arbre, diagramme de Venn, figure géométrique, ...), programmer un calcul, dresser un tableau, sont des exemples de démarches qui peuvent intervenir lors d'une modélisation. Cette liste pourrait être allongée. Les activités à soumettre aux élèves doivent tenir compte de leur développement intellectuel. Nous n'avons malheureusement pas d'outil très précis pour mesurer celui-ci. Et nous percevons parfois mal quelles démarches mentales doivent être mises en œuvre pour résoudre un problème donné, ou quelles difficultés présente l'apprentissage d'une théorie particulière. Analyser ces démarches mentales et ces difficultés est un des objectifs de la recherche en didactique des mathématiques.

Il paraît toutefois clair qu'avec de jeunes élèves, les situations à explorer doivent être élémentaires mais non simplistes. Leur modélisation peut se réduire à l'une des démarches mentionnées plus haut. Plus tard, plusieurs démarches de ce type devront être combinées, des analogies avec d'autres situations déjà rencontrées pourront être exploitées. Progressivement les problèmes proposés augmenteront en complexité et demanderont de plus en plus de connaissances préalables.

La phase de modélisation est aussi une phase de *formalisation*. On ne fait pas d'abstraction sans un certain formalisme. Un plan d'architecte, une carte de géographie, un schéma électrique utilisent aussi des conventions. Le formalisme n'a pas été inventé pour compliquer la vie des élèves, mais au contraire pour simplifier la vie de tous. Ce que nous n'acceptons pas, c'est le formalisme qui ne recouvre pas un vécu, c'est le formalisme creux, sans subs-

Nous percevons parfois mal quelles démarches mentales doivent être mises en œuvre pour résoudre un problème donné, ou quelles difficultés présente l'apprentissage d'une théorie particulière.

tance, le formalisme dont l'élève ne voit pas l'utilité. Le formalisme inventé lors de l'étude d'une situation sert de support aux idées. Ce qui est difficile, c'est d'avoir des idées, puis de trouver un moyen de les exprimer. Parfois l'élève est ainsi amené à inventer son propre formalisme, qui sera peut-être assez maladroit mais qui l'aidera à réfléchir, à comprendre, à travailler. La réflexion, les discussions avec d'autres élèves, l'intervention du professeur feront évoluer le formalisme utilisé, qui sera de mieux en mieux adapté à la situation considérée. Finalement, il ne sera pas difficile à l'enseignant de substituer le formalisme standard à celui qui aurait été inventé par l'élève, tout en en conservant la signification.

L'assimilation progressive du formalisme mathématique, organisée de façon que ce formalisme soit porteur de sens, met l'élève en possession d'un puissant moyen d'expression. La méthode axiomatique utilise la mathématique comme langue pour analyser, interpréter et comprendre le milieu. On rejoint ainsi l'usage fait de la mathématique par les autres disciplines. Celles-ci peuvent fournir au cours de mathématique des situations à étudier, permettant de montrer l'intérêt et la puissance d'une théorie mathématique particulière. Un cours de mathématique conçu de cette façon débouche inévitablement sur l'interdisciplinarité et sur le décloisonnement dans l'esprit de l'élève des matières vues aux cours de mathématique, de physique, d'histoire, …

Une fois une situation traduite en un modèle mathématique, le développement du modèle constitue un travail plus classique. Théorèmes, applications, cas particuliers, exemples, calculs, raisonnements logiques, constructions, … Ces différentes activités ne peuvent non plus être négligées. Elles permettent d'aboutir à la solution du problème posé. Sans un minimum de compétence et d'habileté, le résultat ne sera pas fiable, même si les idées de départ étaient géniales !

La troisième phase de la méthode axiomatique, la comparaison des résultats obtenus au problème de départ, est tout aussi indispensable. Elle permet de décider si le modèle est à rejeter, ou s'il est acceptable soit tel quel, soit après avoir été affiné. Elle comporte notamment l'analyse des résultats et leur interprétation, y compris une éventuelle composante subjective (par exemple en statistique).

Pour la commodité, on a découpé ci-dessus la méthode axiomatique en trois phases. C'est déjà une simplification, un modèle (abstrait) de la réalité, laquelle est plus complexe : les trois phases peuvent se mêler, on peut être amené à rebondir de l'une à l'autre …

Il est impératif que les futurs professeurs soient confrontés à la pédagogie des situations tout au long de leurs études.

3.2. La mise en pratique de la pédagogie des situations

Si les principes de la pédagogie des situations font l'objet d'un consensus de plus en plus large, on doit reconnaître que sa mise en pratique se heurte encore trop souvent à des contraintes matérielles de divers types. Les difficultés soulevées ci-dessous sont loin d'être toutes d'ordre scientifique ou pédagogique. Elles n'en sont pas moins bien réelles et risquent de contrarier la réalisation des objectifs que nous attribuons à l'enseignement des mathématiques au secondaire. Certaines nécessitent des réponses que seules les autorités de l'enseignement peuvent apporter.

1. La mise en pratique de la pédagogie des situations nécessite de la part de l'enseignant à la fois une plus grande compétence scientifique et une plus grande compétence pédagogique. Il doit pouvoir faire face à des situations imprévues, amenées par le développement de la recherche des élèves.

   Ce point soulève — une fois de plus — la question de la formation initiale et continuée des professeurs de mathématique. Il est impératif que les futurs professeurs soient confrontés à la pédagogie des situations tout au long de leurs études. Ils seront ainsi familiers avec une méthodologie qu'on leur demandera d'appliquer lorsqu'ils seront enseignants.

   Il est tout aussi indispensable que tout enseignant puisse se remettre en question et réfléchir à sa propre pratique pédagogique. Il ne pourra le faire s'il n'a été initié lors de ses études à la réflexion épistémologique et à la réflexion sur les principes philosophiques qui sous-tendent une pédagogie.

   Enfin, pratiquer un enseignement de qualité suppose des enseignants motivés, exerçant leur métier avec le minimum de liberté et de stabilité qui leur permet d'exprimer leur créativité et leur esprit de recherche.

Pratiquer un enseignement de qualité suppose des enseignants motivés, exerçant leur métier avec le minimum de liberté et de stabilité qui leur permet d'exprimer leur créativité et leur esprit de recherche.

Le système scolaire doit encourager ses éléments les plus dynamiques.

2. La mise en pratique de la pédagogie des situations nécessite une documentation importante, qui existe mais est souvent mal connue et peu accessible aux enseignants. Nous tenons à rappeler ici une suggestion inscrite dans le livre blanc de la SBPMef ([3]), consistant à créer dans les écoles des postes de coordonnateurs pédagogiques dont une des fonctions serait d'informer leurs collègues de la documentation disponible et notamment des nouvelles publications. De plus, des équipes devraient se consacrer à l'élaboration de recueils de situations.

3. La pratique de la pédagogie des situations est de nature à remettre en cause les techniques d'évaluation des élèves. Etant donné que le système d'évaluation conditionne grandement le système d'enseignement, cette question ne peut être sous-estimée. Citons quelques rubriques qui pourraient être évaluées dans le cadre d'une pédagogie des situations :

   (a) La lecture des données ;

   (b) La correction, la clarté et l'utilité des schémas réalisés ;

   (c) La disponibilité des connaissances théoriques susceptibles d'aider à la résolution d'un problème ;

   (d) La communication des démarches qui ont été effectuées et la présentation des résultats.

   Ces quelques idées n'épuisent certainement pas le problème de l'évaluation. La SBPMef compte bien approfondir sa réflexion à cet égard.

4. Il est généralement admis que la pratique de la pédagogie des situations nécessite plus de temps que la pédagogie traditionnelle. À une époque où les horaires des élèves ont plutôt tendance à se contracter, cette constatation peut faire craindre une diminution de la formation globale des élèves. Il est d'autant plus nécessaire pour le cours de mathématique de choisir des sujets à enseigner particulièrement importants, et de ne pas simplement ajouter les objectifs de la pédagogie des situations à ceux de pédagogies plus traditionnelles.

   Par ailleurs, on considère aussi que les notions mathématiques sont mieux assimilées, donc nécessitent moins de rappels, lorsqu'elles se raccrochent à des problèmes qui leur donnent du sens.

5. La pédagogie des situations doit être complétée par des mises au point, des synthèses, qui permettent aux élèves de structurer leur savoir et

([3]) ¿ *Enseigner la mathématique ?*, SBPMef, 1991, pp. 23–26.

On considère aussi que les notions mathématiques sont mieux assimilées, donc nécessitent moins de rappels, lorsqu'elles se raccrochent à des problèmes qui leur donnent du sens.

de se munir de points de repères. C'est évident : pas plus qu'aucune autre méthode pédagogique, la pédagogie des situations n'est une panacée universelle. Ne plus accorder d'attention qu'aux résolutions de problèmes pourrait entraîner l'apparition de générations d'élèves capables de réaliser d'ingénieux raisonnements mais ne disposant pas des connaissances leur permettant d'exercer leurs aptitudes. Une structuration de la matière et des exercices de fixation restent nécessaires.

La SBPMef ne se dissimule aucune des difficultés auxquelles se heurte la pratique de la pédagogie des situations. Mais elle estime que cette pratique est aujourd'hui une nécessité incontournable dans la formation de l'élève dans les trois aspects retenus par le *Conseil de l'Education et de la Formation* : l'épanouissement personnel, l'insertion professionnelle et la formation du citoyen.

4. Du point de vue du contenu

4.1. Quelques remarques générales

L'objectif de comportement proposé au point précédent pourrait être appelé un objectif de « tête bien faite ». Ce que l'on oppose d'habitude à la « tête bien pleine ». Mais n'imaginons pas qu'une tête vide puisse être bien faite. Pour pouvoir résoudre des problèmes difficiles, pour pouvoir appliquer

N'imaginons pas qu'une tête vide puisse être bien faite.

la méthode axiomatique, un bagage minimum de connaissances est indispensable. La résolution d'un problème sert de motivation à l'étude d'une théorie. Et les connaissances nouvellement acquises permettent d'aborder de nouveaux problèmes. Nous ne pouvons échapper à la question du contenu à enseigner.

Les structures permettent de formaliser des analogies entre situations différentes.

À l'occasion de l'enseignement de n'importe quel chapitre mathématique, il est possible d'adopter un point de vue *structural.* Quelques remarques générales s'imposent à ce sujet.

On dit souvent que les structures permettent une économie de pensée. C'est bien là leur rôle en effet. Encore faut-il que l'élève éprouve le besoin de faire des économies ! Introduire une structure nouvelle est absurde à un moment où on n'en connaît qu'un seul exemple. C'est tout aussi absurde si les problèmes qui font intervenir ces exemples leur sont spécifiques et ne peuvent apparaître comme des cas particuliers d'un problème général. Pour que l'introduction d'une structure nouvelle soit justifiée, il convient que des analogies aient été perçues entre des situations apparemment différentes, des analogies portant sur des objets ou sur des relations qui lient des objets. Il est aussi indispensable que des contre-exemples soient disponibles, montrant le rôle précis des propriétés qui deviendront les axiomes de la structure.

Les structures permettent de formaliser des analogies entre situations différentes. L'introduction d'une structure nouvelle doit être l'aboutissement d'un processus de modélisation dont l'utilité apparaît clairement aux élèves.

De plus, avec divers auteurs nous pensons que, d'une façon générale, les objets mathématiques réellement significatifs sont plutôt *les morphismes* que *les structures.* Ainsi, les ensembles sont souvent moins importants que les fonctions, les groupes moins importants que les morphismes de groupes, les espaces vectoriels moins importants que les applications linéaires, les espaces topologiques moins importants que les fonctions continues, etc.

Plus précisément une structure donnée (la structure d'espace vectoriel par exemple) ne doit son intérêt qu'au fait qu'elle permet d'exprimer commodément les résultats concernant les morphismes (les applications linéaires dans ce cas). Elle a le plus souvent été inventée dans ce but. Les structures constituent des cadres facilitant l'étude des morphismes, mais l'objet essentiel de l'étude continue d'être les morphismes. Historiquement, il est d'ailleurs clair que les grandes structures ont été introduites après les morphismes correspondants, et parfois longtemps après.

Ainsi, quand nous parlons d'algèbre linéaire, nous pensons d'abord aux applications linéaires, aux matrices, aux équations linéaires, quand nous parlons d'analyse, nous pensons aux fonctions continues et dérivables, quand

Quand nous parlons d'algèbre linéaire, nous pensons d'abord aux applications linéaires, aux matrices, aux équations linéaires.

nous parlons de probabilités, nous pensons aux variables aléatoires.

À la fin du paragraphe 2 nous avons déjà énoncé deux critères de choix des sujets à enseigner : l'utilité pour les applications et la culture générale. Nous ne reviendrons pas sur le deuxième : il laisse une très grande liberté dans le choix des sujets. Pour les élèves qui ne pratiqueront plus guère les mathématiques ultérieurement, pourquoi ne pas laisser l'enseignant choisir certains thèmes d'études en fonction de ses goûts, de ses intérêts et de ceux de ses élèves ? La seule contrainte serait alors au niveau des comportements. Quant aux élèves qui continueront à utiliser la mathématique, l'objectif de culture générale n'est pas incompatible avec l'objectif utilitaire. L'enseignant devra profiter de toutes les occasions pour situer les notions rencontrées dans leur cadre historique ou philosophique.

Avant d'expliciter et d'exploiter le critère *utilité pour les applications*, il nous semble utile d'énoncer un critère *à ne pas utiliser* : la difficulté de l'enseignement, notamment le risque de dérapage inhérent à certains sujets. Il convient dans un tel cas d'analyser les raisons pour lesquelles l'enseignement passe mal, de repenser cet enseignement, de réévaluer à quel âge on va le présenter aux élèves, d'analyser sa place par rapport à d'autres sujets, mathématiques ou non, bref d'étudier sa faisabilité. Et si après ce travail, la conclusion générale est que le sujet est décidément trop difficile, il reste à examiner ce qui peut être mis en place au niveau du secondaire pour en préparer l'étude au niveau du supérieur, dans une optique d'enseignement en spirale.

4.2. Des théories « terminales »

Examinons à présent le critère *utilité pour les applications*. Il s'applique principalement pour élaborer le programme des élèves qui se destinent à une carrière scientifique ou technique nécessitant un bagage mathématique

Quand nous parlons d'analyse, nous pensons aux fonctions continues et dérivables.

Quand nous parlons de probabilités, nous pensons aux variables aléatoires.

important. Le mot *applications* doit être considéré dans un sens très large. Il ne s'agit pas nécessairement d'applications extra-mathématiques. L'enseignement d'une théorie peut se justifier par le fait qu'elle est utile, voire nécessaire, pour en aborder une autre. Par exemple, les automorphismes d'une structure donnée s'organisent naturellement en groupes et des morphismes de groupes apparaissent tout aussi naturellement. Ainsi l'algèbre des groupes est utile dans l'étude d'autres sujets mathématiques, une utilité qui résulte d'abord des méthodes de raisonnement qu'elle met en place.

Dans cette optique, commençons par choisir les théories *terminales* (relativement à l'enseignement secondaire). Ce doivent être des théories importantes par leurs applications et dont l'étude ne peut se faire qu'à la fin du secondaire.

Nous proposons le choix suivant :

- ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE
- ANALYSE
- PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

Ce sont les trois domaines qui nous semblent les plus porteurs d'applications. Avec la géométrie, ils permettent particulièrement bien la mise en œuvre de la méthode axiomatique. Cela ne signifie pas que les autres domaines sont sans intérêt, mais que dès la première année, les programmes de mathématique du secondaire devraient tenir compte de ce que, pour un nombre non négligeable d'élèves, cet enseignement culminera au cours des deux dernières années avec ces trois sujets et qu'il convient donc d'en préparer l'étude chaque fois que c'est possible, directement ou indirectement.

Détaillons quelques raisons pour lesquelles les trois sujets indiqués plus haut nous paraissent dominants. Cela nous amènera à évoquer des morceaux de théorie non actuellement enseignés dans le secondaire. Cela ne veut pas dire que nous préconisons que ces morceaux soient inscrits dans les programmes (cela ne veut pas dire le contraire non plus). Mais l'enseignement ne s'arrête pas à la fin du secondaire. Celui-ci a aussi pour fonction de préparer l'enseignement supérieur, y compris dans la conception des programmes.

4.2.1. L'algèbre linéaire et la géométrie

L'algèbre linéaire tire une grande partie de son importance de la difficulté technique de résoudre les problèmes non linéaires. Alors, on simplifie, on linéarise. Les phénomènes linéaires sont simples. Dès que l'on passe au degré deux, les situations peuvent devenir atroces. Faut-il rappeler que la génération de certains fractals, l'ensemble de Mandelbrot étant le plus connu, ne fait intervenir que des fonctions du second degré ? L'algèbre linéaire est peut-être même trop simple, c'est une théorie qui ne réserve guère de surprises. Cependant, on nous fera remarquer que certains élèves ont de grosses difficultés à assimiler ce qu'on en enseigne actuellement. C'est vrai mais cela ne prouve à nos yeux que la nécessité de repenser cet enseignement. Met-on les choses importantes en évidence ? Sont-ce les espaces vectoriels (les structures) qui posent problème ou les applications linéaires (les morphismes) ? Peut-être accorde-t-on trop de place à la structure, et pas assez aux morphismes et que de ce fait, l'élève ne perçoit pas le véritable sens de l'algèbre linéaire.

Dans un premier temps, l'algèbre linéaire est inséparable de la géométrie analytique, du plan et de l'espace. Elle fournit un moyen efficace et puissant de résoudre des problèmes de géométrie du premier et du second degré. Une précaution doit être prise : l'algèbre linéaire ne peut absorber complètement la géométrie, sous peine de voir disparaître l'intuition géométrique. Loin d'être inutile, celle-ci est indispensable pour assimiler l'algèbre linéaire elle-même. Toute séparation entre les deux sujets serait dommageable pour les deux.

Au niveau des applications linéaires, l'idée qui possède vraisemblablement le plus grand nombre d'applications est celle de diagonalisation des matrices, c'est-à-dire la mise en évidence des vecteurs propres et valeurs propres. Pensons à la décomposition de la lumière blanche en onde monochromatiques, aux petits mouvements autour d'une position d'équilibre, aux modes normaux de vibration, aux axes d'inertie d'un solide, aux analyses factorielles en statistique, à la résolution de systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, à la décomposition d'un son en harmoniques, à la mécanique quantique, etc. Tous ces phénomènes reposent sur la même idée mathématique : déterminer les vecteurs propres d'une matrice ou plus généralement d'un opérateur linéaire. Ici aussi les approches géométriques et analytiques d'un même problème se complètent harmonieusement.

Faut-il pour autant prendre la diagonalisation des matrices comme objectif de l'enseignement de l'algèbre linéaire au secondaire ? Peut-être pas. Mais ce qui semble évident, c'est que l'importance de l'algèbre linéaire ne peut être sous-estimée.

L'importance de l'algèbre linéaire ne peut être sous-estimée.

4.2.2. L'analyse

Avec l'analyse, les élèves se trouvent en présence d'un phénomène qu'ils n'ont rencontré auparavant que de façon accidentelle : la nécessité de procéder à des approximations. Qu'est-ce qu'effectuer un passage à la limite sinon considérer des approximations de plus en plus précises d'un nombre (ou d'une fonction) ? De nombreuses démonstrations d'analyse reviennent à prouver qu'une limite vaut 0. Elles se font en manipulant des *inégalités*. Au contraire, l'algèbre, l'arithmétique et même la géométrie manipulent le plus souvent des égalités. L'analyse nécessite donc une nouvelle forme d'intuition, qu'elle contribue à former : celle qui permet de manipuler les approximations. Inutile d'espérer fixer par exemple la notion de nombre réel sans formation de cette intuition.

Nous ne considérons donc pas comme analyse les calculs de dérivées ou de primitives, ni même de limites qui ne mettent en œuvre que des manipulations algébriques. Et le premier objectif que nous attribuons à l'enseignement de l'analyse est la formation de l'intuition liée aux approximations.

Le premier objectif que nous attribuons à l'enseignement de l'analyse est la formation de l'intuition liée aux approximations.

À côté des applications qui se traduisent par des recherches d'extrema, il faudrait en envisager d'autres qui fassent apparaître des équations différentielles. Celles-ci ne sont pas actuellement au programme du secondaire. Et pourtant le modèle mathématique de nombreuses situations extraites des disciplines scientifiques ou des sciences humaines repose sur des équations différentielles. Qu'il nous suffise de rappeler les équations de la mécanique, de l'électromagnétisme, de la cinétique chimique, de la dyna-

Le modèle mathématique de nombreuses situations extraites des disciplines scientifiques ou des sciences humaines repose sur des équations différentielles.

mique des populations ainsi que les modèles dynamiques en économie et en gestion.

Ajoutons que si la fonction exponentielle e^{kx} est importante, c'est essentiellement parce qu'elle est solution de l'équation $y' = ky$, c'est-à-dire qu'elle apparaît dans les solutions de tout problème où le taux d'accroissement d'une grandeur est proportionnel à cette grandeur. (Croissance des populations, désintégration radioactive, évolution de la valeur acquise par un capital...) Il faudra examiner si les équations différentielles linéaires à coefficients constants constituent un objectif inaccessible pour l'enseignement secondaire.

Mettre les élèves en possession de méthodes de résolution d'équations différentielles, si simples soient-elles, c'est leur donner de nouvelles possibilités d'appliquer la méthode axiomatique.

4.2.3. Les probabilités et statistiques

Si on réalisait un jour le hit-parade des applications des mathématiques, les statistiques (plus encore que les probabilités) seraient classées au tout premier rang. Faut-il faire remarquer que l'État s'est doté d'un *Institut National des Statistiques*, mais non d'un Institut National d'Algèbre linéaire ou d'Analyse ? Indispensables à tous les niveaux de décision, les statistiques n'en sont pas moins très mal connues du grand public. Elles sont aussi souvent manipulées ou réduites au calcul d'une moyenne arithmétique. L'importance des statistiques dépasse l'enseignement des mathématiques ou même la culture générale. Il s'agit de la formation du citoyen à son rôle de participant à la prise de décision politique. Ce sujet pourrait donc être abordé,

L'importance des statistiques dépasse l'enseignement des mathématiques ou même la culture générale. Il s'agit de la formation du citoyen à son rôle de participant à la prise de décision politique.

à des niveaux différents, avec l'ensemble de la population du secondaire.

Statistiques et probabilités se prêtent également particulièrement à l'application de la méthode axiomatique. Les situations sont nombreuses qui permettent d'élaborer des modèles. Les difficultés traditionnellement rencontrées, tant par les enseignants que par les élèves, proviennent d'ailleurs de cet aspect. Il est à noter aussi que les modèles rencontrés en statistiques et probabilités font intervenir une quantité non négligeable d'algèbre linéaire ou d'analyse.

La notion de morphisme que l'on rencontre en probabilité est celle de variable aléatoire. Il est clair que les distributions de probabilités qui y sont associées ont de tout temps constitué l'essentiel du sujet. Il est tout aussi clair qu'il n'est pas indispensable d'introduire la structure générale d'espace probabilisé pour parler de variable aléatoire. Au niveau où nous nous plaçons, l'étude des variables discrètes d'une part, des variables qui admettent une densité de probabilité d'autre part est largement suffisante.

4.3. D'autres sujets, non moins importants

Ayant passé en revue les théories « terminales », nous pouvons « remonter la chaîne ». Contentons-nous de quelques remarques.

4.3.1. Les nombres

Les nombres figurent évidemment parmi les objets mathématiques fondamentaux. Les extensions successives de la notion de nombre sont apparues en réponse à des problèmes.

Les nombres naturels, entiers, rationnels sont rencontrés en arithmétique, particulièrement à l'occasion de l'étude de la divisibilité et de celle des fractions. On constate à cette occasion l'apparition d'une forme de pensée particulière liée à ce que, comme l'analyse, l'arithmétique utilise une relation d'ordre plutôt que l'égalité. À la différence de l'analyse, cet ordre — la divisibilité — est un ordre discret : entre deux nombres, il n'est pas toujours possible d'en insérer un troisième. Il en résulte que la pratique de l'arithmétique permet le développement de compétences spécifiques.

Les nombres réels s'introduisent un peu subrepticement dans les cours de mathématique. Quelques individus isolés apparaissent très tôt, comme $\sqrt{2}$ ou π. Progressivement, l'élève prend conscience de certaines différences entre rationnels et irrationnels (notamment le caractère périodique ou non des développements décimaux). C'est au cours d'analyse qu'il revient de distinguer avec plus de précision entre les deux notions. Il est toutefois difficile de croire que l'enseignement secondaire puisse « épuiser le sujet ».

Les nombres complexes sont traditionnellement au programme de la dernière année des sections scientifiques. Pour être justifié, leur enseignement devrait s'appuyer sur des applications. Nous pensons notamment à l'interprétation géométrique des nombres complexes et à leur utilisation en vue de la résolution de certains problèmes de géométrie.

4.3.2. L'algorithmique

La démarche algorithmique, y compris la rédaction et l'exécution d'un programme informatique, est un excellent accompagnement de l'enseignement de nombreux sujets. Elle contribue à la fixation des notions étudiées en les rendant opérationnelles. Elle développe particulièrement la rigueur et nécessite à la fois une vision d'ensemble d'un problème et une étude tout à fait détaillée de celui-ci. L'utilisation de calculateurs s'avère également utile sinon indispensable pour la résolution de problèmes dont les données n'ont pas été trafiquées. Ainsi, l'algorithmique peut être directement liée à la pratique de la pédagogie des situations.

L'algorithmique peut être directement liée à la pratique de la pédagogie des situations.

L'algorithmique doit également être associée à d'autres sujets, en particulier l'analyse et l'arithmétique. Très souvent en effet, les algorithmes utilisés sont de nature itérative : une technique de discrétisation permet le calcul d'une suite de valeurs approchées du résultat cherché. L'analyse permet de justifier rigoureusement ces algorithmes qui mettent parfois en œuvre des notions d'arithmétique et d'analyse combinatoire très poussées.

4.3.3. La géométrie

Tout à la fois observation, analyse et étude de l'espace dans lequel nous vivons, la géométrie est aussi *modélisation* de cet espace, dès les notions les plus élémentaires (droites, points, plans, ...). L'étude des transformations est, elle aussi, un bel exemple de modélisation mathématique de mouvements ou d'effets artistiques (symétries, rotations, ...) ou de théories construites à partir de problèmes (projections parallèles, homothéties, ...)

Tout en constituant un terrain privilégié pour initier l'élève à la démonstration, la pratique de la géométrie est peut-être plus importante pour la formation de l'intuition géométrique que pour les résultats géométriques eux-mêmes. On a parfois dit, en caricaturant sans doute quelque peu, que la géométrie ne comportait que deux théorèmes : ceux de Thalès et de Pythagore. Le premier est à associer à l'algèbre linéaire, le second à l'algèbre bilinéaire (ou des formes quadratiques).

Il est donc vrai que les résultats significatifs de géométrie pourraient se déduire d'autres sujets tels que l'algèbre linéaire. Ce serait cependant une erreur de supprimer un enseignement autonome de la géométrie. L'intuition géométrique permet à l'élève en cours d'apprentissage d'exploiter au mieux une perception visuelle, de se créer des images mentales, contribuant ainsi à la compréhension de sujets plus complexes.

L'intuition géométrique permet à l'élève en cours d'apprentissage d'exploiter au mieux une perception visuelle, de se créer des images mentales, contribuant ainsi à la compréhension de sujets plus complexes.

L'étude des transformations géométriques prépare également la mise en place de la structure de groupe dont nous avons dit plus haut qu'elle se rencontre chaque fois que l'on considère les automorphismes, c'est-à-dire les symétries, d'une structure. On sait que faire apparaître des invariants et des symétries est une technique d'investigation très souvent fructueuse. La reconnaissance et l'exploitation de la structure de groupe des automorphismes d'une situation sont donc des objectifs à poursuivre.

4.3.4. L'algèbre et le calcul littéral

Le calcul littéral est une modélisation des calculs numériques de même que les équations algébriques résultent de modélisations de *problèmes*. L'apprentissage de l'algèbre et du calcul littéral s'inscrit ainsi dans le cadre de l'apprentissage de la méthode axiomatique. Une certaine habileté et une certaine fiabilité en calcul algébrique restent indispensables pour pouvoir mener à bien des résolutions de problèmes difficiles.

4.3.5. Le langage ensembliste et relationnel

Si, comme il est dit plus haut, un formalisme sans signification est à proscrire, il y a néanmoins lieu d'amener progressivement l'élève à utiliser des notations et un langage rigoureux et cohérents. C'est à travers tous les chapitres du cours de mathématique que cet objectif doit être poursuivi. En particulier le vocabulaire ensembliste permet de munir l'élève d'un moyen d'expression puissant, mais non exclusif. Les activités de traduction d'un langage dans un autre constituent une occasion de vérifier la compréhension véritable du formalisme utilisé.

Le vocabulaire ensembliste permet de munir l'élève d'un moyen d'expression puissant, mais non exclusif.

Les opérations ensemblistes élémentaires ne peuvent donc être négligées. La mise en évidence des relations d'ordre et d'équivalence fournit également à l'élève un moyen de clarifier ses conceptions et d'organiser ses activités.

Dans le même ordre d'idées, les remarques fondamentales concernant les opérations logiques élémentaires, ainsi que la manipulation des quantificateurs, doivent trouver naturellement place dans l'étude des chapitres principaux du cours de mathématique.

5. Conclusions

Nous avons déjà beaucoup parlé de la pédagogie des situations. N'y revenons pas. Il est un autre principe qui mérite d'être réaffirmé : celui de l'enseignement en spirale. Il intervient notamment au moment de la réalisation des programmes de l'enseignement secondaire. Ci-dessus, nous n'avons abordé que des aspects très généraux. Nous souhaitons qu'ils soient pris en considération par les commissions de programmes. Et que celles-ci prévoient des programmes permettant plusieurs retours sur une matière donnée de façon tout à la fois à favoriser l'assimilation, à éviter le phénomène d'oubli et à permettre une progression.

La rédaction d'un programme est chose difficile. Le développement intellectuel des enfants doit être évalué correctement malgré les difficultés que cela comporte. L'utilisation de l'enseignement en spirale permet aussi de minimiser les erreurs éventuelles de conception des programmes.

Souhaitons enfin que les programmes ne soient pas fragmentés en petites parcelles. Une présentation très détaillée favorise une pratique de l'enseignement très analytique, très linéaire, du type « J'ai appris aujourd'hui à mes élèves à résoudre les équations $x + a = b$, demain je leur apprendrai à résoudre les équations $ax + b = c$. ». Une telle pratique ne rencontre guère les objectifs de comportement que nous attribuons à l'enseignement des mathématiques. Elle n'accorde qu'une autonomie très limitée aux professeurs et à leurs élèves. Elle diminue les possibilités de donner du sens aux notions étudiées. Elle n'est guère compatible avec l'utilisation de la pédagogie des situations, qui généralement suscite une approche plus globale. Elle focalise l'enseignement sur la fixation de points de matière, au détriment de l'activité mathématique.

Au contraire, la méthodologie mise en œuvre doit permettre à l'élève de comprendre la signification et l'importance (relative) des notions qui lui sont présentées. Il doit sentir qu'en les assimilant, il devient capable

La méthodologie mise en œuvre doit permettre à l'élève de comprendre la signification et l'importance (relative) des notions qui lui sont présentées.

de résoudre des problèmes qu'il ne pouvait résoudre auparavant. Il doit donc se sentir plus efficace, plus compétent. Le rôle du professeur consiste aussi à mettre l'élève en confiance, par exemple en le sécurisant lors d'une recherche. De façon plus générale, on rappellera l'importance de la qualité de la relation entre professeur et élève : au-delà de ses performances en mathématique, celui-ci doit se sentir encouragé, reconnu et estimé. La meilleure méthode d'enseignement ne sera épanouissante que si le professeur aime les mathématiques et surtout ses élèves.

Résultats à une enquête internationale en mathématiques

CHRISTIAN MONSEUR

Repris de *M&P* n° 114, novembre–décembre 1997

L'Association internationale pour l'évaluation du rendement scolaire (I.E.A.) vient de publier les premiers résultats d'une enquête comparative sur les connaissances en mathématiques et en sciences des élèves de 41 systèmes scolaires.

Tant la Communauté française que la Communauté flamande de Belgique ont participé à cette enquête (comme d'ailleurs à la plupart des autres enquêtes internationales sur les acquis des élèves organisées par l'I.E.A. depuis le début des années 60). Le but de ces enquêtes est double :

– Permettre à chaque pays de disposer de renseignements objectifs sur les points forts et les points faibles de son système éducatif ;
– Contribuer à mieux comprendre le fonctionnement des systèmes scolaires et identifier les facteurs pouvant expliquer la plus grande efficacité de certains d'entre eux.

Les résultats publiés aujourd'hui portent sur les compétences en mathématiques et en sciences des élèves de 13–14 ans. Les épreuves utilisées sont identiques dans tous les pays ; elles portent sur un ensemble de savoirs et savoir-faire qui, d'après les programmes scolaires des 41 pays participants, constitue une sorte de dénominateur commun. Ces tests ont été administrés à des échantillons représentatifs d'élèves des deux années scolaires successives où se trouve, dans tous les pays, la majorité des jeunes âgés de 14 ans. Cela correspond, dans notre pays, aux deux premières années de l'enseignement secondaire.

Les épreuves de mathématiques comportaient 158 questions dont la majorité (122, soit 77,2 %) se présente sous la forme de questions à choix multiple. Pour rencontrer les critiques souvent énoncées à l'égard de ce genre de questionnement (*seuls les processus cognitifs inférieurs sont mis en oeuvre*), le comité international responsable de l'élaboration des tests a également retenu 35 questions ouvertes (soit 22,8 %).

Les tableaux 1 et 2 présentent la répartition des différentes questions selon les contenus mathématiques abordés et les processus cognitifs mobilisés.

TAB. 1 – Répartition des questions selon les contenus

Catégorie	**Nombre d'items**	**%**
A : Nombres	52	32,9
B : Géométrie	23	14,6
C : Algèbre	29	18,3
D : Représentation, analyse de données, probabilité	21	13,3
E : Mesure	21	13, 3
F : Proportionnalité	12	7,6
	158	100

TAB. 2 – Répartition des questions selon les processus cognitifs

Processus cognitifs	**Nombre d'items**	**%**
Connaissance	32	20, 3
Utilisation de procédures	70	44, 3
Résolution de problèmes	48	30, 4
Raisonnement	4	2, 5
Communication	4	2, 5
	158	10

Les épreuves ne portent pas uniquement sur la connaissance. En effet, les élèves devaient également, dans bon nombre de cas, utiliser des procédures simples ou complexes, formuler ou clarifier un problème, développer des stratégies de résolution, prédire un résultat ou en vérifier l'exactitude.

Des représentants du corps inspectoral ont été invités à juger de la pertinence de ces différentes questions par rapport aux objectifs assignés à l'enseignement des mathématiques en Communauté française. Pour chaque question, les inspecteurs devaient, sur base des programmes officiels, déterminer si la question pouvait être considérée comme ayant été vue. Plus de

85 pour cent des questions ont fait l'objet d'un enseignement au terme de la deuxième année de l'enseignement secondaire.

Le tableau 3 présente les résultats en mathématiques de l'ensemble des pays qui ont participé à l'étude au grade 8. En Communauté française et pour bon nombre de pays, le grade 7 correspond à la première année de l'enseignement secondaire et le grade 8 à la deuxième.

La moyenne internationale s'élève à 484 points au grade 7 et à 513 au grade 8, soit un an plus tard. Le gain moyen enregistré entre les deux années d'étude est donc de 29 points sur l'échelle des scores. Ce gain peut être assimilé aux nouveaux acquis apportés par une année scolaire. Les résultats internationaux peuvent donc être traduits en nombre d'années scolaires qui nous sépare des différents pays :

$$\boxed{\text{années} = (\text{résultat du pays} - \text{résultat de la Communauté française})/29.}$$

Ainsi, la distance qui nous sépare de la Communauté flamande de Belgique peut s'écrire : $(565 - 526)/29 = 1{,}35$. En d'autres termes, les résultats des élèves néerlandophones à la fin de la deuxième année de l'enseignement secondaire correspondent aux résultats que les élèves de la Communauté française de Belgique devraient atteindre en fin de troisième année.

Les résultats internationaux peuvent également être traduits en pourcentage moyen de réussite à l'ensemble des questions.

Les résultats de nos élèves sont encourageants. En deuxième année de l'enseignement secondaire, seuls 8 des 41 pays participants obtiennent des résultats significativement supérieurs aux nôtres (par ordre décroissant de performance : Singapour, la Corée, le Japon, Hong-Kong, la Communauté flamande de Belgique, les républiques tchèque et slovaque et enfin la Suisse). Quatorze pays se caractérisent par des résultats proches des nôtres (les différences observées ne sont pas statistiquement significatives). Parmi ceux-ci figurent les Pays-Bas, l'Autriche, la France, l'Irlande, la Suède et l'Allemagne. Enfin, dix-huit pays obtiennent des résultats significativement inférieurs aux nôtres, parmi lesquels il faut compter l'Angleterre, la Norvège, le Danemark, les États-Unis, l'Écosse, l'Espagne, l'Islande, la Grèce et le Portugal. En d'autres termes, la Communauté française de Belgique se situe légèrement au-dessus de la moyenne internationale. Toutefois, plus d'une année scolaire nous sépare de la Communauté flamande.

Un examen plus détaillé des résultats actuels permet de relever quelques tendances.

TAB. 3 – Résultats internationaux en mathématiques au grade 8

Pays	**Score**	**Années**	**% de réussite**
Singapour	643	4.03	79
Corée	607	2.79	72
Japon	605	2.72	73
Hong Kong	588	2.14	70
Comm. flamande	*565*	*1.34*	*66*
République tchèque	564	1.31	66
République slovaque	547	0.72	62
Suisse	545	0.66	62
Pays-Bas	541	0.52	60
Slovénie	541	0.52	61
Bulgarie	540	0.48	60
Autriche	539	0.45	62
France	538	0.41	61
Hongrie	537	0.38	62
Russie	535	0.31	60
Australie	530	0.14	58
Irlande	527	0.03	59
Canada	527	0.03	59
Comm. française	**526**	**0.00**	**59**
Thaïlande	522	-0.14	57
Israël	522	-0.14	57
Suède	519	-0.24	56
Moyenne	**513**	**-0.4**	**55**
Allemagne	509	-0.59	54
Nouvelle-Zélande	508	-0.62	54
Angleterre	506	-0.69	53
Norvège	503	-0.79	54
Danemark	502	-0.83	52
États-Unis	500	-0.90	53
Écosse	498	-0.97	52
Lettonie	493	-1.1	51
Espagne	487	-1.3	51
Islande	487	-1.3	50
Grèce	484	-1.4	49
Roumanie	482	-1.5	49
Lituanie	477	-1.7	48
Chypre	474	-1.8	48
Portugal	454	-2.5	43
Iran	428	-3.4	38
Koweït	392	-4.6	30
Colombie	385	-4.9	29
Afrique du Sud	354	-5.9	24

Les questions où l'élève doit choisir la bonne réponse parmi plusieurs propositions sont mieux réussies que celles nécessitant une production écrite. Cette différence est de 15 % en deuxième secondaire. Les performances des élèves laissent donc le plus à désirer lorsqu'il leur est demandé de construire une réponse et de la rédiger. Toutefois, ce constat n'est pas spécifique à nos élèves, il concerne tous les pays (différence de 15 % également).

Le tableau 4 présente les pourcentages moyens de réussite selon les différentes matières, tant au niveau de la Communauté française qu'au niveau international.

TAB. 4 – Pourcentage moyen de réussite au grade 8 par catégorie de contenus

	Communauté française	Moyenne internationale	Différence
Nombres	62 %	58 %	4 %
Géométrie	58 %	56 %	2 %
Algèbre	53 %	52 %	1 %
Représentation de données	68 %	62 %	6 %
Mesure	56 %	51 %	5 %
Proportionnalité	48 %	45 %	3 %

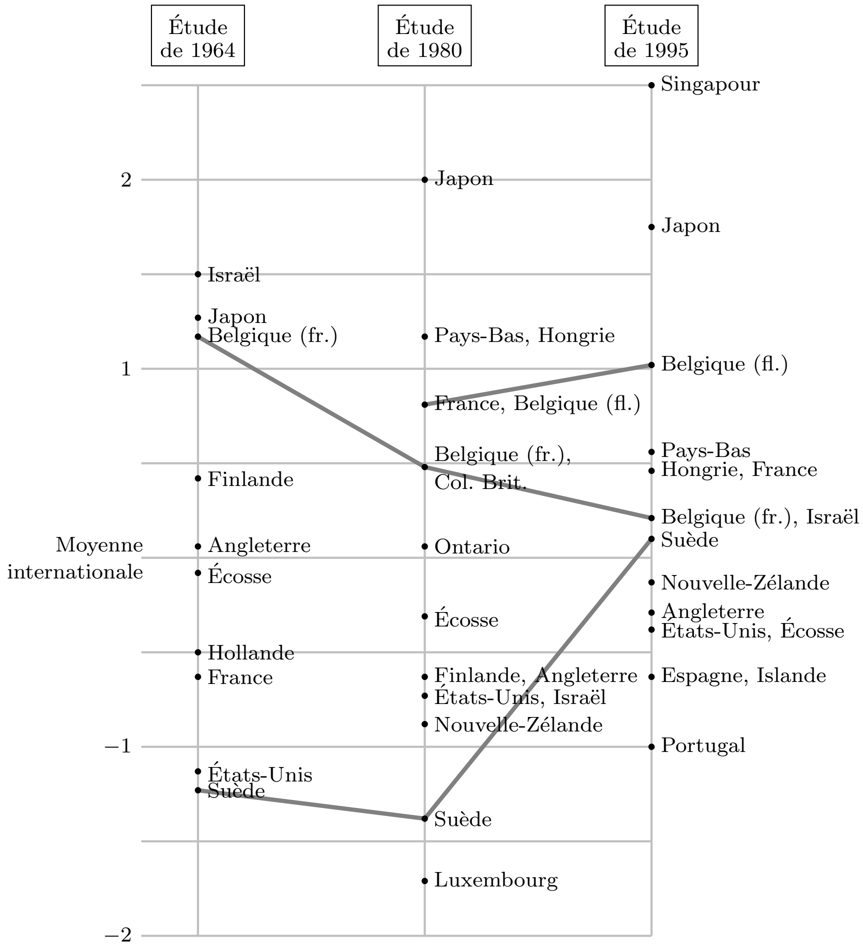
Comparativement aux résultats internationaux, nos élèves maîtrisent mieux les concepts d'arithmétique, de mesure et la représentation de données que les concepts de géométrie et d'algèbre.

En arithmétique, nos résultats sont particulièrement bons en ce qui concerne l'addition et la soustraction. Par contre, on observe un déficit non négligeable pour la division de fractions ou de nombres décimaux. Les problèmes liés aux bases orthonormées suscitent également des difficultés pour nos élèves. Toutefois, ces derniers constats doivent être lus avec réserves car les questions portant sur ces contenus spécifiques ne sont pas très nombreuses.

Les résultats par processus cognitifs montrent que les questions de connaissance sont les mieux réussies (plus 5,7 par rapport à la moyenne internationale contre 3,1 pour les questions d'utilisation de procédures).

Ces résultats confirment les tendances observées lors des précédentes études de l'I.E.A. auxquelles a participé la Communauté française de Bel-

Fig. 1 – Résultats internationaux standardisés lors des trois études de l'I.E.A. en mathématiques



gique. Que ce soit lors de la première étude (1964) ou lors de la seconde (1981), la Belgique francophone obtenait déjà, à ce niveau scolaire, des résultats supérieurs à la moyenne internationale.

La figure 1 présente la position de la Communauté française de Belgique lors des trois études. Les résultats des différents pays ont été standardisés afin de présenter les résultats sur une seule et même échelle.

La première étude, dont la collecte de données s'est déroulée au cours de l'année 1964, a vu la Belgique se classer en troisième position parmi les 10 participants. En 1980, 16 pays participent à la seconde étude et la Belgique francophone obtient des résultats toujours supérieurs à la moyenne. À cette époque, elle occupe la sixième position. La troisième étude semble indiquer une tendance relativement prononcée à se rapprocher de la moyenne internationale. À présent, la Belgique francophone occupe la 19e place parmi 41 pays.

Les variations de classement, certes, peuvent résulter d'une modification du niveau de performance des élèves. Toutefois, la position occupée par un système éducatif est directement dépendante des pays qui ont participé. À titre d'exemple, le classement actuel de la Communauté française de Belgique est comparable à celui de 1980 si l'on ne tient pas compte des quatre pays asiatiques qui obtiennent les meilleurs résultats. Par contre, l'évolution respective des deux communautés belges laisse suspecter une différence croissante. Pour confirmer ces observations, il importe d'interroger les pourcentages moyens de réussite aux différentes questions. Ces données sont susceptibles de nous informer plus précisément sur l'évolution du niveau de performance des élèves. En effet, l'accroissement de la différence peut refléter une réduction du niveau de performance des élèves francophones ou une augmentation des performances des étudiants néerlandophones, voire des deux. Cependant, les questions posées lors des deux études ne sont pas nécessairement comparables. Fort heureusement, l'intérêt des analyses diachroniques incite les responsables de la construction des épreuves de rendement à inclure, dans un nouveau test, des questions qui faisaient partie d'un test administré précédemment. Ces items, dits d'ancrage, ne subissent aucune modification. Il s'ensuit qu'une évolution des pourcentages de réussite à ces items ne peut être attribuée qu'aux seules compétences des élèves.

Le tableau 5 reprend les pourcentages médians de réussite aux items d'ancrage pour les deux Communautés belges. Le pourcentage moyen de réussite à l'ensemble des items est de 59 % pour la Belgique francophone et de 66 % pour la Flandre. Le tableau 5 présente les médians pour les deux études et les deux communautés éducatives belges.

TAB. 5 – Pourcentages médians de réussite aux items d'ancrage

	1984	1995
Belgique francophone	53	57
Belgique néerlandophone	55	65

En premier lieu, il est heureux de constater que le médian des items d'ancrage ne diffère pas des pourcentages moyens de réussite à l'ensemble de l'épreuve. L'analyse diachronique indique une très légère progression pour la Belgique francophone (4 %) et une progression plus importante de la Belgique néerlandophone (10 %). Ces indications, bien qu'elles portent sur un nombre restreint d'items, laissent supposer que le niveau de performance des élèves francophones n'a pas régressé depuis 1984 et qu'il se caractérise même par une amélioration. Dans le même temps, les élèves néerlandophones ont progressé davantage. En conclusion, si notre classement a tendance à se rapprocher de la moyenne internationale, il s'agit moins d'une diminution du niveau de performance de nos étudiants que d'une amélioration de quelques autres pays et de la venue de nouveaux participants.

En conclusion, les résultats actuels de la Communauté française de Belgique en mathématiques paraissent encourageants. Une analyse détaillée des résultats par catégorie de contenus et par processus cognitif a permis d'isoler de légères variations qui ne modifient pas le profil général, à savoir des résultats légèrement supérieurs à la moyenne internationale.

L'analyse diachronique montre que nos résultats ont bénéficié d'une augmentation ténue, tout en laissant apparaître une régression relative par rapport à d'autres systèmes éducatifs qui, dans le même temps, ont sensiblement amélioré la performance de leurs étudiants.

La recherche mathématique aujourd'hui (édition an 2000)

LUC LEMAIRE

Repris de *M&P* n° 128, septembre–octobre 2000

Introduction

En 1988, j'ai publié dans Mathématique et Pédagogie un texte montrant par cinq exemples divers aspects de la recherche mathématique aujourd'hui. Pour assurer l'avenir de cette recherche (en particulier en Belgique où elle se porte bien), il me semble en effet important de la faire connaître aux étudiants du secondaire, afin qu'ils puissent faire le choix éventuel de leurs études supérieures en connaissance de cause.

Les cinq sujets avaient été choisis parce qu'ils pouvaient être présentés sans trop de bagage technique, et parce qu'ils représentaient des aspects variés de ce qui se passe aujourd'hui.

Preuve de la vigueur de la recherche actuelle : douze ans après, deux des sujets sont tellement modifiés que le texte de 1988 est complètement dépassé, et pas mal de choses peuvent être ajoutées aux trois autres.

Il m'est donc paru utile de rédiger une nouvelle version mise à jour de cet article (le sous-titre édition an 2000 étant une concession à la mode).

Les mathématiques sont trop souvent perçues par le grand public comme une branche morte, un formalisme utile mais bien connu depuis très longtemps.

Or la réalité est toute autre : on fait des recherches en mathématique, on en fait peut-être plus qu'à n'importe quelle époque. Environ 60.000 articles sont publiés chaque année — de quoi remplir quelques rayons d'une bibliothèque. De plus, des problèmes fondamentaux restent à élucider, et on découvre régulièrement des résultats aussi importants que ceux que nous ont laissés les siecles passés.

Si ces faits sont peu connus, c'est que pour comprendre une bonne partie de ces résultats, il faut déjà connaître beaucoup de mathématique, et qu'on ne peut pas s'appuyer sur une image concrète comme dans les sciences naturelles.

Heureusement, un certain nombre d'exemples peuvent (je l'espère !) être expliqués sans faire appel à des connaissances préalables, et le texte qui suit est une tentative de réponse à la question : comment donner à des non-mathématiciens (en particulier de jeunes élèves) une idée de ce qui se fait en mathématique.

Comme point de départ des recherches mathématiques, supposons que nous voulions résoudre un problème, dans n'importe quelle branche : science, économie, etc. On essayera de le mettre en équation, c'est-à-dire d'écrire une équation qui le représente. Ensuite on la résoudra, ce qui donnera la solution du problème.

En résumé :

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{Problème}} \arrow[r] & \boxed{\text{Équation}} \arrow[d] \\ \boxed{\text{Solution du problème}} & \boxed{\text{Résolution de l'équation}} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Schéma 1

Tout le monde a rencontré cette démarche dès l'école primaire, lorsqu'il s'agissait de calculer le bénéfice d'un marchand débitant des mètres de tissus à des prix variés.

En fait, beaucoup de problèmes ne se traduisent pas par des équations, mais par des modèles mathématiques plus compliqués, qu'il faut alors étudier. Pour simplifier, je n'aborderai pas ces questions, et me contenterai d'envisager le cas des équations.

Par exemple, on peut obtenir une équation linéaire $ax + b = 0$, dont la solution est évidemment $x = -b/a$, ou une équation du deuxième degré $ax^2 + bx + c = 0$, dont les solutions sont données par la célèbre formule

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

On pourrait aussi obtenir des équations cubiques ou quartiques :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$
$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

et à nouveau on peut trouver des formules — moins connues et plus compliquées — donnant explicitement les solutions :

$x =$ expression faisant intervenir les quatre opérations et des racines.

Par contre, à partir de l'équation du 5$^{\text{e}}$ degré,

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

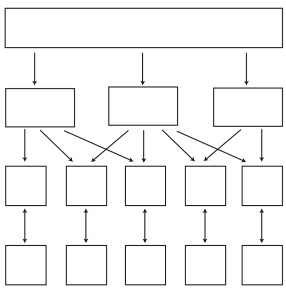
on sait depuis Abel (1826) et Galois (1831) qu'il n'existe pas de formule générale de ce type donnant les solutions de l'équation (on dit qu'on ne peut pas « résoudre l'équation par radicaux »).

Ceci reflète une situation assez fréquente, que je résumerai comme suit :

Sauf dans quelques cas heureux, on ne peut pas écrire une formule donnant les solutions d'une équation.

Dès lors, le processus de résolution des problèmes du schéma 1 est bloqué : on a une équation mais pas ses solutions. Il faut alors trouver autre chose pour avoir quand même des informations sur la solution du problème. D'une certaine façon, ceci est pour moi le début des mathématiques : puisqu'on ne peut résoudre individuellement chaque équation, on a développé des méthodes plus générales, qui donnent des indications sur les solutions. L'étude de ces méthodes est ensuite aidée par l'élaboration d'une théorie générale qui les recouvre.

Très schématiquement, je présenterais la situation comme suit :



IV Théorie générale

III Méthodes

II Équations (ou modèles mathématiques)

I Problèmes

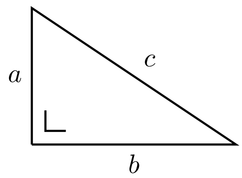
Schéma 2

Par exemple, si on ne peut pas résoudre une équation du 5^e degré par radicaux (en II), on sait au moins par des résultats plus généraux (en III) qu'elle a au maximum 5 solutions. De plus, la théorie de Galois permet de préciser quand on peut la résoudre par radicaux et pour cela il a introduit la notion de groupe, qui, certainement entre dans la théorie générale et a des applications dans de très nombreuses méthodes en III et équations en II. Ainsi, le fait qu'on ne puisse pas résoudre toutes les équations du 5^e degré par radicaux a fait progresser l'ensemble des mathématiques.

Voyons maintenant quelques exemples de sujets de recherches qui illustrent ceci. Leur choix est purement personnel et ils ne donnent certainement pas une idée équilibrée de l'ensemble des mathématiques. Les cinq sujets sont distincts, et on peut donc sauter un paragraphe au gré de sa fantaisie.

1. Le théorème de Fermat-Wiles

Commençons cet aperçu des mathématiques d'aujourd'hui par le théorème de Pythagore (qui en fait était déjà connu des Babyloniens, 1000 ans avant Pythagore) : dans un triangle rectangle, la somme des carrés des longueurs des côtés adjacents à l'angle droit est le carré de la longueur de l'hypoténuse, en formule : $a^2 + b^2 = c^2$.



Par exemple, si $a = 1$, $b = 2$, on a $c = \sqrt{5}$, qui n'est pas un nombre entier. On pourrait se poser le problème : quels sont les triangles rectangles dont les trois côtés sont de longueur entière. Les équations de ce problème sont :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ a, b, c \text{ des entiers positifs.} \end{cases}$$

Ce type d'équation n'est pas très familier : à première vue il y a une équation et trois inconnues, mais la condition a, b, c entiers modifie toute la question : si on choisit au hasard a et b, c a peu de chance d'être entier.

Pour le plaisir, voici la solution complète de cette équation. Dans un premier temps, on peut chercher des exemples de solutions, et on vérifie que :

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$5^2 + 12^2 = 13^2$$

Ensuite, on peut remarquer que si (a, b, c) est une solution et k un entier positif, alors (ka, kb, kc) est également une solution, ce qui nous en donne une infinité.

On peut aussi utiliser quelques formules d'algèbre, et voir que si m et n sont des entiers positifs avec $m > n$, alors en posant $a = m^2 - n^2, b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$, on a bien

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= m^4 + n^4 - 2m^2n^2 + 4m^2n^2 \\ &= m^4 + n^4 + 2m^2n^2 \\ &= (m^2 + n^2)^2 \\ &= c^2. \end{aligned}$$

En groupant les deux dernières remarques, on voit que si k, m, n sont des entiers positifs avec $m > n$, alors $a = k(m^2 - n^2), b = 2kmn, c = k(m^2 + n^2)$ est une solution.

Vérifions enfin que ces formules fournissent *toutes* les solutions.

Pour cela, remarquons d'abord que l'équation

$$a^2 + b^2 = c^2$$

peut aussi s'écrire

$$x^2 + y^2 = 1,$$

où $x = a/c$ et $y = b/c$ sont des nombres rationnels positifs.

La question est donc de trouver sur le cercle de rayon un du plan les points dont les deux coordonnées sont rationnelles et positives.
Nous pouvons réécrire les formules donnant (a, b, c) en fonction de m, n et k, et nous avons

$$\begin{aligned} x = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} &= \frac{1 - (\frac{n}{m})^2}{1 + (\frac{n}{m})^2} \\ y = \frac{2mn}{m^2 + n^2} &= \frac{2(\frac{n}{m})}{1 + (\frac{n}{m})^2} \end{aligned}$$

Posons $t = \frac{n}{m}$ (et donc t est positif et rationnel). Les valeurs de x et y données par les formules ci-dessus sont donc paramétrisées par

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, y = \frac{2t}{1+t^2}, \quad t \in \mathbf{Q}^+$$

Montrons que toutes les solutions rationnelles (x, y) de $x^2 + y^2 = 1$, $x > 0, y > 0$ s'obtiennent ainsi. Pour cela, posons simplement $t = \frac{y}{x+1}$ (ce qui implique t rationnel). On obtient alors :

$$\begin{aligned} &t(x+1) = y, \\ &t^2(x+1)^2 = y^2 = 1 - x^2 = (1+x)(1-x) \ ; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{gathered} t^2(x+1) = 1 - x, \\ t^2 x + x + t^2 - 1 = 0 \ ; \end{gathered}$$

d'où

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

et ensuite

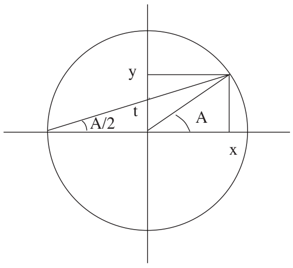
$$y = t(x+1) = t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1\right) = \frac{2t}{1+t^2},$$

ce qui conclut la démonstration : chaque couple (x, y) provient d'une valeur rationnelle de t.

Ceci était connu d'Euclide et Diophante (mathématicien grec du IV$^{\text{e}}$ siècle).

On ne peut pas dire exactement comment ces formules ont été découvertes (à l'époque comme maintenant les mathématiciens procèdent par tatonnement et par intuition), mais aujourd'hui on peut mieux les comprendre en terme de trigonométrie, en reconnaissant les formules classiques de la tangente de l'angle demi.

Géométriquement on a :



$$x = \cos A, y = \sin A, t = \mathrm{tg}\frac{A}{2}$$

Mais revenons au théorème de Fermat.

En 1637, le mathématicien « amateur » Pierre de Fermat (juge au tribunal de Toulouse) lit une traduction latine du traité (grec) de Diophante. Et il la lit comme un chercheur, c'est-à-dire qu'il ne se contente pas de comprendre le texte, il se pose des problèmes qui pour lui sont naturellement soulevés par les résultats donnés. Par exemple il se demande si on peut aussi résoudre l'équation $a^3 + b^3 = c^3$, ou plus généralement $a^n + b^n = c^n$, toujours avec a, b, c entiers positifs.

Et il écrit (en latin) dans la marge de son livre : *« Un cube n'est jamais la somme de deux cubes, une puissance quatrième n'est jamais la somme de deux puissances quatrièmes et plus généralement, aucune puissance supérieure à 2 n'est jamais la somme de deux puissance analogues. J'ai trouvé une démonstration vraiment merveilleuse de cette proposition, mais la marge est trop petite pour l'y écrire ».*

En d'autres termes, il affirme que pour $n \geqslant 3$, on ne peut trouver aucun triple (a, b, c) d'entiers positifs tels que $a^n + b^n = c^n$.

Cette phrase de Fermat, publiée après sa mort est le point de départ d'une des histoires les plus fascinantes des mathématiques, car après d'innombrables travaux pendant plus de 350 ans, durant lesquels le « théorème de Fermat » a pris le statut d'un véritable mythe en mathématique, cet énoncé n'a finalement été démontré qu'en 1995 !

Remarquons d'abord qu'un ordinateur — aussi puissant soit-il — ne peut pas résoudre ce type de question. En effet, s'il peut vérifier qu'un grand nombre de triples (a, b, c) ne satisfont pas l'équation, il ne peut pas faire une infinité de calculs et ainsi vérifier qu'il n'y a aucune solution.

Au cours des siècles, les mathématiciens ont donc développé un grand nombre de méthodes et de concepts pour faire avancer cette question.

Par exemple, Kummer a introduit les « nombres idéaux » devenus ensuite les idéaux en algèbre. Par ailleurs, les nombres complexes interviennent dans divers résultats partiels au cours des siècles.

Dans les vingt dernières années, le nombre de travaux importants touchant au théorème de Fermat est devenu très important, mais ce fut une surprise spectaculaire lorsque le mathématicien anglais Andrew Wiles annonça, lors d'une réunion à Cambridge le 23 juin 1993, qu'il avait démontré le théorème de Fermat.

Sa démonstration, complexe et brillante, s'appuie sur une série de résultats antérieurs, et je vais citer ici quelques jalons.

L'idée de base a été obtenue en 1985 par G. Frey et est la suivante.

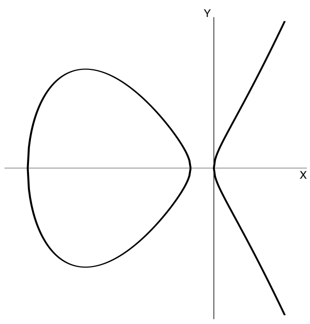
Supposons le théorème de Fermat faux. Il existe donc des entiers positifs. a,b et c et un entier $n \geqslant 3$ tels que

$$a^n + b^n = c^n$$

Dans le plan de coordonnées (x, y) considérons alors la courbe d'équation

$$y^2 = x \cdot (x - a^n)(x + b^n).$$

C'est une courbe du troisième degré, dont le graphe ressemble à ceci :



Dans $\mathbf{R}^2$, on ne peut rien déduire, mais remplaçons les réels x et y par des complexes. L'équation du troisième degré est maintenant complexe, et fournit deux équations réelles en les quatre variables réelles qui forment le couple de complexes (x, y). L'ensemble des solutions forme donc une surface réelle dans $\mathbf{R}^4$, appelée une courbe elliptique, qui en fait à la forme d'un tore.

Or, la théorie des courbes elliptiques est très développée. En particulier, dans les années 50, deux mathématiciens japonais, Taniyama et Shimura, ont énoncé une ambitieuse conjecture affirmant que toute courbe elliptique possède une propriété de symétrie très forte, à savoir être modulaire (il n'est pas possible de définir cette notion ici).

Et ce que Frey affirme en 1985 est que la courbe elliptique construite avec les nombres a, b et n ci-dessus n'est pas modulaire si $a^n + b^n = c^n$.

Donc, si le théorème de Fermat est faux, la conjecture de Taniyama - Shimura l'est également.

Cette affirmation de G. Frey est démontrée par K. Ribet l'année suivante, et en 1986 on sait donc que si on peut démontrer la conjecture de Taniyama-Shimura, on aura démontré au passage le théorème de Fermat.

Andrew Wiles raconte que depuis son enfance il connaissait l'énoncé du théorème de Fermat, et avait rêvé de le démontrer. Son travail de recherche portait toutefois sur un sujet apparemment distinct : les courbes elliptiques.

En 1986, le résultat de Frey-Ribet le poussa donc naturellement à tenter l'exploit de démontrer la conjecture de Taniyama-Shimura — et donc le théorème de Fermat.

De façon tout-à-fait inhabituelle, Wiles a travaillé seul pendant sept ans, sans publier de résultats partiels et sans indiquer à ses collègues et amis ce qu'il faisait, visant le tout pour le tout, c'est-à-dire une démonstration complète.

Et c'est ce résultat qu'il a annoncé à Cambridge en 1993, déclenchant (une fois n'est pas coutume) une série d'articles dans les journaux du monde entier.

(Plus précisément, il démontre un cas particulier de la conjecture de Taniyama-Shimura, suffisant pour impliquer le théorème de Fermat).

Mais l'histoire ne s'arrête pas là. La démonstration de Wiles fait l'objet d'un article de 200 pages qu'il soumet au journal *Annals of Mathematics*. Les éditeurs du journal soumettent ce manuscrit à six experts, pour vérification (normalement un ou deux experts sont consultés, mais l'article est tellement important et difficile que les éditeurs veulent être certains). Et un des experts trouve un trou sérieux dans la démonstration, que Wiles ne peut pas boucher rapidement.

À nouveau Wiles s'isole pendant que les rumeurs vont bon train, et travaillant avec son ami R. Taylor arrive à boucher le trou après un an.

L'ensemble de la démonstration est finalement publiée en 1995.

En résumé :

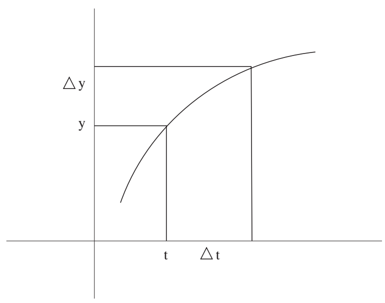
- Il semble clair que Fermat ait fait une erreur dans sa démonstration (plus tard, il écrit d'ailleurs qu'il a démontré un cas particulier) ;
- Cette erreur a été bénéfique pour le développement des mathématiques : l'étude de ce problème (II dans le schéma 2) a motivé d'importants développements aux niveaux III et IV, qui à leur tour se sont appliqués à d'autres équations ;
- La solution montre bien l'unité des mathématiques : un problème de théorie des nombres entiers fait appel à un nombre énorme de notions de diverses branches des mathématiques.

Et ajoutons que cette histoire fascinante est complètement atypique, le développement habituel de la recherche en mathématique n'est pas lié à des phrases écrites dans des marges, des problèmes résistant 350 ans ou des mathématiciens s'isolant pendant des années.

2. Équations différentielles

Rappelons d'abord la notion de dérivée. Si $y(t)$ est une fonction, et Δt un accroissement de la variable t, considérons l'accroissement correspondant de y :

$$\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$$



Le quotient $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ mesure le taux d'accroissement de la fonction sur l'intervalle Δt.

On fait alors tendre Δt vers 0, et si elle existe, on note $y'(t)$ la valeur limite de $\frac{\Delta y}{\Delta t}$. Ce nombre $y'(t)$ — la dérivée de y en t — représente les taux d'accroissement de la fonction en t.

Si t représente le temps et $y(t)$ la position d'un point se déplaçant sur une doite, $y'(t)$ représente la vitesse du point au temps t.

On peut alors considérer $y'(t)$ comme une nouvelle fonction. Sa dérivée est notée $y''(t)$: c'est la dérivée seconde de y.

Si $y(t)$ est la position d'un point mobile, $y''(t)$ est le taux d'accroissement de la vitesse, c'est-à-dire l'acccélération du point.

L'équation fondamentale de la mécanique de Newton est :

$$F = m \cdot a,$$

où F est la force subie par un point, m sa masse et a son accélération. On a une idée assez intuitive de cette loi en voiture : quand on appuie sur l'accélérateur, on communique une force à la voiture et elle a une accélération proportionnelle à la force et inversement proportionnelle à la masse.

En général, la force subie par un point peut dépendre de l'instant t, de la position y du point (par exemple, un point attaché à un ressort subit une plus grande force si le ressort est tendu), et de sa vitesse y' (les forces de frottement varient avec la vitesse). Nous écrirons alors l'équation sous la forme :

$$my'' = F(t, y, y').$$

Le problème que l'on se pose est le suivant : l'expression de la force étant donnée, déterminer la trajectoire du point, c'est-à-dire la fonction $y(t)$. L'inconnue n'est donc plus un nombre, mais une fonction. Une telle équation faisant intervenir les dérivées de l'inconnue est appelée équation différentielle.

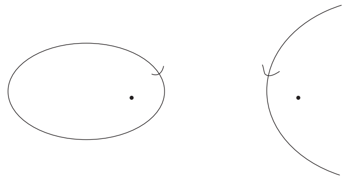
On démontre que si à un instant initial t_0 on prescrit la position et la vitesse du point (c-à-d. $y(t_0), y'(t_0)$), alors la trajectoire ultérieure est complètement déterminée : si on lance un objet, on fixe sa position et sa vitesse au moment où on le lache, et il continue ensuite tout seul.

L'équation $F = m \cdot a$ peut s'écrire dans des cas plus compliqués : un point se déplaçant dans $\mathbf{R}^3$ ou plusieurs points agissant les uns sur les autres. C'est en fait pour étudier dans un même cadre la trajectoire des planètes et la géométrie des courbes que Newton et Leibniz ont inventé la notion de dérivée et le calcul différentiel (vers 1675).

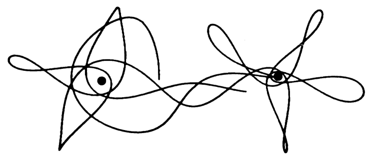
Nous retombons immédiatement sur le point de départ de ce texte : il est très rare que l'on puisse résoudre une équation différentielle !

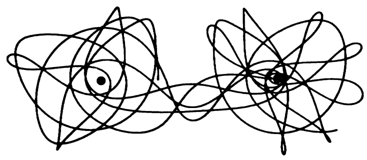
Reprenons le problème de l'astronomie : les corps dans l'espace s'attirent les uns les autres selon une force déterminée par les lois de Newton.

Le cas le plus simple est le problème des deux corps : par exemple une étoile et une planète, sans autre corps à proximité. Dans ce cas, on peut résoudre explicitement les équations, et on sait qu'un corps décrit un ellipse, une parabole ou une hyperbole autour de l'autre.



Par contre, dès qu'on passe au problème des trois corps, on ne possède pas de formule donnant la solution générale de l'équation $F = m \cdot a$. Et il est fort probable qu'on n'en trouve jamais. Par exemple, pour un système constitué de deux étoiles tournant l'une autour de l'autre et d'une planète plus légère, une trajectoire telle que celle du dessin est parfaitement possible (ici les deux étoiles tournent l'une autour de l'autre, mais on suit le mouvement en les observant ce qui fait qu'elles semblent immobiles) :





on ne s'attend donc pas à trouver une formule décrivant toutes les trajectoires de ce genre.

Mais alors, quel type de résultat peut-on obtenir ?

D'une part, on peut obtenir des approximations de la solution.

Dans l'étude du système solaire, comme chaque planète est beaucoup plus légère que le soleil, l'attraction d'un planète sur une autre est beaucoup plus faible que celle du soleil. En première approximation, chaque planète a une orbite elliptique autour du soleil, orbite qui en fait est perturbée par les autres planètes.

Et ces perturbations induisent des différences par rapport aux mouvements elliptiques qui peuvent être calculées.

Dès le milieu du XVIII^{e} siècle, Lalande et Clairaut calculent que les perturbations dues à Jupiter et Saturne retarderont d'un an et huit mois le retour de la comète de Halley, et prévoient ce retour pour le milieu d'avril 1759, à un mois près — prévision vérifiée le 12 mars !

En 1846, les mathématiciens Adams et Le Verrier ont étudié les perturbations de l'orbite d'Uranus depuis sa découverte en 1781, et ont déduit qu'elles devaient être provoquées par la présence d'une planète inconnue, dont ils ont pu déterminer la position. Suivant ces indications, elle a été observée immédiatement par Galle. (Il s'agit de Neptune.)

Ces calculs sont des exploits impressionnants, d'une extrême précision, utilisant à la fois des siècles d'observations astronomiques et la puissance du calcul différentiel.

Notons qu'il a fallu attendre 1930 pour découvrir Pluton, à un endroit prévu par un coup de chance et quelques fautes de calcul.

Actuellement, la trajectoire des satellites artificiels est contrôlée par des ordinateurs. Ils ne peuvent pas résoudre les équations de la mécanique, mais ils peuvent donner des approximations de la solution avec une précision remarquable. La réussite la plus spectaculaire dans ce domaine est pour moi la mission de la sonde Voyager 2 : lancée en 1977, elle est passée près de Jupiter en 1979, de Saturne en 1981, d'Uranus en 1986, et de Neptune en 1989. Elle a parcouru plusieurs milliards de km, et cela avec une quantité de carburant finalement très faible ! Le principe d'un tel voyage est d'utiliser la force de gravitation de chaque planète pour être catapulté vers la suivante : on calcule qu'une petite déviation (consommant peu de carburant) faisant passer un peu plus près d'une planète aura des effets très importants sur la suite du parcours.

L'usage de l'ordinateur ne résout toutefois pas les questions théoriques. En 1887, le roi Oscar II de Suède a institué un prix pour récompenser celui qui établirait que le système solaire est stable, c'est-à-dire qu'aucune planète ne risque d'être éjectée du système (non, ce prix ne s'appelait pas un Oscar !).

Comment ceci pourrait-il se produire ? On peut imaginer que chaque fois que la Terre et Mars passent du même côté du Soleil, l'attraction qu'elles exercent l'une sur l'autre les rapproche un petit peu, et qu'après des millions d'années elles en viennent à passer telllement près l'une de l'autre que Mars soit catapultée vers le Soleil et la Terre hors du système.

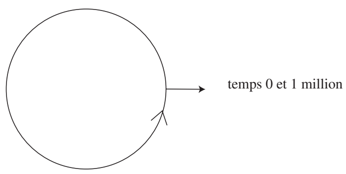
Comme une petite perturbation à un moment donné peut avoir des effets énormes bien plus tard, le calcul de solutions approximées par ordinateur ne peut pas aider à cette question.

Le prix fut gagné en 1900 par Poincaré qui ne résolut pas la question, mais qui développa pour commencer son étude une branche des mathématiques initiée par Euler (1735) et Riemann (1851), mais qui n'avait rien à voir avec la mécanique : la topologie ou étude des formes.

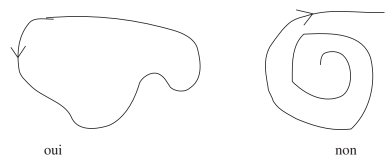
Son idée de départ est la suivante. Supposons qu'en deux instants différents, toutes les planètes se retrouvent exactement aux mêmes endroits avec les mêmes vitesses, par exemple aux temps 0 et 1 million d'années. Puisque les positions et les vitesses déterminent la suite du mouvement et que ces données sont les mêmes au temps 1 million qu'au temps 0, le système doit recommencer le même mouvement et reviendra au même point au temps 2 millions, puis 3, 4 et ainsi de suite. On dit alors que le système est périodique, et il doit alors être stable, car si une planète se perdait, elle ne serait pas au rendez-vous suivant.

On peut représenter tout le système (disons 40 planètes et satellites) par un seul point bougeant dans un grand espace (de dimension 240) représentant les positions et vitesses des astres.

Dire que le système est périodique signifie que ce point a une trajectoire fermée, par exemple un cercle



Mais que cette courbe soit un cercle, une ellipse ou une courbe fermée plus compliqué n'a aucune importance pour le problème : la seule chose qui compte est qu'elle soit fermée.



C'est le point de départ du travail de Poincaré, et il est plus difficile d'expliquer la suite. Le paragraphe 3 montrera de façon plus convaincante l'utilité de cette idée.

En 1963, Arnol'd, Kolmogorov et Moser ont utilisé les développements de la topologie pour donner un élément de réponse (qui aurait laissé perplexe le roi Oscar) : moyennant certaines hypothèses, un système planétaire est probablement stable. Et ceci dans le sens précis suivant. Considérons une donnée initiale (positions et vitesses au temps zéro). La probabilité pour qu'elle donne une trajectoire instable est nulle. Mais — et c'est là le hic — une petite variante de cette donnée initiale peut le rendre instable.

Mais la réponse « finale » à la question de la stabilité de notre système solaire n'est venue que récemment, des travaux de G.J. Sussman et J. Wisdom (en 1988) et surtout de Jacques Laskar depuis 1989.

Pour l'expliquer, il faut parler un peu d'un sujet à la mode depuis une quinzaine d'années : la théorie du chaos.

Commençons par un exemple simple : le jeu de dés.

Quand nous lançons un dé, nous le lachons à un certain moment avec une position et une vitesse donnée, et les équations de la mécanique nous disent que la suite de son mouvement est déterminée.

Mais bien sûr, il va s'arrêter sur une face au hasard (avec une probabilité de un sur six).

Comment expliquer ce paradoxe apparent qu'un mouvement totalement déterminé mène à un résultat aléatoire (c'est-à-dire laissant la place au hasard).

La réponse est qu'on ne peut pas déterminer *exactement* la position et la vitesse du dé. Si on essaie de le lancer deux fois de la même manière, on aura toujours un petit écart — fût-il d'un dixième de millimètre. Et au premier rebond du dé cet écart minime pourra le faire rebondir d'un côté ou d'un autre, ce qui amènera un écart important au deuxième rebond, écart qui ne fera que s'amplifier.

En résumé, le dé a un comportement probabiliste parce qu'un petit écart de position à un moment donné (écart trop petit pour être observé) donne lieu rapidement à un écart beaucoup plus grand.

En mathématique, on dit qu'un système est *chaotique* s'il est régi par des équations différentielles telles qu'un petit écart de position soit multiplié — par exemple par 10 — dans un temps petit par rapport à la période d'observation.

En utilisant des ordinateurs, et un modèle mathématique adapté pour les équations du système solaire, J. Laskar a « suivi » les mouvements des planètes sur 200 millions d'années, en faisant varier plusieurs fois les conditions initiales (positions et vitesses à l'instant de départ).

Ces calculs montrent que les trajectoires des grosses planètes (Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune) sont stables : elles ne varieront pas pendant plusieurs milliards d'années.

Par contre, les trajectoires des petites planètes intérieures (Mercure, Vénus, la Terre et Mars) sont chaotiques : un écart de position d'un centimètre peut devenir un million de kilomètres en 200 millions d'années.

Même si les équations du mouvement sont parfaitement déterministes et ne laissent aucune place au hasard, il est évidement impossible de mesurer les positions des planètes à un centimètre près, et donc de dire où elles seront dans 200 millions d'années à un million de kilomètres près.

Les calculs de Laskar en disent plus :

Les mouvements de Vénus, la Terre et Mars sont chaotiques — et les orbites de ces planètes peuvent varier fortement mais elles restent toutefois dans des bandes séparées.

Par contre, Mercure pourrait traverser l'orbite de Vénus, et même être éjectée du système solaire.

De façon plus concrète, ces calculs donnent une explication du comportement mystérieux de Vénus. En effet, alors que les huit autres planètes tournent toutes sur elles-mêmes dans le même sens (le soleil se lève à l'Est), Vénus tourne dans l'autre sens.

Explication : le modèle montre que la position de l'axe de rotation de Vénus est chaotique, et qu'il a pu se retourner plusieurs fois depuis la création du système solaire.

Si Vénus tourne dans l'autre sens que les autres planètes, ce n'est pas de façon systématique, mais de façon variable.

Des calculs montrent aussi que si la lune n'existait pas, l'axe de la Terre serait lui aussi instable : au lieu de rester à 23° 30, il pourrait passer de 0 à 60° en deux millions d'années, avec des conséquences sur le climat qui nous auraient sans doute empêché d'être ici pour les étudier ! Heureusement pour nous, la lune est bien là.

Pour conclure ce paragraphe, je voudrais préciser que ces résultats récents ne contredisent pas ceux de Newton, Adams ou Le Verrier, mais qu'ils les prolongent.

Pendant 4000 ans, les observations astronomiques donnent l'image d'une situation stable.

De même, les calculs de Laskar confirment que les trajectoires des planètes resteront stables pendant au moins un million d'année — ce qui aurait rassuré le roi Oscar.

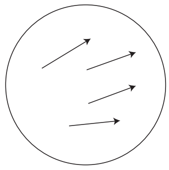
Mais à l'échelle de l'univers avec un système solaire vieux de 5 milliards d'années, une étude sur 200 millions d'années a un sens, et à cette échelle de temps apparaissemt des instabilités.

L'analyse mathématique donne des résultats précis, et précise aussi à quelle échelle de temps physique ces résultats s'appliquent.

3. Le théorème de la boule chevelue

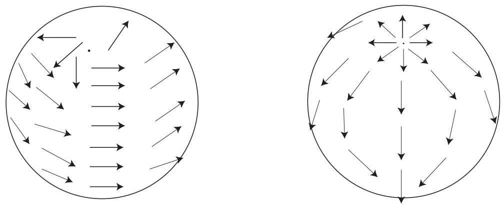
Voici un théorème de topologie, qui n'a été motivé que par l'étude pure de cette branche.

Considérons une sphère (la surface d'une boule) et en chaque point de cette surface un vecteur tangent : on parle d'un champ de vecteurs tangents à la sphère. On peut envisager cet objet en imaginant un cheveu planté en chaque point de la sphère et coiffé à plat (des cheveux coiffés en brosse ne sont pas tangents à la sphère).

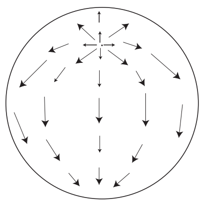


On demande que ce champ de vecteurs ait deux propriétés. Il doit être non nul, c'est-à -dire qu'aucun vecteur n'est réduit à 0. Il doit être continu, ce qui intuitivement signifie que si 2 points sont proches l'un de l'autre, les vecteurs correspondants le sont aussi.

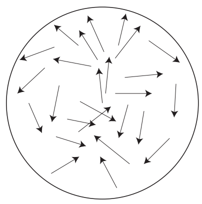
Le théorème peut-être un peu inattendu dit qu'un tel champ de vecteurs n'existe pas sur la sphère. Les quelques dessins qui suivent montrent ce qui ne marche pas.



Deux champs de vecteurs non continus aux pôles



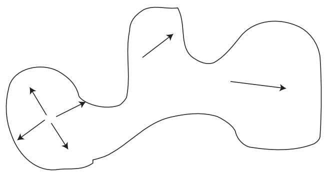
Un champ de vecteurs nul aux pôles



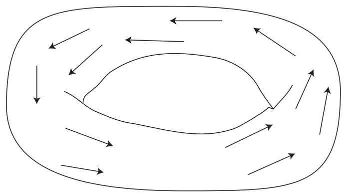
Champ de vecteurs non continu en un seul point

Intuitivement, on peut dire que si on essaie de coiffer à plat une sphère, on aura toujours un épi ou une ligne.

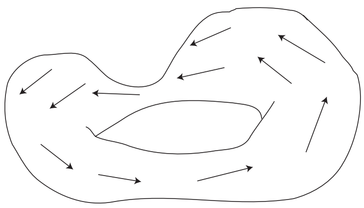
Une première remarque est que ce théorème reste vrai si on déforme la sphère en ellipsoide ou en n'importe quelle forme comme on pourrait le faire avec un ballon en caoutchouc.



Par contre, sur un tore (un pneu), on trouve facilement un champ de vecteurs continu non nul.



et ceci reste vrai si on déforme le tore :



Les propriétés des champs de vecteurs reflètent donc la forme générale de la surface (le fait qu'il y a un trou dans le tore et pas dans la sphère).

Voilà un théorème typique de topologie, suivant le développement interne de cette branche de mathématique pure sans souci des applications.

Et pourtant … Depuis les années soixante, on s'intéresse fortement à la fusion nucléaire comme source d'énergie de l'avenir. Cette réaction utilise de l'hydrogène (et non de l'uranium comme la fission, utilisée actuelllement). Elle permettrait de produire de l'énergie au départ de l'hydrogène de l'eau des océans, sans produire de résidus radioactifs.

C'est la réaction qui se produit dans les étoiles, et la difficulté majeure est qu'elle ne peut se produire qu'à très haute température et pression, lorsque la matière est à l'état de plasma.

Toutes les particules sont en mouvement rapide, et un récipient dans lequel on mettrait ce plasma fondrait.

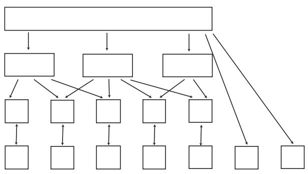
La solution proposée est de contenir le plasma en suspension en l'air par des champs magnétiques (une « bouteille magnétique »). Il pourrait sembler naturel de faire une telle bouteille en forme de boule, mais le théorème de la boule chevelue implique immédiatement que c'est impossible, le champ de vitesse des particules à la surface donnerait une contradiction.

On essaie donc de construire ces bouteilles magnétiques en forme de tore.

Un des plus grand est le JET (Joint European Torus) situé près d'Oxford et fruit d'une large coopération européenne.

Mais la réalisation est difficile (on n'y est pas encore !) et demande en particulier de sérieuses études théoriques mathématiques sur le transport de la matière et de la chaleur à l'intérieur du tore.

Remarquons qu'un théorème mathématique obtenu à l'époque où la fusion nucléaire n'était même pas concevable y trouve ainsi une application directe. C'est une application découlant de la théorie générale : on peut compléter le schéma 2 par des flèches comme suit :



Soulignons aussi qu'on a pu donner une information importante sur des équations qu'on ne peut pas résoudre.

À ce stade je pourrais discuter brièvement une question importante : comment reconnaître un bon théorème en mathématique ?

On pourrait au moins demander que le théorème soit vrai, qu'il n'y ait pas de faute dans la démonstration.

Ce n'est pas un critère absolu : le théorème de Fermat a joué un rôle important dans le développement des mathématiques, et ce rôle aurait été le même si l'énoncé avait été faux. De même, un célèbre énoncé de Riemann (1859) n'a toujours pas été démontré et joue cependant un rôle important en théorie des nombres.

Ceci dit, ce sont des exceptions et on souhaite bien sûr que les théorèmes soient corrects, mais ceci n'implique pas qu'ils soient intéressants.

On pourrait aussi penser aux applications, mais les exemples donnés montrent que ce n'est pas un bon critère : si à chaque instant on avait gardé en vue une application immédiate des mathématiques, on n'aurait jamais dépassé le niveau II dans le schéma 2, et non seulement les mathématiques seraient presque inexistantes, mais un grand nombre de leurs applications seraient inconnues. Le théorème de la boule chevelue était un bon théorème de mathématique, et il s'est appliqué beaucoup plus tard à la physique. En fait, la physique des particules élémentaires se fait aujourd'hui à coups de groupes (créés par Galois pour étudier l'équation du 5^{e} degré) et de topologie ... deux branches qui existaient avant qu'on les emploie.

Alors, dans ce vaste corps des mathématiques pures qui progresse pour lui même, sans être lié aux applications, comment reconnaître un bon résultat ?

Le mathématicien Hardy écrivait : « Le test suprême est la beauté. Il n'y a pas de place permanente au monde pour de vilaines mathématiques ».

Avant de nous demander s'il avait raison, essayons de comprendre cette notion de beauté : pourquoi dira-t-on que tel résultat est beau ? Je répondrai d'abord par une autre question : pourquoi le 3ème Concerto de Beethoven est-il beau ? Cette question est évidemment sans réponse : on peut percevoir sa beauté, mais pas l'expliquer. Il en est en grande partie de même en mathématique, mais là on peut tenter d'expliquer un petit peu. Un mathématicien trouve un résultat beau si en le voyant, il se rend compte que c'est exactement cela qu'il fallait faire, et qu'un résultat dans une direction différente n'aurait pas été si instructif, ou si ce résultat établit des liens entre des théories qui avant n'en avaient pas, ou si brusquement on comprend mieux une quantité d'autres énoncés, qui, quoique démontrés, n'étaient pas vraiment compris, et qui apparaissent éclairés par une meilleure perspective, comme lorsqu'à la dernière page d'un roman policier, tous les faits inexpliqués décrits par l'auteur deviennent clairs et naturels. Ou au fond, comme Hardy, il trouve le résultat beau sans l'expliquer du tout.

Certainement, comme beaucoup d'autres, je me laisse guider par la beauté telle que le la perçois dans mon travail de mathématicien, donnant ainsi raison à Hardy, et bien souvent il apparaît qu'une belle théorie enrichit l'ensemble des mathématiques, ce qui mène ensuite à des applications utiles.

4. La transformée de Radon

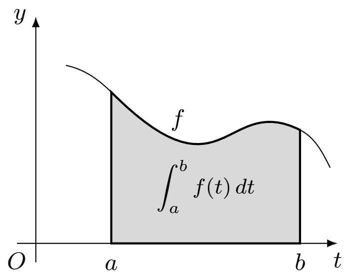
Nous avons vu que la mécanique céleste a conduit au développement du calcul différentiel. Il est apparu que bon nombre de phénomènes naturels étaient régis par des équations différentielles. Ceci justifie une fois pour toute l'étude de cette théorie mathématique, qui s'est alors développée pour elle-même.

Voici un exemple de résultat appartenant à cette théorie.

Rappelons d'abord que si $f(t)$ est une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$, son intégrale.

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

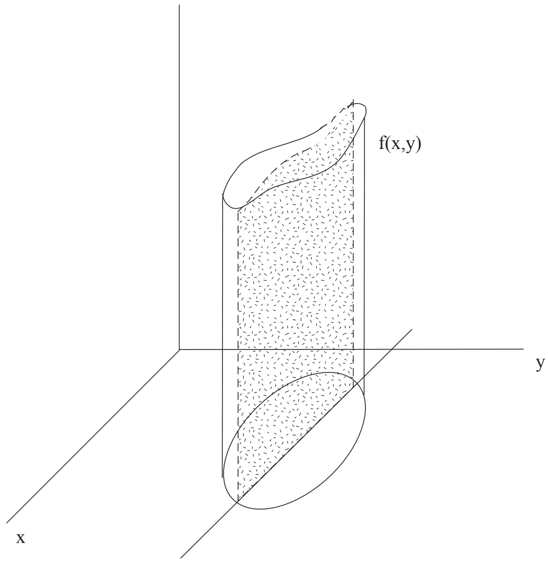
représente l'aire comprise sous son graphe, et que le processus d'intégration est en quelque sorte inverse de la dérivation.



Considérons maintenant une fonction de 2 variables $f(x, y)$ définie sur un domaine du plan, par exemple un disque. À toute droite traversant ce disque, on associe l'intégrale de f sur l'intervalle constitué par l'intersection du disque et de la droite. Il s'agit donc de l'aire indiquée sur le dessin (p. suivante).

Supposons que la droite est d'équation $y = Ax + B$: elle est donc déterminée par les nombres A et B, et on peut noter $S(A, B)$ l'aire attachée à la droite.

À la fonction $f(x, y)$ on a ainsi associé une nouvelle fonction $S(A, B)$. On peut alors se demander si connaissant la fonction S, on peut retrouver la fonction f. Il ne s'agit pas seulement d'une question de calcul pratique,

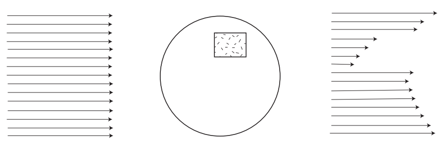


mais il faut s'assurer que deux fonctions f et g différentes ne peuvent pas donner la même fonction S, car sinon de S on ne saura pas s'il faut remonter à f ou à g.

La réponse est oui, S détermine f. C'est le théorème de la transformée de Radon.

Il a été démontré par Radon en 1917, simplement parce qu'il était intéressé par l'étude abstraite du calcul différentiel et intégral, sans souci des applications.

Vous vous doutez maintenant que si je donne cet exemple, c'est qu'il a débouché sur une application inattendue : le scanner médical. En effet, lorsqu'on fait une radiographie d'un corps, on envoie des rayons qui sont affaiblis lorsqu'ils rencontrent la matière, et la quantité soustraite mesure l'intégrale de la densité de matière sur le chemin parcouru.



Pour chaque droite d'une direction donnée, on a donc la valeur de l'intégrale de la fonction sur la droite. Si on fait tourner l'appareil et qu'on prend une radio dans chaque direction, on a complètement la fonction S, et le théorème de Radon garantit que f est déterminé.

En d'autres termes, deux tumeurs différentes ne peuvent donner le même résultat.

Mais l'application réelle est plus difficile. On a montré en 1977 que si on ne faisait qu'un nombre fini de radiographies (ce qui évidemment est le cas), on ne pouvait pas toujours reconstituer la position des tumeurs. Mathématiquement deux fonctions f différentes peuvent donner lieu aux mêmes intégrales sur un nombre fini de directions de droites.

Et ce problème est traité par d'autres méthodes mathématiques, assurant une détection de tumeurs avec une très forte probabilité.

5. Des lapins et des fractals

Nous voulons maintenant étudier la croissance d'une population sur un territoire (des bactéries sur une plaque, des lapins dans un terrain vague, ou même la population humaine). Comment exprimer cette croissance mathématiquement ?

À intervalles réguliers, on compte les individus dans la population, et on note y_1, y_2, ..., y_n, ... le nombre obtenu au temps n.

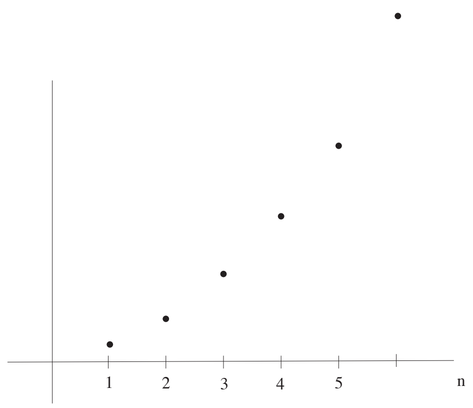
Une première idée pour décrire la croissance est que sur un intervalle de temps, les parents lapins auront des bébés lapins, qu'il y aura aussi des morts, et cela proportionnellement au nombre de lapins, donc :

$$y_{n+1} = y_n + a \cdot y_n,$$

le coefficient a étant le taux de croissance.
Si on résout cette équation, on a

$$\begin{aligned} y_n &= (1+a)y_{n-1} = (1+a)^2 y_{n-2} = \cdots \\ &= (1+a)^n y_0, \end{aligned}$$

ce qui fournit une croissance exponentielle



Ceci est manifestement impossible et contraire à toute expérience : tant qu'il y a peu d'individus par rapport aux ressources existantes sur le terrain, cette croissance est possible, mais le terrain étant fini, la croissance doit ralentir puis s'arrêter.

Verhulst a suggéré en 1845 que le taux de croissance devrait être variable, et diminuer avec le nombre d'individus, et il a proposé comme taux

$$a - by_n,$$

Dès lors, lorsque $y_n = a/b$, la croissance s'arrête. Nous avons donc l'équation de Verhulst :

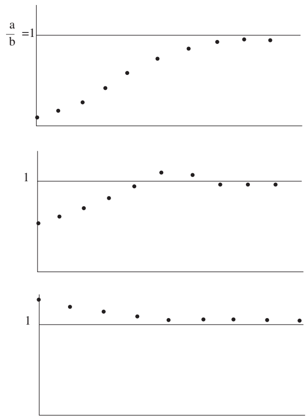
$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + (a - by_n)y_n \quad \text{c'est-à-dire} \\ y_{n+1} &= y_n + ay_n - by_n^2 \end{aligned}$$

Et il apparaît expérimentalement que cette équation simple est extraordinairement bonne : les bactéries, les animaux et même la population humaine respectent cette loi de très près.

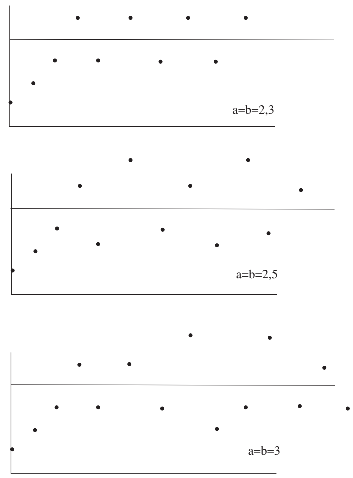
Incidemment, ce que j'ai décrit ci-dessus est un processus de modélisation : on invente une équation pour décrire une situation en la justifiant tant bien que mal (pourquoi un taux $a - by_n$ et pas $a - by_n^2$ par exemple ?) puis on vérifie que le modèle est bon, c'est-à-dire que les solutions de l'équation coïncident avec les observations expérimentales.

Esquissons sur des graphes les valeurs des solutions. Pour simplifier prenons le cas $a = b$.

Lorsque $a = b < 2$, suivant les valeurs initiales y_0, on obtient des graphes ressemblant à :



Dans tous ces cas, la population tend vers une valeur limite a/b quand t devient grand — ce qui est le comportement attendu. Mais lorsque $a = b$ dépassent 2, on obtient des graphes très différents. Ainsi, quand a et b croissent, le graphe s'approche d'abord d'un graphe périodique, puis devient très irrégulier. On dit alors que le comportement est chaotique. Il n'y a donc plus de valeur limite à la population, elle oscille autour de la valeur a/b.



En résumé, suivant les valeurs de a et b, on a des comportements différents à la limite pour n tendant vers l'infini.

Cette observation concernant une équation vieille de plus d'un siècle a donné lieu récemment (depuis 1975) à de spectaculaires développements en mathématique pure.

Pour voir apparaître de nouveaux comportements, on passe de la droite au plan : on remplace la loi $y_n \to y_{n+1}$ dans $\mathbf{R}$ par une loi $z_n \to z_{n+1}$ dans $\mathbf{R}^2$.

Une loi extrêmement simple peut être choisie en considérant $\mathbf{R}^2$ comme plan des nombres complexes, et en posant

$$z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

où $c \in \mathbf{C}$ est fixé.

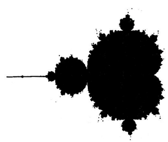
Si on souhaite éviter les nombres complexes, on notera (x_n, y_n) les coordonnées du point z_n et on définira la loi $(x_n, y_n) \to (x_{n+1}, y_{n+1})$ par

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n^2 - y_n^2 + c_1 \\ y_{n+1} &= 2x_n y_n + c_2 \end{aligned}$$

où $c = (c_1, c_2)$ est un couple de réels, que l'on représentera comme un point d'un autre plan.

À nouveau, suivant la valeur de c, le processus aura des comportements différents quand n tend vers l'infini. Leur description est plus compliquée que dans la cas de l' équation de Verhulst, mais disons qu'il y a essentiellement deux comportements.

Dans le plan du point c, dessinons en noir les points correspondant à un comportement, en blanc les autres. On pourrait s'attendre, l'équation de z_{n+1} étant extrêmement simple, à ce que les régions noires et blanches le soient aussi, par exemple un disque et son complément.
Or, bien au contraire, l'ensemble des points noirs est extrêmement compliqué, le dessin ci-après en donnant une vue approximative.



(Pour une spectaculaire collection de photos en couleurs d'ensembles de ce type, voir le livre de H. Peitgen et P. Ritcher cité dans la bibliographie, dont ce dessin est tiré).

Cet ensemble est appelé ensemble de Mandelbrot. Comme on le soupçonne sur le dessin, son bord est extrêmement compliqué : il est constitué de morceaux de cercles, avec des morceaux de cercles de plus en plus petits attachés dessus et ceci indéfiniment. En fait, si on dessine un carré bien choisi sur le dessin et qu'on l'agrandit, on retrouve le même dessin. Si on repète cette opération 2 fois, 1000 fois, un milliard de fois, on retrouve toujours le même dessin. On peut penser à une côte rocheuse déchiquetée, et dont le moindre millimètre carré est tout aussi déchiqueté que la côte entière. Un tel ensemble est appelé fractal.

On a démontré depuis 1980 (Mandelbrot, Douady, Hubbard, ...) que ces phénomènes n'étaient pas liés à la forme particulière de l'équation de z_{n+1}, mais apparaissaient toujours et de la même façon pour une énorme famille de processus. Il y a donc là quelque chose de très profond.

Pendant longtemps, on a considéré que des ensembles aussi compliqués étaient des anomalies qu'il ne fallait pas étudier — on se contentait de se restreindre à des cas où ils n'apparaissaient pas. Et c'est seulement récemment qu'on a perçu qu'ils avaient leur vraie place en mathématique.

Le bord de l'ensemble, avec toute sa complication, est appelé ensemble de transition, puisqu'on passe d'un comportement à l'autre.

Et les physiciens ont rejoint les mathématiciens : certaines transitions de phase en magnétisme (la manière dont un aimant chauffé perd son magnétisme) donnent lieu à des ensembles tout à fait similaires.

Notons aussi que la description du comportement chaotique du système solaire fait partie du même élargissement des notions considérées en mathématique.

Dans les deux cas, l'ordinateur a joué un rôle dans le développement de la théorie, non pas parce qu'il démontre des théorèmes, mais parce qu'il peut faire un nombre de calculs impossible auparavant, et que ces calculs servent d'exemples et de moteur à l'intuition.

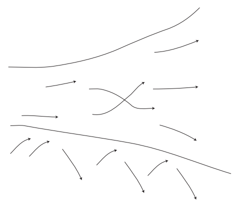
Si Mandelbrot, Douady et Hubbard ont pu démontrer des propriétés des ensembles fractals, c'est parce qu'ils ont d'abord pu les observer sur des images informatiques.

Leurs démonstrations sont toutefois de nature théorique.

Conclusion ?

J'ai présenté ici quelques exemples de recherches mathématiques, en liaison avec des problèmes réels. Mais j'espère avoir montré que l'étude mathématique dépassait le problème initial, et qu'en fait il faut faire des mathématiques pour elles-mêmes si on veut encore à l'avenir résoudre des problèmes.

Dans un dernier schéma, je présenterai la mathématique comme une rivière qui avance indéfiniment, les différentes branches (algèbre, géométrie, analyse...) se mélangeant sans cesse. Son développement est influencé par les problèmes posés à l'extérieur, et elle fournit des réponses à ces problèmes, mais son développement se fait surtout en suivant sa dynamique interne, sa notion de beauté et d'harmonie.



Bibliographie

Un certain nombre de mathématiciens ont heureusement accompli depuis quelques années de sérieux efforts pour expliquer leur branche à des non-spécialistes.

Je recommande en particulier les livres suivants :

– Ian Stewart, *From here to infinity. A guide to today's mathematics*, Oxford Univ. Press (1996)
  Ce livre est une réédition mise à jour de *The problems of mathematics* qu'il avait publié en 1987 (et traduit en français chez Pour la science-Belin sous le titre *Les mathématiques*).
  L'auteur dresse un panorama assez complet des mathématiques d'aujourd'hui, en évitant les développements techniques. Pour ce livre, un minimum de connaissance mathématique est toutefois nécessaire pour certains chapitres.
– S. Hildelbrandt, A. Tromba, *Mathématiques et formes optimales.* Pour la science, Belin (1986).

Les auteurs montrent par un texte clair et de nombreuses photos comment des principes de moindre action imposent différentes formes — il est question de physique, de bulles de savon, de cristaux, d'architectures, de nids d'abeilles.

– Ivar EKELAND, *Le chaos*, Dominos Flammarion (1995)
  L'auteur donne un exposé particulièrement clair et précis de la théorie du chaos.
– La mission Voyager 2 évoquée au § 2 pose un nombre énorme de problèmes mathématiques : en plus du contrôle de la trajectoire et de l'orientation du satellite, on peut mentionner la transmission rapide des données à plusieurs milliards de kilomètres de distance. On en aura une idée en lisant :
  R. LAESER, W. MCLAUGHLIN, D. WOLFF, La Mission Voyager 2 : une prouesse technique. *Pour la science* n° 111, Janvier 1987.
  Le sujet des fractals fournit de spectaculaires photos en couleurs des ensembles de Mandelbrot. On trouvera ces photos et des explications théoriques claires dans :
  H.O. PEITGEN, P.H. RICHTER, *The beauty of fractals*, Springer Verlag 1986.
– Enfin, ceux qui en auront l'occasion ne rateront pas le programme *Fermat's Last Theorem*, réalisé par S. SINGH et J. LYNCH pour la série *Horizon* de la BBC (on en trouve le texte sur `http://www.bbc.co.uk/horizon/fermat.shtml`). Le progamme, extraordinairement vivant, montre la vie des chercheurs tout en racontant la « saga » du théorème de Fermat-Wiles.

Comme je l'ai indiqué, cet article présente un point de vue partiel et personnel sur les mathématiques. Toutefois, il a bénéficié des commentaires de M. Cahen, J. Doyen, M. Parker, A. Valette et P. Van Praag.

Je remercie également la Communauté française de Belgique, qui soutient mon travail par une Action de Recherche Concertée de la Direction de la Recherche scientifique.

Bibliographie

Charlotte Bouckaert

Albrecht Beutelspacher,
Pourquoi j'ai toujours été nul(le) en maths ...,
Belin (coll. *Regards*), Paris, 2007 ;
ISBN : 978-2701137193 ; 191 pp., 17 € ;
traduit de l'allemand par Evelyne Host Platret
(titre original : *In Mathe war ich immer schlecht ...*).

Les éditions Belin m'ont rarement déçue, mais il fallait plus qu'un titre comme *Pourquoi j'ai toujours été nul en maths ...* pour me convaincre d'acheter le livre. Un regard plus attentif m'a fait reconnaître le nom de l'auteur : Albrecht Beutelspacher, que j'avais prévu d'écouter peu de temps après ([1]) et j'ai décidé d'en apprendre plus sur le fondateur du *Mathematikum.*

Bien m'en prit, car j'ai passé ensuite quelques heures de pur plaisir à savourer l'humour et la justesse de ton.

Dans l'avant-propos, l'auteur s'adresse à quiconque
– aime les mathématiques,
– déteste les mathématiques, ou
– qui a tout simplement « toujours été nul en maths ».
Mais il l'a écrit en pensant
– aux étudiants en mathématiques,
– aux professeurs de mathématiques, et
– aux élèves que cela intéresse.

Le livre comporte cinq parties, dont la première est « Qu'est-ce que les mathématiques ? » dans laquelle Beutelspacher pratique l'exercice périlleux de définir les mathématiques. On y trouve des réflexions limpides et profondes sur la nature des mathématiques. Voici un petit extrait de la fin du premier chapitre :

> Les mathématiques sont une manière d'apprendre à connaître le monde.

([1]) Voir `http://dev.ulb.ac.be/urem/Le-Mathematikum-presente-par`

> Beaucoup de gens croient que les mathématiques sont essentiellement un jeu de perles de verre, une virtuosité manuelle jonglant avec les formules, un calcul complexe qui produit des formules automatiquement.
>
> Non ! En italien, on opposerait à ce point de vue : « prima la matematica, poi le formule ! » ...
>
> ... Bref, les mathématiques nous ouvrent les yeux sur la beauté du monde.
>
> – Quand nous prenons conscience du concept de symétrie, nous voyons dans le monde beaucoup plus d'objets symétriques (et asymétriques) qu'auparavant.
> – Dès lors que nous connaissons les propriétés les plus simples des probabilités, nous constatons que le monde est plein de phénomènes fortuits.
> – Même si nous n'avons compris qu'un petit peu de ce qu'est l'infini, nous découvrirons constamment des phénomènes qui nous rappellent l'infini.
>
> [Chap. 1, pp. 24 – 25.]

Dans la seconde partie « Les mathématiques vues de l'extérieur », on trouve, par exemple, le top 10 des théorèmes mathématiques. La troisième partie « Faisons des maths » comporte des énigmes tout à fait divertissantes comme celle des maris infidèles (p. 87). « Les mathématiques et les mathématiciens », quatrième partie, est un chef d'œuvre d'humour dont la lecture est recommandée à tous.

> Il existe trois sortes de mathématiciens : ceux qui savent compter jusqu'à trois et ceux qui ne le savent pas.
>
> [Chap. 16, p. 144.]

On trouve dans la cinquième partie « Les mathématiques appliquées » une comédie en cinq actes, de la cryptographie et un petit bijou : « une application surprenante du bon vieux cube », que je laisse au lecteur le soin de découvrir (pp. 185 – 191).

Problèmes

Claudine Festraets (1)

Géométrie

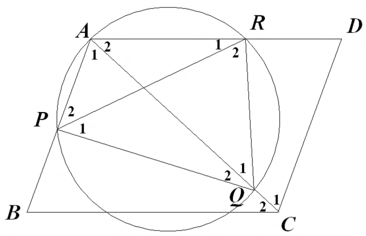
Problème n° 346 de *M&P* n° 164

Un cercle comprend le sommet A d'un parallélogramme ABCD et coupe le côté AB en P, le côté AD en R et la diagonale AC en Q. Démontrer que $|AQ| \cdot |AC| = |AP| \cdot |AB| + |AR| \cdot |AD|$.

Solution de J. Anseeuw, de Roeselare

Traçons les segments $|RP|$, $|PQ|$ er $|QR|$. Dans le quadrilatère inscrit $APQR$ et dans le parallélogramme $ABCD$, on a les égalités :

$$\widehat{A_1} = \widehat{R_2}, \widehat{A_2} = \widehat{P_1}, \widehat{R_1} = \widehat{Q_2} \text{ et } \widehat{P_2} = \widehat{Q_1},$$
$$\widehat{A_1} = \widehat{C_1}, \widehat{A_2} = \widehat{C_2} \text{ et } \widehat{B} = \widehat{D} = 180^\circ - \widehat{A} = \widehat{Q_1} + \widehat{Q_2}.$$



Les triangles CAD et RPQ sont semblables :

$$\frac{|AD|}{|PQ|} = \frac{|AC|}{|PR|} = \frac{|DC|}{|QR|} \tag{1}$$

Les triangles ACB et RPQ sont aussi semblables :

$$\frac{|AC|}{|RP|} = \frac{|AB|}{|RQ|} = \frac{|CB|}{|PQ|} \tag{2}$$

(1) Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à Cl. Festraets, Rue J.-B. Vandercammen 36, B-1160 Bruxelles ou à l'adresse e-mail hamoircl@brutele.be.

Appliquons le théorème de Ptolémée dans le quadrilatère inscrit $ARQP$:

$$|AQ| \cdot |PR| = |AP| \cdot |RQ| + |AR| \cdot |PQ|$$

De (1) et (2), $\dfrac{|AC|}{|PR|} = \dfrac{|AB|}{|RQ|} = \dfrac{|AD|}{|PQ|}$, d'où

$$|AQ| \cdot |PR| \cdot \frac{|AC|}{|PR|} = |AP| \cdot |RQ| \cdot \frac{|AB|}{|RQ|} + |AR| \cdot |PQ| \cdot \frac{|AD|}{|PQ|}$$

ou encore

$$|AQ| \cdot |AC| = |AP| \cdot |AB| + |AR| \cdot |AD|.$$

Bonnes solutions de R. Choulet, d'Avenay (France), de J. Ooms, de Chimay et de J. Rasse, de Méan.

Divisibilité

Problème n° 347 de *M&P* n° 164

Démontrer que le produit

$$(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

est divisible par 12*, pour tous nombres entiers* a, b, c, d.

Solution de P. Le Gall, de Metz (France)

Nous rappelons le résultat suivant, dit du déterminant de Vandermonde :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

Si nous calculons ce déterminant en combinant les lignes :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 & d^2-1 \\ a^3-a & b^3-b & c^3-c & d^3-d \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a(a-1) & b(b-1) & c(c-1) & d(d-1) \\ a(a-1)(a+1) & b(b-1)(b+1) & c(c-1)(c+1) & d(d-1)(d+1) \end{vmatrix}.$$

Tous les termes de la dernière ligne sont des multiples de 6, car il s'agit de produits de trois entiers consécutifs : l'un d'eux est un multiple de 3, et au moins l'un d'eux est pair. On peut donc factoriser 6 et diviser tous les termes de la dernière ligne par 6. De même tous les termes de la troisième ligne sont pairs, on peut donc factoriser 2. Donc D est un multiple de 12.

Bonnes solutions de J. ANSEEUW, de Roeselare, de R. CHOULET, d'Avenay (France), de M. HAUSTGEN, de Dippach (G.-D. de Luxembourg), de P. LECOMTE, de Liège, de J. OOMS, de Chimay et de J. RASSE, de Méan.

Fonction

Problème n° 348 de *M&P* n° 164

On considère la suite

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots, \underbrace{n, n, \ldots, n}_{n \text{ nombres } n}, \ldots$$

Trouver une fonction $f(x)$ telle que le x^e terme de cette suite soit donné par $\lfloor f(x) \rfloor$.

Solution de R. Choulet, de Avenay (France)

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc définie par :
- $u_1 = 1$;
- Pour $2 \leqslant k \leqslant 3$: $u_k = 2$;
- Pour $4 \leqslant k \leqslant 6$: $u_k = 3$;
- Et plus généralement, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\text{si } 1 + \frac{n(n-1)}{2} \leqslant k \leqslant \frac{n(n+1)}{2} \text{ alors } u_k = n.$$

Le problème est d'« inverser le k et le n ». La double inégalité est équivalente à

$$\begin{cases} n^2 - n + 2 - 2k \leqslant 0 \\ n^2 + n - 2k \geqslant 0. \end{cases}$$

Ceci équivaut encore à :

$$\frac{-1 + \sqrt{8k+1}}{2} \leqslant n \leqslant \frac{1 + \sqrt{8k-7}}{2}.$$

Je remarque immédiatement que si $n \leqslant \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{8k-7}\right)$, alors $n \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2k}$ et de même que si $\frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{8k+1}\right) \leqslant n$, alors $n + 1 \geqslant \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{8k+1}\right) >$ $> \frac{1}{2} + \sqrt{2k}$, donc :

$$n \text{ est la partie entière de } \frac{1}{2} + \sqrt{2k}.$$

En d'autres termes : la fonction f qui à tout $n \geqslant 1$ associe la partie entière de $\frac{1}{2} + \sqrt{2n}$ est telle que $f(n) = u_n$.

Bonnes solutions de J. Anseeuw, de Roeselare, de M. Haustgen, de Dippach (G.-D. de Luxembourg), de J. Rasse, de Méan et de J. G. Segers, de Liège.

Dans la solution du problème 326 publiée dans le numéro 164 de *M&P*, la ligne 20 du programme doit être corrigée comme suit :

```
20 FOR A=1 TO INT((N-2)/3).
```

Une solution du problème 333 est parue dans le numéro 164 de *M&P*. En voici une solution plus courte.

Polynômes

Problème n° 333 de *M&P* n° 159

Déterminer tous les polynômes $P(x)$ à coefficients réels tels que

$$P(x) \cdot P(x+1) = P(x^2 + x + 1).$$

Solution de P. Le Gall, de Metz (France)

Le polynôme nul est une solution évidente du problème. Cherchons les autres.

Soit P un polynôme non nul répondant à la question, nous allons établir successivement les résultats suivants :

- P est de degré pair.
- Le terme dominant de P a pour coefficient 1.
- Il ne peut pas il y avoir deux polynômes distincts de même degré solutions du problème.
- Les solutions sont les polynômes $(X^2 + 1)^n$ avec n entier quelconque.

1. Soit α une racine réelle de P. Alors tous les termes de la suite définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$ et le premier terme α sont aussi des racines réelles de P. On montre que cette suite est strictement croissante. On aurait donc un polynôme doté d'une infinité de racines. C'est impossible, donc P n'a pas de racine réelle, donc il est de degré pair.
2. Soit $a_k X^k$ le terme dominant de P. En développant la relation donnée par l'énoncé, on obtient par l'égalité des termes dominants : $a_k^2 = a_k$, d'où $a_k = 1$ car le coefficient du terme dominant est non nul.

3. Soient P et Q deux solutions distinctes de degré n. On a donc les égalités :

$$P(X)P(X+1) = P(X^2+X+1) \text{ et } Q(X)Q(X+1) = Q(X^2+X+1).$$

Posons $R = P - Q$; on a donc

$$(Q+R)(X) \cdot (Q+R)(X+1) = (Q+R)(X^2+X+1),$$

d'où :

$$Q(X)Q(X+1)+Q(X)R(X+1)+R(X)Q(X+1)+R(X)R(X+1) = \\ = Q(X^2+X+1) + R(X^2+X+1)$$

On en déduit que :

$$Q(X)R(X+1)+R(X)Q(X+1)+R(X)R(X+1) = R(X^2+X+1) \quad (3)$$

Soit m le degré de R. On sait que P et Q ont le même terme dominant, donc $P - Q$ est de degré strictement inférieur à n.

Dans l'égalité (3), le polynôme du membre de gauche a pour degré $n+m$ et celui du membre de droite a pour degré $2m$. On a donc une contradiction, donc P et Q ne peuvent pas être des solutions distinctes de même degré.

4. Soit P le polynôme X^2+1 : il est solution du problème, puisque

$$\begin{aligned}(X^2+1)((X+1)^2+1) &= (X^2+1)(X^2+2X+2)\\ &= X^4+2X^3+3X^2+2X+2\\ &= (X^2+X+1)^2+1.\end{aligned}$$

Par ailleurs, de la relation $P(X)P(X+1) = P(X^2+X+1)$, on déduit que pour tout entier n non nul, $P^n(X)P^n(X+1) = P^n(X^2+X+1)$. La relation reste vérifiée pour $n = 0$ car le polynôme constant 1 est solution.

Les solutions non nulles sont donc les polynômes $(X^2+1)^n$ avec n naturel quelconque.

* *
*

Les solutions des problèmes que voici doivent me parvenir au plus tard deux mois après la parution de cette revue. Ces solutions peuvent être manuscrites, mais vous pouvez aussi les envoyer à mon adresse e-mail sous la forme d'un fichier LaTeX ou à défaut au format doc, pdf ou txt. Rédigez vos différentes solutions sur des feuilles séparées et n'oubliez pas d'indiquer votre nom sur chacune des feuilles.

Ceci est le dernier numéro de *M&P*, mais la rubrique continuera dans la future revue, *Losanges*, que vous recevrez à partir de semptembre ! N'hésitez donc pas, comme par le passé, à me proposer vos solutions aux problèmes que je vous soumets à chaque parution.

355. Facile

Parmi tous les rectangles dont la diagonale a une longueur fixée d, quel est celui qui a le plus grand périmètre, quel est celui qui a la plus grande aire ?

356. Puissances

Soit $E = a^b$ avec $a, b \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$. Déterminer tous les entiers positifs qui sont la somme d'un nombre fini de puissances du type E.

357. Colinéaires

Dans le triangle ABC, soient AD, BE et CF les bissectrices des angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ limitées au côté opposé. La médiatrice de $[AD]$ coupe BC en X, la médiatrice de $[BE]$ coupe AC en Y et la médiatrice de $[CF]$ coupe AB en Z. Démontrer que X, Y et Z sont alignés.

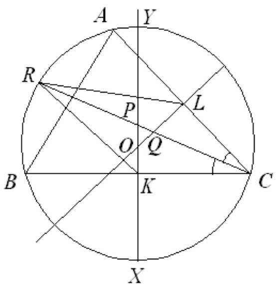
Olympiades

Claudine Festraets [1]

Voici les solutions des trois derniers problèmes proposés à l'Olympiade Internationale de Mathématique de 2007.

Problème 4.
Dans un triangle ABC, la bissectrice de l'angle $\widehat{BCA}$ recoupe le cercle circonscrit en R, coupe la médiatrice de BC en P et la médiatrice de AC en Q. Le milieu de BC est K et le milieu de AC est L. Montrer que les triangles RPK et RQL ont la même aire.

Solution.
Soit α l'amplitude de l'angle $\frac{1}{2}\widehat{BCA}$ et soient X et Y les points d'intersection de la médiatrice de $[BC]$ avec le cercle de centre O et de rayon r circonscrit au triangle ABC.



Les angles $\widehat{CQL}$ et $\widehat{CPK}$ ont même amplitude $90 - \alpha$, or $\widehat{OQP} = \widehat{CQL}$, d'où $\widehat{CPK} = \widehat{OQP}$ et le triangle POQ est isocèle avec $|OP| = |OQ|$. L'aire du triangle RPK vaut $\frac{1}{2}|RP| \cdot |PK| \cdot \sin \widehat{RPK}$. L'aire du triangle RQL vaut $\frac{1}{2}|RQ| \cdot |QL| \cdot \sin \widehat{RQL}$. Les angles $\widehat{RPK}$ et $\widehat{RQL}$ ont même amplitude $90 + \alpha$, donc il reste à démontrer que $|RP| \cdot |PK| = |RQ| \cdot |QL|$.

La puissance de P par rapport au cercle vaut $|RP| \cdot |PC| = |PX| \cdot |PY| = = \left(r^2 - |PO|^2\right)$, d'où $|RP| \cdot |PK| = |RP| \cdot |PC| \cdot \sin \alpha = \left(r^2 - |PO|^2\right) \sin \alpha$.

[1] Toute correspondance concernant cette rubrique sera adressée à Cl. Festraets, Rue J.-B. Vandercammen 36, B-1160 Bruxelles ou à l'adresse e-mail hamoircl@brutele.be.

De même, la puissance de Q par rapport au cercle vaut $|RQ| \cdot |QC|$, d'où $|RQ| \cdot |QL| = |RQ| \cdot |QC| \cdot \sin\alpha = \left(r^2 - |QO|^2\right)\sin\alpha$.

Or $|OP| = |OQ|$, d'où $|RP| \cdot |PK| = |RQ| \cdot |QL|$.

Problème 5.
Soit a et b deux entiers strictement positifs. Montrer que si $4ab-1$ divise $(4a^2-1)^2$, alors $a = b$.

Solution.
Supposons que $4ab-1$ divise $(4a^2-1)^2$ et que $a \neq b$. Comme

$$(4a^2-1)^2 \equiv (4a^2b-b)^2 \equiv ((4ab-1)a+a-b)^2 \equiv (a-b)^2 \bmod (4ab-1),$$

il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que

$$(a-b)^2 = k(4ab-1). \tag{1}$$

Puisque $a \neq b$, k n'est pas nul et l'égalité (1) devient $a^2-2ab(1+2k)+b^2+k = 0$, où les inconnues a et b sont des entiers strictement positifs.

Remarquons que si (a,b) est une solution, alors (b,a) est une autre solution à cause de la symétrie en a et b de l'équation.

Soit (x,y) une solution telle que $x > y$ et soit z la seconde solution correspondant à $b = y$. La somme et le produit des solutions x et z sont respectivement $x+z = 2y+4ky$ et $xz = y^2+k$. Ces deux égalités nous permettent d'affirmer que z est un nombre entier strictement positif. Démontrons que $z < y$.

$$\begin{aligned}
z < y &\Leftrightarrow 2y + 4ky < x + y \\
&\Leftrightarrow 4ky < x - y \\
&\Leftrightarrow 4ky(x-y) < (x-y)^2 && (\text{car } x > y) \\
&\Leftrightarrow 4ky(x-y) < k(4xy-1) && (\text{en vertu de } (1)) \\
&\Leftrightarrow -4y^2 < -1 \\
&\Leftrightarrow 4y^2 > 1,
\end{aligned}$$

ce qui est vrai. Donc (z,y) est une solution avec $y > z$ et $y < x$. Mais alors (y,z) est aussi une solution.

De la même façon, si t est la seconde solution correspondant à $b = z$, on démontrera que (z,t) est une solution avec $z > t$ et $z < y$.

Et ainsi de suite. On obtient une descente infinie de solutions entières et strictement positives dont le premier terme est de plus en plus petit tout en restant supérieur au second, ce qui est impossible. D'où $a = b$.

Problème 6.
Soit n un entier strictement positif. Dans l'espace, on considère l'ensemble

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\}, x + y + z > 0\},$$

constitué de $(n+1)^3 - 1$ points. Trouver le plus petit nombre de plans dont la réunion contient S mais ne contient pas $(0, 0, 0)$.

Solution.
Soit $E = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Il est clair que que les $3n$ plans d'équations $x = i$, $y = i$ et $z = i$, avec $i \in E \setminus \{0\}$, répondent à la question. Il s'agit de démontrer que $3n$ est le plus petit nombre de tels plans.

Soit P un polynôme à k variables x_1, x_2, …, x_k ; posons

$$T = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) : x_1, x_2, \ldots, x_k \in E \text{ et} \sum_{i=1}^{k} x_i > 0\}.$$

Par induction sur k, montrons que si P s'annule pour tout élément de T, alors le degré de P est supérieur ou égal à kn.

1. Si $k = 0$, alors P est un polynôme constant et $\mathrm{d}^\circ P = 0 \geqslant 0 \cdot n$.
   Si $k = 1$, alors P s'annule pour au moins n valeurs de sa variable et on a $\mathrm{d}^\circ P \geqslant n = 1 \cdot n$.
2. Supposons la propriété vraie pour tout polynôme à $k-1$ variables et démontrons-la pour un polynôme à k variables.
   Posons $x_k = y$ et divisons P par $D(y) = y(y-1)(y-2)\cdots(y-n)$.
   Il vient

   $$P(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, y) = \\ = D(y) \cdot Q(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}) + R(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, y).$$

   Clairement, $\mathrm{d}^\circ R \leqslant \mathrm{d}^\circ P$, R s'annule comme P pour tout élément de T et $R(0, 0 \ldots, 0) \neq 0$ car $P(0, 0, \ldots, 0) \neq 0$. De plus, $\mathrm{d}^\circ_y R < \mathrm{d}^\circ D = n + 1$, donc $\mathrm{d}^\circ_y R \leqslant n$.
   Développons R suivant les puissances de y :

   $$R(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, y) = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 y + a_0$$

   les a_i étant des polynômes en $(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})$ pour tout $i \in E$. Le polynôme $R(0, 0, \ldots, 0, y)$ s'annule pour tout $y \in \{1, 2, \ldots, n\}$, donc $\mathrm{d}^\circ_y R = n$ et $a_n(0, 0, \ldots, 0) \neq 0$.
   Choisissons x_1, x_2, …, $x_{k-1} \in E$ tels que $x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} > 0$.

$R(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, y)$ s'annule pour tout $y \in E$, c'est-à-dire pour $n+1$ valeurs de y, donc ce polynôme est identiquement nul et a_n s'annule pour les valeurs choisies de x_1, x_2, ..., x_{k-1} ; a_n est un polynôme à $k-1$ variables satisfaisant toutes conditions de l'induction, donc $\mathrm{d}^\circ a_n \geqslant (k-1) \cdot n$.
Dès lors, $\mathrm{d}^\circ P \geqslant \mathrm{d}^\circ R = n + \mathrm{d}^\circ a_n \geqslant n + (k-1) \cdot n = k \cdot n$.

Considérons maintenant t plans satisfaisant les conditions de l'énoncé et effectuons le produit des premiers membres de leurs équations. Nous obtenons le polynôme

$$P = \prod_{i=1}^{t} (a_i x + b_i y + c_i z + d_i),$$

qui s'annule pour $x, y, z \in E$ et $x + y + z > 0$.

En vertu de ce qui précède, $t = \mathrm{d}^\circ P \geqslant 3 \cdot n$, donc le plus petit nombre de plans vaut bien $3n$.

Le coin du trésorier

R. Scrève

Tarifs (Janvier 2008)

Affiliation à la SBPMef

Seules les personnes physiques peuvent se faire membre de la SBPMef. Les membres reçoivent *Mathématique et Pédagogie*, *SBPM-Infor* et les deux *Math--Jeunes*.

- Belgique :
  - Cotisation ordinaire : 24 € ;
  - Cotisation multiannuelle (5 ans) : 110 € ;
  - Cotisation familiale (réservée aux couples cohabitant ; les intéressés ne reçoivent qu'un exemplaire des publications, mais sont membres à part entière et participent donc aux élections) : 30 € ;
  - Cotisation réduite (réservée aux étudiants et aux sans-emploi) : 15 € ;
- Europe : 65 € (non-PRIOR), 72 € (PRIOR) ;
- Autres pays : 70 € (non-PRIOR), 79 € (PRIOR).

Abonnement à *Mathématique et Pédagogie*

- Belgique : 30 € ;
- Europe : 50 € (non-PRIOR), 54 € (PRIOR) ;
- Autres pays : 53 € (non-PRIOR), 58 € (PRIOR).

Anciens numéros :
- $<$ 2006 : 0,75 €/n° + frais d'expédition.
- $\geqslant$ 2006 : 2,50 €/n° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : consulter le secrétariat.

Abonnement à *Math-Jeunes* ou *Math-Jeunes Junior*

Les abonnements à ces revues, destinées aux élèves du secondaire, supérieur et inférieur respectivement, sont idéalement pris de manière groupée par l'intermédiaire d'un professeur.

- Abonnements groupés (au moins 5) :
  - Abonnements groupés à une des revues (3 numéros) Belgique : 4 € ;
  - Abonnements groupés aux deux revues (6 numéros) Belgique : 8 €.

- Abonnements individuels :
  - Abonnements à une des revues (3 numéros)
    Belgique : 6 € ;
    France : 8 € (à prendre par l'intermédiaire de l'APMEP) ;
    Europe : 18 € (non-PRIOR), 20 € (PRIOR) ;
    Autres pays : 19 € (non-PRIOR), 22 € (PRIOR).
  - Abonnements aux deux revues (6 numéros)
    Belgique : 12 € ;
    France : 16 € (à prendre par l'intermédiaire de l'APMEP) ;
    Europe : 24 € (non-PRIOR), 26 € (PRIOR) ;
    Autres pays : 25 € (non-PRIOR), 28 € (PRIOR).

Anciens numéros :

- < 2006–2007 : 0,25 €/n° + frais d'expédition.
- ⩾ 2006–2007 : 0,50 €/n° + frais d'expédition.

Frais d'expédition : consulter le secrétariat.

Bulletin de l'APMEP

Les membres de la SBPMef peuvent, par versement à son compte, devenir membres de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public (France). Le prix de l'abonnement est de 50 €. Ils recevront le *Bulletin* de l'APMEP, le BGV (*Bulletin à Grande Vitesse*) et *PLOT*.
Les membres de la SBPMef peuvent aussi commander par celle-ci les publications de l'APMEP ; ils bénéficient du prix « adhérents ».

Autres publications (brochures et CD-ROM)

Les prix indiqués sont les prix des publications ; les frais d'expédition (port et emballage) sont en sus. Les prix réduits sont réservés aux membres de la SBPMef ou de sociétés associées (comme l'APMEP) et aux étudiants. N'hésitez pas à consulter notre secrétariat ou à visiter notre site Internet.
Pour toutes nos publications non périodiques, à partir du dixième exemplaire, toute la commande bénéficie d'une réduction de 10 %.

Modalités de paiement :

Pour effectuer une commande, versez le montant indiqué sur un des comptes suivants :

- **Si vous habitez en Belgique :** Compte 000-0728014-29 de SBPMef.
- **Si vous habitez en France :** Compte CCP Lille 10 036 48 S de SBPMef.
- **Si vous habitez ailleurs :** Virement international sur l'un de nos deux comptes avec les références internationales suivantes :
  CCP BELGIQUE : IBAN BE26 0000 7280 1429 / BIC BPOTBEB1
  ou CCP LILLE :
  IBAN FR68 2004 1010 0510 0364 8S02 683 / BIC PSSTFRPPLIL

	Prix plein	Prix réduit	Frais d'expédition
Séries RÉNOVER			
Série 1 (n° 12)	1 €	—	T1
Série 2 (n^{os} 7–11 & 13)	5 €	—	T2
Série 3 (n° 14)	5 €	—	T2
Les 3 séries	7,50 €	—	T2
Dossiers d'exploration didactique			
Dossier 2 : *Autour du PGCD*	1,80 €	1,20 €	T1
Dossier 3 : *Isomorphisme et Dimension*	1,80 €	1,20 €	T1
Dossier 6 : *Statistique*	7,40 €	6 €	T1 ([1])
Dossier 7 : *Vers les infiniment petits* (Simone Trompler et Guy Noël)	6 €	—	T1
Dossier 8 : *La démonstration en géométrie plane dans les premières années l'enseignement secondaire* (Claude Villers *et al.*)	9 €	—	T2 ([2])
Dossier 9 : *Des démonstrations à la rencontre des compétences à travers de thèmes* (Claude Villers *et al.*)	9 €	—	T2 ([2])
Dossier 10 : *Narrations de recherche — De la théorie à la pratique dans les enseignements secondaire et supérieur* (Jacques Bair, Jean-Claude Delagardelle, Valérie Henry)	6 €	—	T1
Dossier 11 : *Enseignons en jouant* (B. Honclaire, N. Lambelin, Y. & G. Noël)	20 €	15 €	T2
Jacques Bair, *Mathématique et Sport*	5 €	3,70 €	T1
François Jongmans, *Eugène Catalan, Géomètre sans patrie, …*	12 €	9,50 €	T2
G. Robert, cd-rom, logiciels mathématiques	5 €	—	T1
Recueils de questions des OMB			
Tome 5	6 €	—	T1 ([1])
Tome 6	6 €	—	T1 ([1])
Tomes 5 & 6 ensemble	10 €	—	T1 ([1])

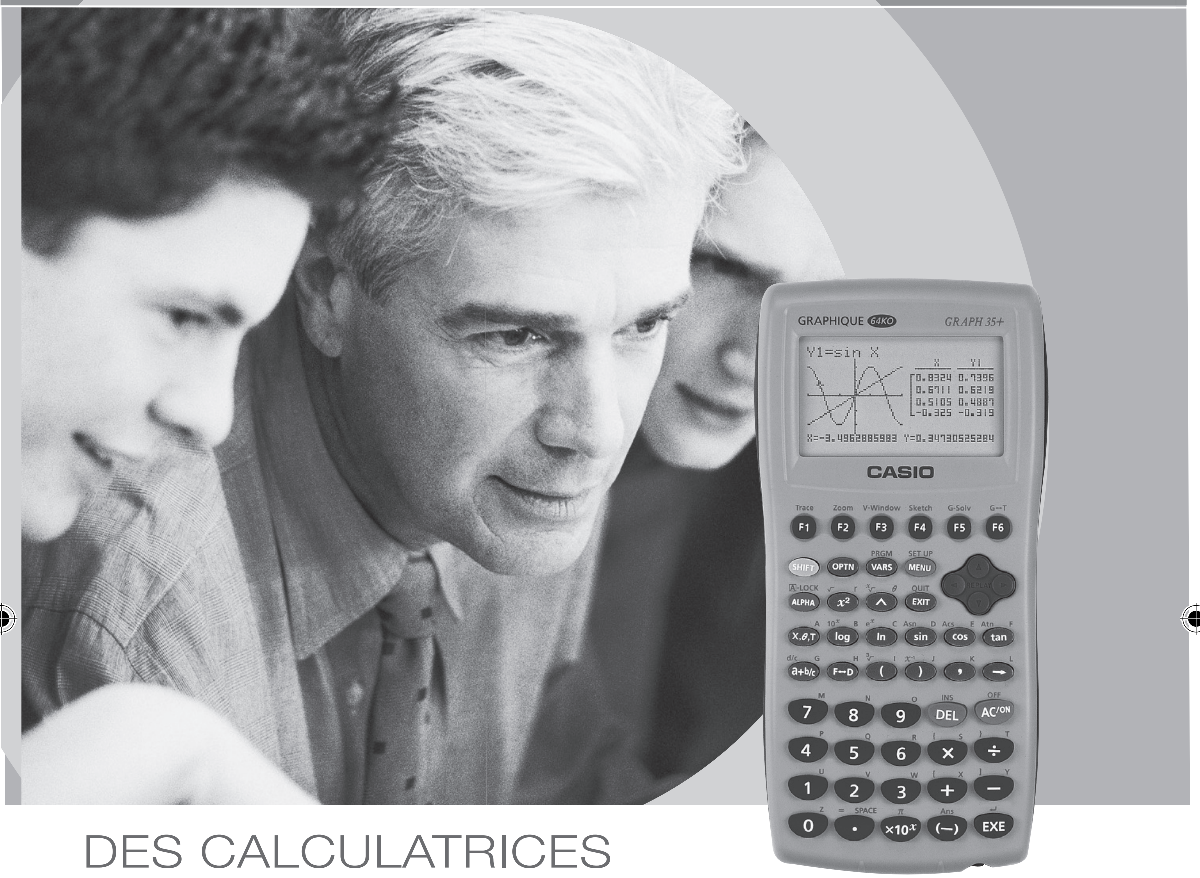
([1]) 2–3 ex. : T2 ; 4–6 ex. : T3 ; 7–12 ex. : T4 ; au-delà : consulter le secrétariat.
([2]) 2 ex. : T3 ; 3–4 ex. : T4 ; au-delà : consulter le secrétariat.

Frais d'expédition (non-prior)

	Belgique	Europe	Autres pays
Tarif 1	1,80 €	4,50 €	6 €
Tarif 2	3,50 €	8,50 €	12 €
Tarif 3	5 €		
Tarif 4	7 €		

Pour les expéditions prior : consulter le secrétariat.
Pour la définition d'« Europe », voir les tarifs postaux.
Pour tout problème, consulter le secrétariat.

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE



GRAPH 35+

DES CALCULATRICES ADAPTÉES À CHAQUE NIVEAU SCOLAIRE

- 9 modèles de calculatrices scientifiques et graphiques pour accompagner les élèves tout au long de leur scolarité
- Légères, solides et faciles à utiliser
- Tous les modèles scolaires sont garantis trois ans

CASIO®

www.cas-bel.com